

一般超幾何関数 ${}_3F_2$ の $x = 1$ における特殊値の代数幾何的な計算

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
矢不俊文 (Toshifumi YABU)

概要

朝倉・大坪・寺杣の3氏が2016年に超幾何ファイブレーションと呼ばれる特別な曲面のモチビックコホモロジーのレギュレーターを考察することで、ある条件の下で超幾何関数 ${}_3F_2$ の $x = 1$ における特殊値が対数の有限和で表せることを示した。本講演では、この研究方法を精密化させることで、超幾何関数 ${}_3F_2$ の $x = 1$ における特殊値を明示的に求める手法が得られたので紹介する。

1 導入

(一般) 超幾何関数 ${}_{p+1}F_p$ を, $a_i, b_j \in \mathbb{C}, b_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ に対して

$${}_{p+1}F_p \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_{p+1} \\ b_1, \dots, b_p \end{matrix}; x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_{p+1})_n}{(b_1)_n \cdots (b_p)_n} \frac{x^n}{n!}$$

によって定義する。ここで $(\alpha)_n = \Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)$ は Pochhammer の記号である。超幾何関数 ${}_{p+1}F_p$ の $x = 1$ における特殊値は多くの研究がなされている。その研究の一つに次の Watson の公式がある。

$$2B(a, b) {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, \frac{a+b-1}{2} \\ a+b, \frac{a+b+1}{2} \end{matrix}; 1 \right) = \psi \left(\frac{a+1}{2} \right) + \psi \left(\frac{a+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{a}{2} \right) - \psi \left(\frac{b}{2} \right)$$

ここで $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ は digamma 関数である。digamma 関数 $\psi(x)$ は対数関数の有限和の形で表せるので Watson の公式は左辺の値が対数の和の形で表せることを意味している。最近、朝倉・大坪・寺杣の3氏が Watson の拡張といえる次の定理を示した。

定理 1 ([3] Theorem2.1). a, b, q を

$$a, b, q, -q+a, -q+b, q-a-b \notin \mathbb{Z}$$

を満たす有理数とする。 $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ を有理数 x の分数部分とする。このとき a, b, q の分母と互いに素なすべての整数 s に対して

$$\{sq\} + \{s(-q+a)\} + \{s(-q+b)\} + \{s(q-a-b)\} = 2 \quad (1)$$

を満たすならば

$$2B(a, b) {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, b, q \\ a+b, q+1 \end{matrix}; 1 \right) \in \overline{\mathbb{Q}} + \overline{\mathbb{Q}} \log \overline{\mathbb{Q}}^\times \quad (2)$$

が成り立つ. ここで $\overline{\mathbb{Q}} + \overline{\mathbb{Q}} \log \overline{\mathbb{Q}}^\times$ は $1, 2\pi i$ および $\log \alpha$ ($\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$) によって生成される空間である.

$a + b \equiv 2q \pmod{\mathbb{Z}}$ のとき Watson の公式と隣接関係式から (2) がいえるだけではなく具体的な表示が得られる. 例えば $a = 1/4, b = 3/4, q = 1/2$ のときは

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \\ 1, \frac{3}{2} \end{matrix}; 1 \right) = \frac{4}{\pi} \log(1 + \sqrt{2})$$

となる. しかし $a + b \not\equiv 2q \pmod{\mathbb{Z}}$ となる (1) をみたとす (a, b, q) に対しては定理 1 から $\overline{\mathbb{Q}} + \overline{\mathbb{Q}} \log \overline{\mathbb{Q}}^\times$ に入っていることは示せるが, 具体的な表示は知られていない. 定理 1 の証明は超幾何ファイブレーションを用いる方法とフェルマー曲面を用いる方法の 2 通りあるが, [4] で前者の方法を精密化することによって具体的表示を得るための手法が得られた. この手法を用いることで例えば

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3} \\ 1, \frac{4}{3} \end{matrix}; 1 \right) = -\frac{1}{\pi} \left(\sqrt{3} \log(5 - 2\sqrt{6}) + 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}}{5} \right) \quad (3)$$

が計算できる. 本稿では (3) を具体的に計算することでこの手法を解説したい.

