Engel 多様体と接触構造

東京工業大学 理学院 数学系
山崎晃司 (Koji YAMAZAKI)

概要

4 次元多様体上の完全不可積分な 2 次元分布を Engel 構造と呼び、Engel 構造を備えた 4 次元多様体を Engel 多様体と呼ぶ。Engel 多様体は近年になって注目され始めている対象であるが、その実態はよくわかっていない。今回私は、Engel 多様体と 3 次元接触多様体との間の関手的関係を調べ、自己同型群が自明である Engel 多様体の例を構成した。

0 導入

1889 年、4 次元多様体上の完全不可積分な 2 次元分布は局所的にすべて同型であることが、Engel[3] によって示された。この形の定理は、シンプレクティック幾何や接触幾何の世界ではよく知られている通り、いわゆる Darboux の定理と呼ばれるものである。この結果は、一般的に外微分形式系について知られていた Darboux の定理の中でも独立しており、不思議な結果ではあったものの、当時はそれほど注目されるまでには至らなかったようである。その後の 1993 年、Montgomery[6] は、n 次元多様体上の階数 k の分布が "安定" ならば、不等式 $k(n-k) \leq n$ を満たさなければならないことを示した。この不等式を具体的に解くと、(自明なものを除けば) $k=1$ または $k=n-1$ または $(n,k)=(4,2)$ となる。$(n,k)=(4,2)$ に相当するものが Engel 構造である。以来、Engel 多様体の研究は少しづつ増え始め、トポロジーの世界でいくつかの結果が示された。(ref. [7] [4] [1] [5]) その後、Vogel[8] によって Engel 構造の存在問題が解かれたことにより、Engel 多様体は大きく注目されることとなった。近年では h-原理が発見される (ref. [2]) など、今後の発展が期待される対象である。

1 Engel 構造から接触構造へ

定義 1.0.1 (Engel 多様体)**.** E を 4 次元多様体、$\mathcal{D} \subset TE$ を分布とする。$\mathcal{D}$ を切断の層と同一視して、$\mathcal{D}^2 :\overset{\text{def}}{=} \mathcal{D} + [\mathcal{D},\mathcal{D}], \mathcal{D}^3 :\overset{\text{def}}{=} \mathcal{D}^2 + [\mathcal{D}^2,\mathcal{D}^2]$ とする。

$\mathcal{D}$ が E 上の *Engel* 構造であるとは、$rank(\mathcal{D}) = 2, rank(\mathcal{D}^2) = 3, rank(\mathcal{D}^3) = 4$ をみたすことである。4 次元多様体と *Engel* 構造の組 $(E,\mathcal{D})$ を *Engel* 多様体という。

$(E_1,\mathcal{D}_1),(E_2,\mathcal{D}_2)$ は *Engel* 多様体とする。*Engel* 準同型 $f:(E_1,\mathcal{D}_1) \to (E_2,\mathcal{D}_2)$ とは、局所微分同相写像 $f: E_1 \to E_2$ であって、各点で $df(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$ となるもののことである。

命題 1.0.2. $(E,\mathcal{D})$ を *Engel* 多様体とする。このとき、階数 1 の分布 $^{\exists!}\mathcal{L} \subset \mathcal{D}$ であって、$[\mathcal{L},\mathcal{D}^2] \subset \mathcal{D}^2$

を満たすものがただ一つ存在する。

定義 1.0.3. 上記の $\mathcal{L}$ を *Engel* 多様体 $(E, \mathcal{D})$ の特性葉層 *(characteristic foliation)* と呼ぶ。

特性葉層に横断的な 3 次元部分多様体 $M \subset E$ は接触構造 $TM \cap \mathcal{D}^2$ を持つ。Engel 多様体の性質の大部分は特性葉層と 3 次元接触構造によって支配される。(このような M はいつでも存在するが、標準的なものが一つに決まってはいないことに注意する。)

定義 1.0.4 (接触多様体)**.** M は $2n+1$ 次元多様体とする。

M 上の接触形式 *(contact form)* とは、M 上の一次微分形式 α であって、いたる所で $\alpha \wedge d\alpha^n \neq 0$ を満たすもののことである。

