標準形理論による局所的な可積分性判定

京都大学大学院 情報学研究科
山中祥五 (Shogo YAMANAKA)

概要

微分方程式の可積分性は 19 世紀に盛んに研究された古典的な話題であるが，非可積分性を数学的に証明するための十分な手法は 2001 年の Morales-Ramis 理論で確立されたばかりである．しかし，この理論を用いても，制限三体問題や二重振り子のような明らかにカオス的な力学系で未だ非可積分性が証明できていない例がある．本発表では平衡点における標準形への変換を用いた新たな非可積分性判定の方法を提案し，ある 2 次元微分方程式に対する結果を説明する．

1 はじめに

1.1 可積分とはなにか

微分方程式が解けるかという問題はニュートンの時代から続く古典的な問題である．可積分の定義はいくつもあるが，おおむね図にあるように，(a) 微分方程式がいい構造を持つ，(b) 解がいい性質を持つ，(c) 解が陽に解けるの三通りに分けられると思う．これらの三つの概念はほとんど同じだと考えがちであるが，完全には一致しない．これらの関係を調べて可積分性や非可積分性の意味を明らかにしていくことは，可積分性の研究の中心的な問題である．今回は方程式が対称性を持つ (図で

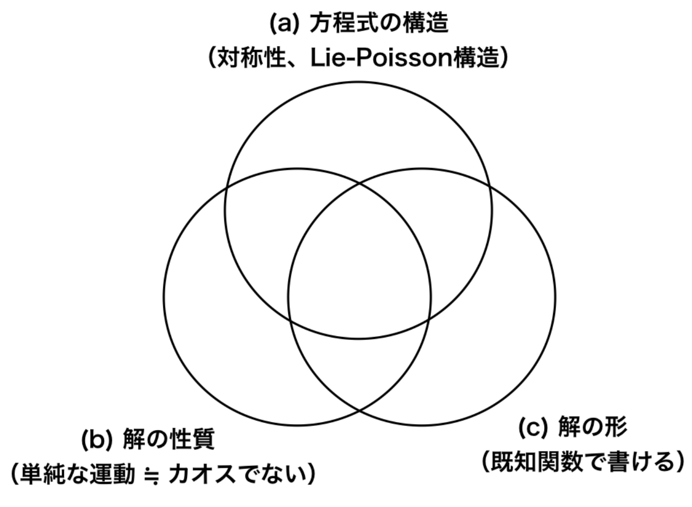

図 1: 可積分とは (a), (b), (c) のいずれかを指すことが多い．これらは完全には一致しない．

(a) に対応するもの) という意味での可積分性を考えていく．

この方向の可積分性の最初の定義は Liouville によるハミルトン系の可積分性である．m 自由度のハミルトン系とは，ハミルトニアンと呼ばれる $2m$ 変数の関数 $H(q,p)$ を用いて定まる以下の $2m$ 連立微分方程式のことであった:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, \ldots, m$$

また，関数 $F(q,p), G(q,p)$ のポアソン括弧とは

$$\{F, G\}(q,p) = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j} \right)$$

であり，$\{F, G\} = 0$ のとき，F, G はポアソン可換であると呼ぶのであった．

Definition 1 (Liouville 可積分性)**.** *ハミルトニアン H を持つ m 自由度ハミルトン系が* ***Liouville*** *可積分であるとは，m 個の関数 $H_1 = H, H_2, ..., H_m$ が存在して，それらがポアソン可換であることとをいう．*

Liouville 可積分の性質を顕著に表現しているのが，Liouville-Arnold の定理である．

Theorem 1 (Liouville-Arnold の定理)**.** *Liouville 可積分な（厳密には上で述べた定義より少しだけ強い仮定を満たす）m 自由度のハミルトン系に対して，変数変換 $(q,p) \mapsto (\theta, I) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^m$ が存在して，方程式は以下のように書ける．*

$$\dot{\theta}_j = \omega_j(I), \quad \dot{I}_j = 0, \quad j = 1, \ldots, m \tag{1}$$

*ここで，$\omega_j(I)$ は I の関数．θ と I をそれぞれ*角変数*，*作用変数*と呼ぶ．*

ω_j がどういう形かは分からないが，(1) をよく見ると，初期条件を定めれば I_j は一定だから，$\omega_j(I)$ も解に沿って一定となる．つまり，解 $\theta(t)$ はトーラス上の線形流となる．これは，Liouville 可積分であれば運動は簡単であることを意味する．図 1 で言えば，(a) ならば (b) を表した定理だと思える．また，今述べたように (1) は容易に解けるから，（角変数・作用変数への変換は分かっているとするならば,）この定理は (a) ならば (c) を表した定理だと見ることもできる．