2 超幾何関数の代数幾何的な解釈

この章では超幾何関数の特殊値がどのようにして代数幾何的に捉えられるかを (3) の計算を例に解説する. (3) を計算するためには次の楕円曲面を考える.

$$f: X \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad f^{-1}(t) = \{y^2 = 4x^3 + 4x^2 + t^3x\} \quad (4)$$

この曲面は超幾何ファイブレーションと呼ばれる曲面の 1 つ

$$g: Y \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad g^{-1}(t) = \{y^2 = 4x^3 + 4x^2 + t_0x\} \quad (5)$$

を $t_0 = t^3$ によって変換した曲面である. 超幾何ファイブレーションについては詳しくは [2] を参照していただきたい.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & Y \\ f \downarrow & & g \downarrow \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{t \mapsto t^3} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad (6)$$

このとき

$$Z = \cup f^{-1}(\zeta_3^i), X^\circ = f^{-1}(\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\})$$

とおく. ここで ζ_3^i は 1 の三乗根である. $\gamma_t \in H_1(f^{-1}(t), \mathbb{Z})$ を $t = 0$ での消滅サイクルとしたとき, $\{\gamma_t\}_t$ の族から $[0, 1] \subset \mathbb{P}^1$ 上の Lefschetz の筒 $\Gamma_0 \in H_2(X^\circ, Z; \mathbb{Z})$ が定義できる.

$\omega_k = t^{k-1} dt \frac{dx}{y} \in \Gamma(X^\circ, \Omega_{X^\circ}^2)$ に対して $\int_{\Gamma_0} \omega_k$ を計算する. 定義から $\int_{\Gamma_0} \omega_k = \int_0^1 t^{k-1} dt \int_{\gamma_t} \frac{dx}{y}$ なので $\phi(t) = \int_{\gamma_t} \frac{dx}{y}$ を計算する. 可換図式 (6) より

$$\phi(t) = \int_{\gamma_t} \frac{dx}{y} = \int_{\gamma_t} \rho^* \left(\frac{dx}{y} \right) = \int_{\rho_* \gamma_t} \frac{dx}{y} =: \phi_0(t_0) = \phi_0(t^3)$$

なので $\phi_0(t_0)$ を計算すればいい. $\phi_0(t_0)$ の Picard–Fuchs 方程式は

$$t_0(1-t_0)\phi_0''(t_0) + (1-2t_0)\phi_0'(t_0) - \frac{3}{16}\phi_0(t_0) = 0$$

となるが, これは ${}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; t_0\right)$ の超幾何微分方程式と一致する. T_0 を $t_0 = 0$ のまわりの局所モノドロミーとすると $T_0\rho_*\gamma_t = \rho_*\gamma_t$ なので $\phi_0(t_0)$ は $t_0 = 0$ のまわりで 1 価である. よって

$$\phi_0(t_0) = c {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; t_0\right) \quad (c \in \mathbb{C})$$

と表示できる. $c = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \int_{\rho_*\gamma_t} \frac{dx}{y}$ は直接計算出来て $c = \pi i$ となるから $\phi_0(t_0) = \pi i {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; t_0\right)$.
つまり

$$\phi(t) = \pi i {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; t^3\right)$$

である. 超幾何関数の公式 (cf. [7](4.1.2))

$$\int_0^1 {}_2F_1\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}; xt\right) t^{c-1}(1-t)^{e-c-1} dt = \Gamma\left(\frac{c}{e}, \frac{e-c}{e}\right) {}_3F_2\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{e}; x\right)$$

から

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} \omega_k &= \pi i \int_0^1 t^{k-1} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; t^3\right) dt \\ &= \frac{\pi i}{3} \int_0^1 t^{\frac{k}{3}-1} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; t\right) dt \\ &= \frac{\pi i}{k} {}_3F_2\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{k}{3}; 1\right) \end{aligned}$$

となる.

3 超幾何関数の regulator による表示

この章では 2 章で考えた積分を Beilinson regulator と結び付けることで対数によって表示できることを示す. 記号は 2 章と同じものとする.

$$H_{\mathrm{dR}}^2(X^\circ)_Z := \ker[H_{\mathrm{dR}}^2(X^\circ) \rightarrow H_{\mathrm{dR}}^2(Z)]$$

とおくと, 相対ドラムコホモロジー (cf. [5]) $H_{\mathrm{dR}}^2(X^\circ, Z)$ の長完全列から全射

$$F^1 H_{\mathrm{dR}}^2(X^\circ, Z) \rightarrow F^1 H_{\mathrm{dR}}^2(X^\circ)_Z \quad (7)$$