M 上の接触構造 *(contact structure)* とは、接束の部分束 $\xi \subset TM$ であって、階数は $2n$ で、局所的に接触形式 α を用いて $\xi = Ker(\alpha)$ と書けるもののことである。

奇数次元多様体 M と M 上の接触構造 ξ の組 (M, ξ) を接触多様体という。

$(M_1, \xi_1), (M_2, \xi_2)$ は接触多様体とする。接触準同型 $f : (M_1, \xi_1) \to (M_2, \xi_2)$ とは、局所微分同相写像 $f : M_1 \to M_2$ であって、各点で $df(\xi_1) = \xi_2$ となるもののことである。

Engel 多様体 $(E, \mathcal{D})$ の特性葉層 $\mathcal{L}$ に接する任意のベクトル場は、"偶接触構造"$\mathcal{D}^2$ を保つ。すなわち、$\mathcal{L}$ の任意のホロノミーは接触準同型である。よって、葉空間 $E/\mathcal{L}$ は接触構造 $\mathcal{D}^2/\mathcal{L}$ を持つ。この構成 $(E, \mathcal{D}) \mapsto (E/\mathcal{L}, \mathcal{D}^2/\mathcal{L})$ は関手的である。

葉層構造の葉空間は一般には多様体ではないが、多様体となるための十分条件が知られている。(一般に、葉空間は "Lie 亜群" と見なせることが知られており、この言葉を使えば必要十分条件も記述できる。)

定理 1.0.5. X は多様体、$\mathcal{F}$ は X 上の葉層構造とする。

(1) $\mathcal{F}$ は、すべての葉がコンパクトであるとする。この時、すべてのホロノミー群が有限ならば、葉空間は *orbifold* である。

(2) 上の状況で、さらにすべてのホロノミー群が自明ならば、葉空間は多様体である。

2 接触構造から Engel 構造へ

(M, ξ) は 3 次元接触多様体とする。$E = \mathbb{P}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \coprod_{x \in M} \mathbb{P}(\xi_x) = (\xi - 0)/\mathbb{R}^\times$ は接触構造 ξ の射影化とし、$\pi : E \to M$ は自然な射影とする。 E 上の階数 2 の分布 $\mathcal{D}$ を次のように定める。

各 $l \in E$ with $\pi(l) = x$ に対し、$l \subset \mathbb{P}(\xi_x)$ は原点を通る直線である。そこで、$\mathcal{D}_l \stackrel{\text{def}}{=} d\pi_l^{-1}(l) \subset T_l E$ とする。

同様に、$E' = \mathbb{S}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (\xi - 0)/\mathbb{R}_{>0}$ とする。E' は E 上の 2-被覆空間である。 E' 上の階数 2 の分布 $\mathcal{D}'$ を $\mathcal{D}$ の引き戻しとして定義する。$\pi' : E' \to M$ は自然な射影とする。

命題 2.0.1. *(1)* 上記の $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ は E, E' 上の *Engel* 構造である。

$(E, \mathcal{D}), (E', \mathcal{D}')$ の特性葉層を $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ とする。

(2) $\mathcal{D}^2 = d\pi^{-1}(\xi), \mathcal{D}'^2 = (d\pi')^{-1}(\xi)$ である。

(3) $\mathcal{L} = Ker(d\pi), \mathcal{L}' = Ker(d\pi')$ である。

定義 2.0.2 (Cartan 延長)**.** *(1) (2.0.1)* の $(E, \mathcal{D})$ を $M, \xi)$ の *Cartan* 延長 *(Cartan prolongation)* と呼ぶ。以下、これを $\mathbb{P}(M, \xi)$ と表す。

(2) (2.0.1) の $(E', \mathcal{D}')$ を $M, \xi)$ の向き付けられた *Cartan* 延長 *(oriented Cartan prolongation)* と呼ぶ。以下、これを $\mathbb{S}(M, \xi)$ と表す。