以下ではハミルトン系とは限らない以下の一般的な n 次元の方程式を考える．

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{C}^n \tag{2}$$

ここで，f は解析的ベクトル場，または有理型ベクトル場とする．一般の微分方程式 (2) に対する可積分の定義としては，Liouville 可積分性の一般化である，以下の Bogoyavlenskij[2] が導入した可積分性を採用しよう．

Definition 2 (Bogoyavlenskij 可積分性)**.** *n 次元微分方程式 (2) が $(m, n-m)$*-**可積分**であるとは，*m 個のベクトル場 $f_1(= f), f_2, \ldots, f_m$ と $n - m$ 個の関数 $H_1, \ldots, H_{n-m}$ が存在して以下が成り立つことをいう:*

(a) $f_1, \ldots, f_m$ はほとんど至る所線型独立で $DH_1, \ldots, DH_m$ はほとんど至る所線型独立;

(b) 全てのベクトル場は可換，つまり，$[f_j, f_k](x) := Df_k(x)f_j(x) - Df_j(x)f_k(x) = 0$ $(j, k = 1, \ldots, m)$;

(c) 全ての関数は全てのベクトル場の保存量，つまり，$\mathcal{L}_{f_j}H_k(x) := f_j(x) \cdot DH_k(x) = 0$ $(j = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, n-m)$.

また，ある $m \geq 1$ で $(m, n-m)$-可積分であるときに単に**可積分**であるという．

微分方程式の本を見ると，n 連立（あるいは n 階）方程式は $n-1$ 個の保存量を持てば解けると書いてあることがあるが，これは Bogoyavlenskij の意味では $(1, n-1)$ 可積分ということである．また，m 自由度のハミルトン系は $2m$ 連立方程式であるが，Liouville 可積分のとき，m 個の保存量に加えてそれらから定まるハミルトンベクトル場が m 個存在するため，(m, m)-可積分である．このように，様々な意味での可積分系は Bogoyavlenskij の意味でも可積分となっている．逆に言えば，Bogoyavlenskij の意味で非可積分であれば，他の意味でも非可積分となる．ちなみに，Liouville-Arnold の定理の類似が Bogoyavlenskij の意味での可積分であるときにも成立する．

1.2 分類問題

今回は可積分性や非可積分性の意味にはこれ以上触れず，単純に可積分かどうかを判定するという問題を考える．つまり，分類問題を考えていく．（可積分性の意味をさらに知りたい方は [18] などを参照せよ．）分類問題とは「ある性質を満たすものを，同型の違いを除いて決定する」問題と言えるが，今回は同型かどうかは気にせず，単に「ある性質を満たすかどうか」に注目する．

古典的な分類問題としては，正多面体の分類がある．正四面体や正立方体などの五つの立体が正多面体であることは，具体的に性質を満たすか確認するだけでいいので簡単に分かる．一方，全ての立体を一つずつ調べるのは不可能であるため，それ以外の立体が正多面体ではないことを示すには，もう少し別の議論が必要となる（オイラーの多面体定理など）．

今回の可積分性の問題と似たような分類問題としては，パンルヴェ方程式の既約判定がある．第二パンルヴェ方程式とは α をパラメータとする以下の方程式である:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = 2q^3 + tq + \alpha \tag{3}$$

有理関数体から初めて線形微分方程式の解や楕円関数を添加して得られる体の元を**古典解** [19] という．いわゆる特殊関数は古典解である．よって，パンルヴェ方程式が新しい特殊関数を定めているというためには，パンルヴェ方程式が古典解を解に持たないことを述べる必要がある．方程式の既約性の定義はいくつかあるが，今回は方程式が古典解を持たないことを既約であると呼ぶことにする．古典解を持つことを示すには，具体的な解を与えるだけで良い．（ただし，その解を探すのは難しいことも多い．）一方，古典解を持たないことを示すには，素朴には全ての解を調べる必要があり，別の難しさがある．以下が知られている．

Theorem 2. 第二パンルヴェ方程式 (3) に対して以下が成立*:*

1. $\alpha \in \mathbb{Z}$ または $\alpha \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ のとき，(3) は古典解を持つ．
2. $\alpha \notin \mathbb{Z}$ かつ $\alpha \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ のとき，(3) は古典解を持たない．