が得られる. ここで F は Hodge フィルトレーションである. このとき $H_2(X^\circ, Z; \mathbb{Z})$ と $H_{\mathrm{dR}}^2(X^\circ, Z)$ の間の pairing

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_2(X^\circ, Z; \mathbb{Z}) \otimes H_{\mathrm{dR}}^2(X^\circ, Z) \rightarrow \mathbb{C}$$

は Beilinson regulator と次の関係がある. Beilinson regulator

$$\text{reg} : H^3_{\mathcal{M}}(X^\circ, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^3_{\mathcal{D}}(X^\circ, \mathbb{Z}(2))$$

については [6] を参照していただきたい. 本稿では

$$H^3_{\mathcal{D}}(X^\circ, \mathbb{Z}(2)) \cong \text{Ext}^1(\mathbb{Z}, H_2(X, \mathbb{Z})) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathbb{Z}, H_2(X, \mathbb{Z})/H_2(Z))$$

と

$$\text{Ext}^1(\mathbb{Z}, H_2(X, \mathbb{Z})/H_2(Z)) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(F^1 H^2_{\text{dR}}(X)_Z, \mathbb{C})/\text{Im} H_2(X, \mathbb{Z})$$

による合成

$$\text{reg} : H^3_{\mathcal{M}}(X^\circ, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(F^1 H^2_{\text{dR}}(X^\circ)_Z, \mathbb{C})/\text{Im} H_2(X^\circ, \mathbb{Z})$$

を考える. このとき次が成り立つ.

命題 2 ([4] Prop3.1, 3.2). $\omega \in F^1 H^2_{\text{dR}}(X^\circ)_Z$ の (7) による持ち上げを $\tilde{\omega} \in F^1 H^2_{\text{dR}}(X^\circ, Z)$ とおく. このときある $\xi \in H^3_{\mathcal{M}}(X^\circ, \mathbb{Z}(2))$ によって

$$\text{reg}(\xi) = \pm[\omega_0 \rightarrow \langle \Gamma, \tilde{\omega} \rangle] \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(F^1 H^2_{\text{dR}}(X^\circ)_Z, \mathbb{C})/\text{Im} H_1(X^\circ, \mathbb{Z})$$

となる.

定理 2 の ξ は容易に求めることができる $H^3_{\mathcal{M}}(X^\circ, \mathbb{Z}(2))$ の元である. 2 章の Γ_0 に対応する元は

$$\xi_0 = \left(\frac{2y - \sqrt{2}i(2x+1)}{2y + \sqrt{2}i(2x+1)}, f^{-1}(\zeta_3^i) \right) \in H^3_{\mathcal{M}}(X^\circ, \mathbb{Z}(2))$$

である. また pairing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ には 2 章で計算した積分との間に次の関係がある.

$$\langle \Gamma, \tilde{\omega} \rangle = \int_{\Gamma} \omega + c \quad (c \in \overline{\mathbb{Q}})$$

ここで $\omega \in \Gamma(X^\circ, \Omega^2_{X^\circ})$ は標準的な射

$$\Gamma(X^\circ, \Omega^2_{X^\circ}) \rightarrow H^2_{\text{dR}}(X^\circ)$$

によって $\tilde{\omega} \in H^2_{\text{dR}}(X^\circ, Z)$ に持ち上げられるとする. この式の左辺は regulator によって計算できる代数的な値, 右辺は 2 章より超幾何関数の特殊値によって表せる解析的な値となっている. $c \in \overline{\mathbb{Q}}$ を直接計算することは困難なので次のように考えることによって計算する. C を X の全ての特異ファイバーの成分との交点数が 0 となる整数係数 1-cycle とする. 今の場合は

$$C = C_1 - C_2$$

$$C_1 : x = t, y = 2t + t^2 \quad C_2 : x = \zeta_3 t, y = \zeta_3 t + \zeta_3^2 t^2$$

とおくと条件をみたす. このとき次が成り立つ.

命題 3 ([1] Thm3.12, [4] Prop3.3). $\omega_C \in H_{\text{dR}}^2(X^\circ)$ を C の cycle class とすると $\omega_C \in F^1 H_{\text{dR}}^2(X^\circ)_Z$ となる. このとき (7) による持ち上げ $\tilde{\omega}_C \in F^1 H_{\text{dR}}^2(X^\circ, Z)$ に対して

$$\langle \Gamma, \tilde{\omega}_C \rangle = \int_{\Gamma} \omega_{\text{Del}}$$

となるような $\omega_{\text{Del}} \in \mathbb{C} dt \frac{dx}{y} + \mathbb{C} t dt \frac{dx}{y} \subset \Gamma(X^\circ, \Omega_{X^\circ}^2)$ が存在する.