(2.0.1) の (3) より、$\mathbb{P}(M, \xi), \mathbb{S}(M, \xi)$ の特性葉層の葉空間は M である。M は接触構造 $\mathcal{D}^2/\mathcal{L}$, ${\mathcal{D}'}^2/\mathcal{L}'$ をもつ。(2.0.1) の (2) より、これは ξ に一致する。Cartan 延長とは、このような Engel 多様体の中で "最小"のものである。これを説明しよう。

$(E, \mathcal{D})$ を Engel 多様体とする。$(E, \mathcal{D})$ の特性葉層の葉空間 M は多様体であるとして、$\pi : E \to M$ は商写像とする。M は接触構造 $\xi \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{E}/\mathcal{L}$ をもつ。

そこで、$\phi : (E, \mathcal{D}) \to \mathbb{P}(M, \xi)$ を、$\phi(p) \overset{\mathrm{def}}{=} d\pi(\mathcal{D}_p) \subset \xi_{\pi(p)}$ によって定める。この ϕ を展開写像 (development map) という。

命題 2.0.3 (普遍性)**.** 展開写像 ϕ は *Engel* 準同型である。

さらに、別の 3 次元接触多様体 (N, ξ_N) および *Engel* 準同型 $\psi : E \to \mathbb{P}(\xi_N)$ が存在したとする。このとき、次の図式を可換にする接触準同型 $\tilde{\psi} : M \to N$ がただ一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathbb{P}(M, \xi) \arrow[d, "\mathbb{P}\tilde{\psi}"] \\ & \mathbb{P}(N, \xi_N) \end{tikzcd}$$

3 主結果

3.1 orbifold への拡張

Cartan 延長と展開写像の議論は、接触 orbifold に対しても容易に一般化できる。しかし、接触 orbifold の Cartan 延長は一般には Engel orbifold になる。これが多様体になるための必要十分条件は次で与えられる。

定理 3.1.1 (Y. [9])**.** (M, ξ) は 3 次元接触 *orbifold* とする。

(1) (M, ξ) が正かつすべてのイソトロピー群の位数が奇数の時、かつその時に限り、$\mathbb{P}(M, \xi)$ は多様体である。

(2) (M, ξ) が正の時、かつその時に限り、$\mathbb{S}(M, \xi)$ は多様体である。

用語の説明をする。

まず、orbifold の定義は詳しくは延べないが、簡単には次のようなものである。多様体 (manifold) とは局所的にユークリッド空間と同相な位相空間のことであった。orbifold とは、局所的に有限群作用を備えたユークリッド空間に同相な位相空間のことである。

M を orbifold とし、$\{(V_\lambda \subset \mathbb{R}^n, G_\lambda \curvearrowright V_\lambda, p_\lambda : V_\lambda \to M)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を M のアトラスとする。

定義 3.1.2. M 上の接触構造 ξ とは、各チャート $(V_\lambda, G_\lambda, p_\lambda)$ 上の接触構造 ξ_λ の組 $\xi = \{\xi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ であって、各群作用 $G_\lambda \curvearrowright V_\lambda$ および座標変換が接触構造を保つもののことである。
接触構造を備えた *orbifold* のことを接触 *orbifold* という。

例 3.1.3. $\xi_{std} \stackrel{\text{def}}{=} Ker(dz + xdy - ydx)$ は $\mathbb{R}^3$ 上の接触構造である。$\phi_n, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を次のように定める。

$$\begin{aligned}
\phi_n(x,y,z) &\stackrel{\text{def}}{=} (x\cos(\frac{2\pi}{n}) - y\sin(\frac{2\pi}{n}), x\sin(\frac{2\pi}{n}) + y\cos(\frac{2\pi}{n}), z), \\
\psi(x,y,z) &\stackrel{\text{def}}{=} (x, -y, -z)
\end{aligned}$$

$G_{n,std} \stackrel{\text{def}}{=} < \phi_n, \psi > \curvearrowright (\mathbb{R}^3, \xi_{std})$, $H_{n,std} \stackrel{\text{def}}{=} < \phi_n > \curvearrowright (\mathbb{R}^3, \xi_{std})$ は有限群作用で、これは接触構造を保つ。 これらをスタンダードモデルと呼ぶ。$(\mathbb{R}^3, \xi_{std})/G_{n,std}$ および $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})/H_{n,std}$ は接触 orbifold である。