ちなみに，パンルヴェ方程式は解がパンルヴェ性を持つものの分類から得られた方程式であるため，図 1 の (b) の意味で可積分であるが，既約性は図 1 の (c) の意味では可積分でないことを意味する．

今回問題にする (Bogoyavlenskij の意味での) 可積分性の問題はパンルヴェの既約性の問題と非常に似ている．可積分性を示すには具体的に保存量や可換なベクトル場を与えればよい．一方，非可積分性を示すにはそういったものがないことを示す必要があり，具体的な保存量や可換なベクトル場を見ているだけでは問題は解決できない．

1.3 Morales-Ramis 理論

微分方程式の非可積分性を判定する方法として，Morales-Ramis 理論 [11] が有名である．微分方程式 (2) の平衡点ではない特解 $x = \hat{x}(t)$ をとる．この特解周りで微分方程式を線形化した方程式

$$\dot{\zeta} = Df(\hat{x}(t))\zeta, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n \tag{4}$$

を**変分方程式**と呼ぶ．変分方程式は線形微分方程式ではあるが，係数が t に依存しているため解けるとは限らない．線形微分方程式の複雑さを測るものとして**微分ガロア理論**がある ([12] などを参照せよ)．線形微分方程式 (4) に対して Picard-Vessiot 拡大 L/K が存在し[*1]，L の K-自己微分準同型 G を (4) の**微分ガロア群**と呼ぶ．微分ガロア群は線形代数群であり，Zariski 位相を持つ．単位元を含む連結成分を**単位成分**と呼び G^0 と表す．このとき Morales-Ramis 理論を非ハミルトン系に一般化した以下の定理が成り立つ．

Theorem 3 (Ayoul-Zung の定理 [1])**.** (2) が有理型的に可積分であれば，G^0 は可換である．

この定理の対偶により非可積分性を示すことができる．つまり，変分方程式 (4) の G^0 が可換でないことを示すことができれば，元の微分方程式 (2) が非可積分であることがわかる．

ちなみに，G^0 が可換なら G^0 は可解であり，これは変分方程式 (4) が求積的に解けることを意味するため，Morales-Ramis 理論はある意味で図 1 の (a) ならば (c) を表しているとも言える．

Morales-Ramis 理論により，多くの可積分判定問題が解決された．しかし，明らかに非可積分だと思われるものに対してその判定ができない例がある．例えば，二重振り子は Morales-Ramis 理論では非可積分性が示せないと思われる．それは，Morales-Ramis 理論が平衡点ではない特解を必要とし，その変分方程式のガロア群を計算する必要があるからである．二重振り子ではそのカオス性ゆえに簡単に記述できる解が存在せず，ゆえにガロア群も計算できない．そこで，Morales-Ramis 理論よりも適用範囲の広い可積分性判定の手法が必要となる．

*1 Picard-Vessiot 拡大は，代数的なガロア理論におけるガロア拡大に対応するものである．ここで，K は特解が作るリーマン面上の有理型関数体である．

2 標準形の理論

2.1 Poincaré-Dulac 標準形

微分方程式の標準形の理論はポアンカレの時代から始まった古典的な理論である．標準形の定義もいろいろあるが Bruno に従って説明する．以下ではベクトル場は原点近傍で解析的とし原点は平衡点とする（つまり $f(0)=0$）．仮定より，ベクトル場はテイラー展開できる:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty} f^{(j)}(x) \tag{5}$$

ここで，$f^{(j)}$ は j 次斉次多項式とする．線形項は SN 分解できる．つまり，互いに可換な対角化可能な行列 A^{s} とベキ零行列 A^{n} を用いて，$f^{(1)}(x)=Df(0)x=(A^{\mathrm{s}}+A^{\mathrm{n}})x$ と一意に分解できる．

Definition 3. ベクトル場 (5) が ***Poincaré-Dulac* 標準形** *(*あるいは単に**標準形***)* であるとは，$[A^{\mathrm{s}}x, f]=0$ となることである．

A^{s} の定義から，f の線形項 $Df(0)$ は常に A^{s} と可換である．よって，標準形であるとは，非線形項が $A^{\mathrm{s}}x$ と可換であることを意味する．

以下では簡単のため，$A^{\mathrm{n}}=0$ とする．このとき，標準形であるとは単に線形項 $Df(0)$ と可換であることである．標準形の意味をもう少しわかりやすい形で表現しよう．$\lambda_1,\dots,\lambda_n$ を $Df(0)$ の固有値とする．多重指数表記を用いる．つまり，$p\in\mathbb{Z}^n$ に対して $x^p=x^{p_1}\cdots x^{p_n}$, $|p|=p_1+\cdots+p_n$ とする．