このとき Beilinson regulator の compatibility と $\mathbb{C}^\times$ 上の regulator は $\log$ と一致するという事実から次の可換図式がとれる.

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{M}}^3(X^\circ, \mathbb{Z}(2)) & \xrightarrow{\text{tr}_C \circ j^*} & H_{\mathcal{M}}^1(\text{Spec } \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}^\times \\ \downarrow \text{reg} & & \swarrow \log \\ \text{Hom}_{\mathbb{C}}(F^1 H_{\text{dR}}(X^\circ)_Z, \mathbb{C}) / \text{Im} H_2(X^\circ, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\omega_C^\vee} & \mathbb{C} / \mathbb{Z}(1) \end{array} \quad (8)$$

ここで $j : \coprod \tilde{C}_i \rightarrow \cup C_i \rightarrow X^\circ$ を正規化と埋め込みの合成射, また $\text{tr}_{\tilde{C}_i} : H_{\mathcal{M}}^3(\tilde{C}_i, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{\mathcal{M}}^1(\text{Spec } \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}(1))$ を $\tilde{C}_i \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ から得られる transfer 写像としたとき $\text{tr}_C = \sum n_i \text{tr}_{\tilde{C}_i}$ によって定義する. さらに $\omega_C^\vee : \text{Hom}_{\mathbb{C}}(F^1 H_{\text{dR}}(X^\circ)_Z, \mathbb{C}) / \text{Im} H_1(X^\circ, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C} / \mathbb{Z}(1)$ を $\phi \mapsto \phi(\omega_C)$ によって定義される写像とする. この可換図式と命題 2, 3 から次の公式が得られる.

定理 4 ([4] Thm3.4).

$$\log(\text{tr}_C \circ j^* \xi) = \int_{\Gamma} \omega_{\text{Del}} \in \mathbb{C} / \mathbb{Z}(1) \quad (9)$$

4 (3) の計算

定理 4 から (3) を求める. $\Gamma = \Gamma_0$ を (9) に代入すると

$$\log(\text{tr}_C \circ j^* \xi) = \int_{\Gamma_0} c_1 dt \frac{dx}{y} + c_2 t dt \frac{dx}{y} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}) \quad (10)$$

である. まず (10) の左辺から計算すると,

$$\begin{aligned} ((10) \text{ の左辺}) &= \log \left(\frac{2y - \sqrt{2}i(2x+1)}{2y + \sqrt{2}i(2x+1)} \Big|_{C_1 \cap f^{-1}(1)} \right) \left(\frac{2y - \sqrt{2}i(2x+1)}{2y + \sqrt{2}i(2x+1)} \Big|_{C_2 \cap f^{-1}(1)} \right)^{-1} \\ &= \log \left(\frac{6 - 3\sqrt{2}i}{6 + 3\sqrt{2}i} \right) \left(\frac{2(2\zeta_3 + \zeta_3^2) - \sqrt{2}i(2\zeta_3 + 1)}{2(2\zeta_3 + \zeta_3^2) + \sqrt{2}i(2\zeta_3 + 1)} \right)^{-1} \\ &= \log \left(\frac{(5 - \sqrt{2}i)(3 + \sqrt{6})}{9} \right) \end{aligned}$$

となる. 本稿では $\log(x)$ は主値

$$\log(x) = \log|x| + \arg(x)i \quad (-\pi < \arg(x) \leq \pi).$$

を表す. 右辺を計算すると

$$\begin{aligned} ((10) \text{ の右辺}) &= c_1 \int_0^1 dt \int_{\gamma_t} \frac{dx}{y} + c_2 \int_0^1 dt \int_{\gamma_t} \frac{dx}{y} \\ &= \pi i \left(c_{13} F_2 \left(\frac{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{k}{3}}{1, \frac{k}{3} + 1}; 1 \right) + \frac{c_2}{2} {}_3F_2 \left(\frac{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{k}{3}}{1, \frac{k}{3} + 1}; 1 \right) \right) \end{aligned}$$