スタンダードモデルは次の定理のために重要である。

定理 3.1.4 (Darboux's theorem for contact 3-orbifolds)**.** (M, ξ) を接触 *3-orbifold* とする。この時、任意の $x \in M$ まわりのチャート $^\exists(V, G, p)$ であって、(V, G) が $0 \in (\mathbb{R}^3, H)$（$H = G_{n,std}$ または $H = H_{n,std}$）まわりの開集合と同型であるものが存在する。

次に、イソトロピー群について定義する。

定義 3.1.5. M を *orbifold* とし、任意の点 $x \in M$ をとる。X まわりのチャート (V, G, p) および点の持ち上げ $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ をとる。$G_x \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in G \mid \sigma\tilde{x} = \tilde{x}\}$ を x におけるイソトロピー群という。

定義 3.1.6. 接触 *orbifold*(M, ξ) が正であるとは、すべての点 $x \in M$ においてイソトロピー群による接触構造のファイバーへの作用 $G_x \curvearrowright \xi_x$ が向きを保つことである。

$(\mathbb{R}^3, \xi_{std})/G_{n,std}$ は正ではなく、$(\mathbb{R}^3, \xi_{std})/H_{n,std}$ は正である。あとは Darboux の定理より、主定理は次の補題に帰着される。

補題 3.1.7.

(1) 作用 $G_{n,std} \curvearrowright \mathbb{P}(\xi_{std}), G_{n,std} \curvearrowright \mathbb{S}(\xi_{std})$ は自由ではない。
(2) 作用 $H_{n,std} \curvearrowright \mathbb{P}(\xi_{std})$ が自由であるための必要十分条件は n が奇数であることである。
(3) 作用 $H_{n,std} \curvearrowright \mathbb{S}(\xi_{std})$ はすべての n に対して自由である。.

3.2　展開写像と Engel 同型群

次の関手の合成を考える。

$$\begin{tikzcd}
\{Engel\} \arrow[r] & \{Contact\} \arrow[r] & \{Engel\} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\
(E,\mathcal{D}) \arrow[r, mapsto] & (E/\mathcal{L},\mathcal{D}^2/\mathcal{L}) \arrow[r, mapsto] & \mathbb{P}(E/\mathcal{L},\mathcal{D}^2/\mathcal{L})
\end{tikzcd}$$

これは、群準同型

$$\Phi : Aut(E,\mathcal{D}) \to Aut(E/\mathcal{L},\mathcal{D}^2/\mathcal{L}) \cong Aut(\mathbb{P}(E/\mathcal{L},\mathcal{D}^2/\mathcal{L}))$$

を導く。

定理 3.2.1 (Y. [10])**.** $(E,\mathcal{D})$ は連結な *Engel* 多様体とし、$\mathbb{P}(E/\mathcal{L},\mathcal{D}^2/\mathcal{L})$ が多様体であると仮定する。もしも展開写像 $\phi : (E,\mathcal{D}) \to \mathbb{P}(E/\mathcal{L},\mathcal{D}^2/\mathcal{L})$ が被覆写像でないならば、上記の Φ は単射である。

この定理は、次の補題から直ちに従う。

補題 3.2.2. $(E,\mathcal{D})$ を連結な *Engel* 多様体とし、$\mathbb{P}(E/\mathcal{L},\mathcal{D}^2/\mathcal{L})$ は多様体であると仮定する。

(1) もしも、特性葉層 $\mathcal{L}$ のある葉 L について、$\phi|_L : L \to \mathbb{P}(\mathcal{D}^2/\mathcal{L})_L$ が被覆でないならば、群準同型 Φ は単射である。

(2) もしも、特性葉層 $\mathcal{L}$ のすべての葉 L について、$\phi|_L : L \to \mathbb{P}(\mathcal{D}^2/\mathcal{L})_L$ が被覆であるならば、展開写像 ϕ は被覆である。

証明の概略.