Proposition 1. $Df(0)$ を対角行列とすると，標準形 f は以下のように書ける．

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j+\sum_{p\in R_j} c_j(p)x^p)x_j e_j.$$

ここで，e_j は j 成分が 1 でそれ以外が 0 のベクトルであり，

$$R_j:=\left\{p\in\mathbb{Z}^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n}\lambda_k p_k=0,\, p_j\geq -1,\, p_l\geq 0\,(l\neq j),\, |p|\geq 1\right\}$$

は共鳴集合と呼ばれる集合である．

つまり，標準形とは非線形項に共鳴項 x^p しか残っていないものをいう．共鳴集合の定義が少しややこしいが大切なのは $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k p_k=0$ という条件であり，p が共鳴集合の元であるとは，p が固有値と直交する整数ベクトルであることを意味する．

$n=2$ の場合に具体的に共鳴集合がどうなるか見てみよう．例えば，$\lambda_1=1,\lambda_2=\sqrt{2}$ のときは非共鳴であり，共鳴集合は空集合 $R_1=R_2=\emptyset$ である．この時には，標準形は非線形項がないことを意味する．$\lambda_1=1,\lambda_2=2$ のときは，$2\lambda_1+(-1)\lambda_2=0$ であり，共鳴集合は $R_1=\emptyset$, $R_2=\{(2,-1)\}$ と有限集合である．一方，$\lambda_1=1,\lambda_2=-2$ のときは，自然数 l に対して，$2l\lambda_1+l\lambda_2=0$ だから，共鳴集合は $R_1=R_2=\{(2l,l)\mid l\geq 1\}$ と無限集合になっている．

2.2 normalization の収束性

原点を平衡点とするベクトル場 $f(x)$ は形式ベキ級数による変換 $x = \phi(y)$ により標準形

$$g(y) = D\phi(y)^{-1} f(\phi(y))$$

に変換できることが知られている．標準形への変換 ϕ を **normalization** と呼ぶ．ここで，normalization ϕ が収束するとは限らないことが重要である．

そこで，normalization が収束するための条件を求めるというのは Poincaré から始まる重要な問題意識である．Poincaré は以下の結果を与えた．

Theorem 4 (Pincaré の定理)**.** $Df(0)$ の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に対して，集合 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ の $\mathbb{C}$ 平面での凸包が原点を含まないとき，*normalization* は収束する．

Poincaré の定理の仮定を満たすのは共鳴集合が有限のときに限る．共鳴集合が無限集合のときに収束する normalization の条件を与えたものとしては Bruno の定理 [3] がある．（Bruno の定理の仮定は非常に複雑である．）

可積分性と normalization の収束性の関係については様々な研究があるが，決定的な結果が Zung[17] により与えられた．

Theorem 5 (Zung の定理)**.** 原点近傍で解析的に可積分なベクトル場 f は，原点で収束する *normalization* を持つ．

本題に入る前に，標準形理論の応用について触れておく．ハミルトン系の場合には Poincaré-Dulac 標準形の類似として **Birkhoff 標準形**がある．Birkhoff 標準形に対しても，normalization が収束するかという同様の問題がある．本稿では Poincaré-Dulac 標準形のみを説明するが，Poincaré-Dulac 標準形と Birkhoff 標準形ではほとんど同じ結果が成り立つ．

Poincaré-Dulac 標準形と Birkhoff 標準形は様々なところで使われている．例えば，Painlevé 方程式の解析 [4] や精度保障計算によるローレンツアトラクターの存在証明 [15] で Poincaré-Dulac 標準形が使われている．また，制限三体問題のラグランジュ点の安定性解析 [9] や Painlevé 方程式のインスタントン解の構成 [14] に Birkhoff 標準形が使われている．

2.3 標準形による可積分判定

Zung の定理から，原点近傍における可積分性は以下のように調べられることが分かる．

- もしベクトル場 f の normalization が全て発散するなら，Zung の定理により f は原点近傍で解析的に非可積分である．
- もしベクトル場 f が収束する normalization により標準形 g に変換できるなら，f と g は解析的に共役 (conjugate) であるから，f の原点近傍での可積分性は標準形の解析的な可積分性と等しくなる．