となるため

$$\log \left(\frac{(5 - \sqrt{2}i)(3 + \sqrt{6})}{9} \right) + 2\pi i d_1 = \pi i \left(c_{13} F_2 \left(\frac{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}}{1, \frac{4}{3}}; 1 \right) + \frac{c_2}{2} {}_3F_2 \left(\frac{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}}{1, \frac{5}{3}}; 1 \right) \right) \quad (d_1 \in \mathbb{Z}) \quad (11)$$

c_1, c_2 を特定するために次の積分を計算する. $\sigma: X \rightarrow X$ を $\sigma(x, y, t) = (x, y, \zeta_3 t)$ によって定義する. $\Gamma = \sigma\Gamma_0$ を (9) に代入すると,

$$\log(\text{tr}_C \circ j^* \sigma \xi) = \int_{\sigma\Gamma_0} c_1 dt \frac{dx}{y} + c_2 t dt \frac{dx}{y} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}) \quad (12)$$

となる. (10) と同様に計算すると

$$\log(5 - 2\sqrt{6}) + 2\pi i d_2 = \pi i \left(c_{13} \zeta_3 F_2 \left(\frac{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}}{1, \frac{4}{3}}; 1 \right) + \frac{c_2 \zeta_3^2}{2} {}_3F_2 \left(\frac{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}}{1, \frac{5}{3}}; 1 \right) \right) \quad (d_2 \in \mathbb{Z}) \quad (13)$$

また $\delta_t \in H_1(f^{-1}(t), \mathbb{Z})$ を $t = 1$ での消滅サイクルとして, $\{\delta_t\}_t$ の族から $[0, 1]$ 上の lefschetz の筒 $\Delta \in H_2(X^\circ, f^{-1}(0), \mathbb{Z})$ を構成すると $(1 - \sigma)\Delta, (1 - \sigma^2)\Delta \in H_2(X^\circ, \mathbb{Z})$ となる. このとき

$$\int_{(1-\sigma)\Delta} \omega_{\text{Del}}, \int_{(1-\sigma^2)\Delta} \omega_{\text{Del}} \in \mathbb{Z}(1) \quad (14)$$

となるから計算すると,

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} c_1 (1 - \zeta) \pi + \frac{8\sqrt{3}}{15} c_2 (1 - \zeta^2) \pi \in 2\pi i \mathbb{Z} \quad (15)$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} c_1 (1 - \zeta^2) \pi + \frac{8\sqrt{3}}{15} c_2 (1 - \zeta) \pi \in 2\pi i \mathbb{Z} \quad (16)$$

(11), (13), (15), (16) から

$$c_1 = \frac{i\zeta^2}{2\sqrt{3}}, \quad c_2 = \frac{5i\zeta}{4\sqrt{3}}$$

となるため (3) と

$${}_3F_2 \left(\frac{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}}{1, \frac{5}{3}}; 1 \right) = -\frac{4}{5\pi} \left(\sqrt{3} \log(5 - 2\sqrt{6}) - 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}}{5} \right)$$

が計算できる.

5 他の具体例

(3) の計算と同じ手法でいくつかの他の超幾何関数の $x = 1$ における特殊値が計算できる．現在計算できている例を列挙する．

例 1.

$$f : X \rightarrow \mathbb{P}^1, f^{-1}(t) = \{y^2 = 2x^3 + 9x^2 + 12t^2x + 4t^4\}$$

から

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \\ 1, \frac{3}{2} \end{matrix}; 1\right) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \log 2$$

が計算できる．この式は Watson の公式からも導き出せる．

例 2.

$$f : X \rightarrow \mathbb{P}^1, f^{-1}(t) = \{y^2 = 4x^3 + 4x^2 + t^2x\}$$

から

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \\ 1, \frac{3}{2} \end{matrix}; 1\right) = \frac{4}{\pi} \log(1 + \sqrt{2})$$

が計算できる．この式も Watson の公式からも導き出せる．

例 3.

$$f : X \rightarrow \mathbb{P}^1, f^{-1}(t) = \{y^2 = 2x^3 - 3x^2 + t^l\}$$

から

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{l}{k} \\ 1, \frac{l}{k} + 1 \end{matrix}; 1\right)$$

($k = 2, 3, 4, 5, l \in \{1, \dots, k\}$) が計算できる．

$k = 2$ のとき

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2} \\ 1, \frac{3}{2} \end{matrix}; 1\right) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \log(2 + \sqrt{3})$$