(1) の証明

$\Phi(f) = \Phi(g) (f, g \in Aut(E,\mathcal{D}))$ と仮定する。

$\phi|_L$ が被覆でないので、$\phi|_L$ は $(a,b) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}\,(a \neq -\infty)$ と同一視できる。

$$\begin{tikzcd}
(c,d) \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\
(a,b) \arrow[u, shift left, "g"'] \arrow[u, shift right, "f"] \arrow[r, "\phi"'] & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[u, "\Phi(f)=\Phi(g)"']
\end{tikzcd}$$

このとき、十分小さい $\epsilon > 0$ に対して $f(a+\epsilon) = g(a+\epsilon)$ が成り立つ。E は連結だから、$f = g$ である。

(2) の証明

特性葉層 $\mathcal{L}$ の任意のの葉 L をとり、$L' \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{P}(\mathcal{D}^2/\mathcal{L})_L$ とおく。
非特異ベクトル場 X であって、L' のホロノミーを実現するものが、L' の近傍 U 上でとれる。
$\tilde{X}$ を X の ϕ による引き戻しとすると、各 $\phi|_{L_0}$ が被覆であることから $\tilde{X}$ は完備である。
これにより、$\phi|_{\phi^{-1}(U)} : \phi^{-1}(U) \to U$ は $\phi|_L$ と同じ次数を持つ被覆である。 $\square$

3.3 同型群が自明となる Engel 多様体の構成

次の定理を証明する。

定理 3.3.1 (Mitsumatsu, Y.). 自己同型群が自明群であるような *Engel* 多様体が存在する。

証明のための準備を始める。

$(E, \mathcal{D})$ は連結な Engel 多様体とし、葉空間 $E/\mathcal{L}$ が多様体であると仮定する。
関数 $\sigma : E/\mathcal{L} \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ を $\sigma(L) \overset{\mathrm{def}}{=} \min\{\#\phi^{-1}(y) \,|\, y \in \mathbb{P}(\mathcal{D}^2/\mathcal{L})_L\}$ によって定める。

σ を捻じれ数関数 (twisting number function) と呼ぶことにする。

命題 3.3.2. 任意の $f \in Aut(E, \mathcal{D})$ に対し、f が葉空間に導く写像 $E/\mathcal{L} \to E/\mathcal{L}$ は捻じれ数関数 σ を保つ。

例 3.3.3 ($\mathbb{R}^3$ の Cartan 延長の普遍被覆). まずは簡単な例を見る。

$$E \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{R}^4 \ni (x, y, z, \theta)$$
$$\mathcal{D} \overset{\mathrm{def}}{=} \langle \partial_\theta, \cos(\frac{\theta}{2})X + \sin(\frac{\theta}{2})Y \rangle \; (X \overset{\mathrm{def}}{=} \partial_x - y\partial_z, Y \overset{\mathrm{def}}{=} \partial_y)$$

とすると、$(E, \mathcal{D})$ は Engel 多様体である。

特性葉層は $\mathcal{L} = \langle \partial_\theta \rangle$ と書け、“偶接触構造”は $\mathcal{E} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{D}^2 = \langle \partial_\theta, X, Y \rangle$ と書ける。

よって葉空間とその接触構造は $M \overset{\mathrm{def}}{=} E/\mathcal{L} \cong \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$, $\xi \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{E}/\mathcal{L} \cong \langle X, Y \rangle$ である。接触構造の自明化が与えられていることから、Cartan 延長の自明化が次の同型で与えられる。

$$M \times S^1 \cong \mathbb{P}(M, \xi); (\boldsymbol{x}, [\theta]) \mapsto \langle \cos(\frac{\theta}{2})X_{\boldsymbol{x}} + \sin(\frac{\theta}{2})Y_{\boldsymbol{x}} \rangle$$

これにより、展開写像は具体的に次のようにかける。

$$\phi : E \to M \times S^1; (\boldsymbol{x}, \theta) \mapsto (\boldsymbol{x}, [\theta])$$