よって，原点近傍で解析的な可積分性を調べるためには主に以下の問題を解決する必要がある．

(i) 与えられた f に対して，全ての ϕ が発散することを示す手法を与えよ．

(ii) 標準形自体の可積分性を判定せよ．

問題 (ii) に関しては Birkhoff 標準形で知られていたことの類似を中心に基本的な結果を [16] で与えた．また，Birkhoff 標準形自体の（有理型的な）可積分性については [6] がある*2．

本稿では問題 (i) を考えていく．この問題が難しいのには二つの原因がある．一つは標準形が一意でなく複数あることである．つまり，ベクトル場 f を 2 つの違う標準形に変換することができる．次に，標準形を固定したとしてもその標準形への normalization も一意ではない．この二つの原因により normalization 自体が非常に多いことが，この問題の難しさの原因である．

標準形の研究では，主に normalization が収束するための条件が研究されており，あるベクトル場の全ての normalization が発散することを示した研究はほとんどない．すべての normalization が発散する例としては以下の古典的な例がある:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1^2, \\
\dot{x}_2 &= x_2 - x_1.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

非常に古い例なので，すべての normalization が発散することをきちんと証明した文献はないと思われる．この方程式のある normalization が発散することは簡単に分かる．すべての normalization が発散することを示したと [5] に書いているが，議論に穴がある．本稿の主結果は (6) を一般化したものに対して，[5] の議論を修正して証明を与えている．

3　主結果

3.1　主結果

Theorem 6. 以下の 2 次元方程式を考える*:*

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1^2, \\
\dot{x}_2 &= x_2 - F(x_1)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ここで $F(x_1) = x_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n \in x_1\mathbb{C}\{x_1\}$ とする．このとき，以下は同値*:*

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/n! = 0$*;*

(ii) 方程式 (7) は収束する *normalization* を持つ*;*

(iii) 方程式 (7) は原点近傍で解析的に可積分である*.*

定理の主張において，(iii) $\Longrightarrow$ (ii) は Zung の定理である. 逆の，(ii) $\Longrightarrow$ (iii) は [16] からすぐに分かる．本稿の興味は前節で述べた問題 (a) であり，すべての normalization が発散するための条件を与えることだから，この定理でいうと (ii) $\Longrightarrow$ (i) (の対偶) に対応する．次節ではこの証明の概略を紹介する．この証明の逆を辿ると，(i) $\Longrightarrow$ (ii) が簡単に分かる．

---

*2 ただし，微分ガロア群の計算が全く正しくないので修正する必要がある．ほとんどの結果は正しいが，彼の方針では非可積分性が証明できないパラメータもある．

3.2　証明の方針

(ii) $\Longrightarrow$ (i) の証明は二つの部分に分けられる．

(A)．(6) の標準形はたくさんある．しかし，解析的な標準形は

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \bar{g}_1(y) = y_1^2 \\ \dot{y}_2 &= \bar{g}_2(y) = y_2\end{aligned} \tag{8}$$

という特別な形の標準形と収束する変換で共役である．これは，標準形への変換を具体的に計算して，標準形を全て求めることと．形式ベキ級数の理論を用いることにより示すことができる．この議論が [5] では抜けている．

(B)． (A) により，(7) から (8) への normalization が発散することを見ればよい．つまり，変換 $x = (\phi_1(y), \phi_2(y))$ が発散することを確かめればよい．ϕ は方程式

$$D\phi(y)\bar{g}(y) = f(\phi(y))$$

から定まる．計算するとまず $\phi_1(y) = y_1/(1+cy_1)$ $(c \in \mathbb{C})$ が分かる．ϕ_2 は

$$y_1^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2} = f_2(\phi) = \phi_2 - F(\phi_1)$$

から定まる．$\phi_2(y)$ の発散を示すには，$y_2 = 0$ のときの方程式

$$y_1^2 \frac{\partial P}{\partial y_1} = P - F(y_1/(1+cy_1)) \tag{9}$$

の解 $P = \phi_2(y_1, 0)$ が発散することを見ればよい．ボレル変換を用いれば，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n/n! \neq 0$ でこの方程式の解が発散することが簡単に分かる．

3.3　結果の一般化

方程式 (7) は非常に小さいクラスの方程式であるので，結果を一般化したいところである．そこで以下のように一般化した方程式を考える:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ A(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ A(0, x_2) = x_2, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = 0\end{gathered} \tag{10}$$