となる．この式も Watson の公式からも導き出せる． $k = 3$ のとき

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3} \\ 1, \frac{4}{3} \end{matrix}; 1\right) = \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2\pi} A - \frac{\sqrt[3]{2}}{\pi} B,$$

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3} \\ 1, \frac{5}{3} \end{matrix}; 1\right) = \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{3\pi} A + \frac{2\sqrt[3]{4}}{3\pi} B$$

ここで

$$A := \log\left((1 - 2^{-\frac{2}{3}})^2 + (1 + 2^{-\frac{2}{3}}\sqrt{3})^2\right) - \log\left((1 - 2^{-\frac{2}{3}})^2 + (1 - 2^{-\frac{2}{3}}\sqrt{3})^2\right),$$

$$B := \text{Tan}^{-1} \left(\frac{3}{3 + \sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}} \right).$$

である. $k = 4$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{12^{3/4}} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{4} \\ 1, \frac{5}{4} \end{matrix}; 1 \right) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{3^{5/4} - 3^{3/4} + \sqrt{2}}{3^{5/4} - 3^{3/4} - \sqrt{2}} \right) - \text{Cos}^{-1} \left(\frac{3^{5/4} + 3^{3/4}}{2\sqrt{5 + 3\sqrt{3}}} \right), \\ \frac{7\sqrt{3}}{9} \frac{2\pi}{12^{3/4}} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4} \\ 1, \frac{7}{4} \end{matrix}; 1 \right) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{3^{5/4} - 3^{3/4} + \sqrt{2}}{3^{5/4} - 3^{3/4} - \sqrt{2}} \right) + \text{Cos}^{-1} \left(\frac{3^{5/4} + 3^{3/4}}{2\sqrt{5 + 3\sqrt{3}}} \right). \end{aligned}$$

$k = 5$ のとき $\zeta = e^{2\pi i/5}$, $\zeta_{20} = e^{2\pi i/20}$, $\alpha = 1/\sqrt[10]{24} > 0$ として

$$e_j := \frac{\sqrt{2}\alpha^3\zeta_{20}^3\zeta^j + \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha^{-3}\zeta_{20}^{-3}\zeta^j - \sqrt{3}(\alpha^2\zeta_{20}^2\zeta^j - 1)}{\sqrt{2}\alpha^3\zeta_{20}^3\zeta^j + \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha^{-3}\zeta_{20}^{-3}\zeta^j + \sqrt{3}(\alpha^2\zeta_{20}^2\zeta^j - 1)}$$

,

$$A_k := \frac{\Gamma(k/5 + 1/6)\Gamma(k/5 + 5/6)}{\Gamma(k/5)^2},$$

$$f_k := \frac{2\pi A_k}{k} \cdot {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{k}{5} \\ 1, 1 + \frac{k}{5} \end{matrix}; 1 \right), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

とおくと

$$\frac{5}{\zeta^{2k} - 1} f_k = (\zeta^{2k} - 1) \log e_0 + (\zeta^{2k} - \zeta^{3k}) \log e_1 + (\zeta^{2k} - \zeta^k) \log e_2 + (\zeta^{2k} - \zeta^{4k}) \log e_3 + 4\pi i \zeta^{2k}$$

となる.

参考文献

- [1] M. Asakura, *A formula for Beilinson's regulator map on K_1 of a fibration of curves having a totally degenerate semistable fiber*, preprint, arXiv:1310.2810.
- [2] M. Asakura, N. Otsubo, *CM periods, CM regulators and hypergeometric functions, I*, *Canad. J. Math.* 70 (2018), 481-514.
- [3] M. Asakura, N. Otsubo, T. Terasoma, *An algebro-geometric study of special values of hypergeometric functions ${}_3F_2$* , *Nagoya Math. J.*, 2016.
- [4] M. Asakura, T. Yabu, *Explicit logarithmic formulas of special values of hypergeometric functions ${}_3F_2$* , preprint, arXiv:1906.02878
- [5] P. Deligne, *Théorie de Hodge III*, *Publ. Math. IHES* 44 (1974), 5-77.
- [6] P. Schneider, *Introduction to the Beilinson conjectures*, In *Beilinson's Conjectures on Special Values of L-functions* (M. Rapoport, N. Schappacher and P. Schneider, ed), *Perspectives in Math. Vol.4*, 1-35, 1988.
- [7] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*, *Cambridge Univ. Press, Cambridge* 1966.