このとき、捻じれ数関数 σ は定値関数 ∞ である。

例 3.3.4 (例 3.3.3 の変形). 上記の例の変形を考える。

葉空間上の一点 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ および自然数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定する。

$$E \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{R}^4 - \{\boldsymbol{x}_0\} \times ((-\infty, -n\pi] \cup [n\pi + \epsilon, \infty)) \; (\epsilon \in (0, 2\pi])$$
$$\mathcal{D} \overset{\mathrm{def}}{=} \langle \partial_\theta, \cos(\frac{\theta}{2})X + \sin(\frac{\theta}{2})Y \rangle \; (X \overset{\mathrm{def}}{=} \partial_x - y\partial_z, Y \overset{\mathrm{def}}{=} \partial_y)$$

とすると、$(E, \mathcal{D})$ は Engel 多様体である。

例 3.3.3 とまったく同様に、葉空間とその接触構造は $M \overset{\mathrm{def}}{=} E/\mathcal{L} \cong \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$, $\xi \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{E}/\mathcal{L} \cong \langle X, Y \rangle$ であり、展開写像は具体的に次のようにかける。

$$\phi : E \to M \times S^1; (\boldsymbol{x}, \theta) \mapsto (\boldsymbol{x}, [\theta])$$

このとき、捻じれ数関数 σ は次の値をとる。

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} n & (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0) \\ \infty & (otherwise) \end{cases}$$

定理 *3.3.1* の証明. 加算稠密集合 $Q = \{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^3$ をとる。

$$E \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^4 - \bigcup_n \{\boldsymbol{x}_n\} \times ((-\infty, -n\pi] \cup [n\pi + \epsilon, \infty)) \, (\epsilon \in (0, 2\pi])$$
$$\mathcal{D} \overset{\text{def}}{=} \langle \partial_\theta, \cos(\frac{\theta}{2})X + \sin(\frac{\theta}{2})Y \rangle \, (X \overset{\text{def}}{=} \partial_x - y\partial_z, Y \overset{\text{def}}{=} \partial_y)$$

とすると、$(E, \mathcal{D})$ は Engel 多様体である。このとき、捻じれ数関数 σ は次の値をとる。

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} n & (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_n) \\ \infty & (otherwise) \end{cases}$$

命題 3.3.2 より、任意の $f \in Aut(E, \mathcal{D})$ に対し、f が葉空間に導く写像 $\underline{\mathrm{f}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は Q 上で恒等である。$Q \subset \mathbb{R}^3$ は稠密だから、$\underline{\mathrm{f}}$ は $\mathbb{R}^3$ 上で恒等である。定理 3.2.1 より、f は恒等写像である。 □

参考文献

[1] Jiro Adachi. Engel structures with trivial characteristic foliations. *Algebraic & Geometric Topology*, 2(1):239–255, 2002.

[2] Roger Casals, José Luis Pérez, Álvaro del Pino, and Francisco Presas. Existence h-principle for engel structures. *Inventiones mathematicae*, 210(2):417–451, 2017.

[3] Friedrich Engel. Zur invariantentheorie der systeme pfaff'scher gleichungen. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, 41:157–176, 1889.

[4] Alexander Golubev. On the global stability of maximally nonholonomic two-plane fields in four dimensions. *International Mathematics Research Notices*, 1997(11):523–529, 1997.

[5] Mirko Klukas and Bijan Sahamie. On prolongations of contact manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 141(9):3257–3263, 2013.

[6] Richard Montgomery. Generic distributions and lie algebras of vector fields. *Journal of differential equations*, 103(2):387–393, 1993.

[7] Richard Montgomery. Engel deformations and contact structures. *Translations of the American Mathematical Society-Series 2*, 196:103–118, 1999.

[8] Thomas Vogel. Existence of engel structures. *Annals of mathematics*, pages 79–137, 2009.

[9] Koji Yamazaki. Engel manifolds and contact 3-orbifolds. *arXiv preprint 1811.09076*, 2018.

[10] Koji Yamazaki. Non-covering development maps and engel automorphisms. *arXiv preprint 1903.02362*, 2019.