A に対して，**Écalle 不変量**と呼ばれる定数 $C_{-1}, C_1, C_2, \ldots$ が定まる．

Theorem 7. 定理 *(Écalle[7]-Martinet-Ramis[8]-Sauzin[13])*
(10) の形の二つの方程式が共役 $\Longleftrightarrow$ それぞれの *Écalle* 不変量がすべて等しい．

標準形 (8) の不変量は全て 0 である $(C_{-1} = C_1 = C_2 = \cdots = 0)$．一方，(7) の不変量は $C_{-1} = -2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} a_n/n!$ で残りは 0 である．よって，主結果の証明の (B) で示すことは Theorem 7 からも分かる．

証明の (A) の部分は (10) に対しても同様に証明できる．よって，Theorem 7 を用いれば，主結果は (10) に対する結果に拡張できる．ただし，条件は不変量を用いて表される．(B) の部分では P に関する線形方程式 (9) の全ての解が発散することをボレル変換を用いて示しているが，Theorem 7 は (9) を非線形にした方程式の解の発散が不変量で特徴付けられることを示している．最後に，この強力な結果を導くことができる Écalle の理論を紹介する．

Écalle は様々な手法を開発して問題を解いている．今回の問題に対しては，Mould 解析と Resurgence 理論を必要とする．これらを簡単に要約すると以下のようになる:

- Mould 解析: 形式的な表示を与える考え方の一つ．テイラー展開の代わりに使うと思えばよい．非線形方程式の解析以外にも，BCH 公式や多重ゼータ値などへの応用がある．
- Resurgence 理論: 発散級数から解析的な解を得るための理論．特に発散解のボレル変換の特異点を調べる．normalization の発散以外にも，Painlevé 方程式の解析など常微分方程式に広く適用できる．物理では，量子論の Resurgence 現象の数学的な基礎を与える．

発表において，Mould 解析や Resurgence 理論をできるだけ直感的に説明し，Écalle 不変量がどのように定義されるかを説明する予定である．これらの詳細は [13] を参照せよ．また，Resurgence 理論に関しては [12] も参照せよ．

最後に発表で用いる記号を導入しておく．形式ベキ級数 $\phi(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ に対して，変換 $t = 1/z$ により原点を無限遠点に変換したときの関数を $\tilde{\phi}(z) = \phi(1/z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$ と表す．形式ベキ級数 $\tilde{\phi}(z) = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \in z^{-1}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ の（形式）ボレル変換 $\hat{\phi}(\zeta) := \mathcal{B}(\tilde{\phi})(\zeta)$ を

$$\mathcal{B}(\tilde{\phi})(\zeta) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\zeta^n$$

と定める．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 17J01421 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] M. Ayoul and N.T. Zung, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **348** (2010), 1323–1326.

[2] O.I. Bogoyavlenski, Comm. Math. Phys., **196** (1998), 19–51.

[3] A. D. Bruno, Trans. Moscow Math. Soc. **25** (1971), 131–288.

[4] H. Chiba, J. Diff. Equ. **260** (2015), 1263–1313.

[5] G. Cicogna, S. Walcher, Acta Appl. Math. **70** (2002), 95–111.

[6] O, Christov, Celestial Mech. Dynam. Astronom., **112** (2012), 149–167.

[7] J. Écalle, Publ. Math. d’Orsay [Vol. 1: 81-05, Vol. 2: 81-06, Vol. 3: 85-05] 1981, 1985.

[8] J. Martinet, J. P. Ramis, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **55** (1982), 63–164.

[9] J. K. Moser, Lectures on Hamiltonian Systems, Memories A.M.S. 81 (1968).

[10] J.J. Morales-Ruiz and J. M. Peris, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., **8** (1999) 125–141.

[11] J.J. Morales-Ruiz and J.P. Ramis, Methods, Appl. Anal., **8** (2001), 33–96.

[12] C. Mitschi, D.Sauzin, Divergent Series, Summability and Resurgence I, Springer (2010).

[13] D. Sauzin, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., **15**, Zürich: Eur. Math. Soc. (2009), 83–163.

[14] Y. Takei, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **34** (1998), 601627.

[15] W. Tucker, Found. Comput. Math. **2** (2002), 53117.

[16] S. Yamanaka, Regul. Chaotic Dyn. **23**, (2018), 933–947.

[17] N. T. Zung, Math. Res. Lett. **9** (2002), 217–228.

[18] 3 体問題と力学系，数学セミナー 2020 年 1 月号，日本評論社.

[19] 梅村浩，『Painleve 方程式と古典関数』，数学，(1995).