

Non-i.i.d. random dynamical systems of rational maps

京都大学大学院人間・環境学研究科

渡邊天鵬 ^{*}(Takayuki WATANABE)

概要

複素一変数有理関数を繰り返し反復合成するときの力学系は古くから研究され、数理・代数・幾何・解析の観点から非常に深い理論が構築されている。これのランダム版を数学的に取り扱うことが本稿の主題である。ランダム版とは、一つだけでなく複数の有理関数の中からランダムに写像を選択したときの（離散時間）ランダム力学系を意味する。決定論的力学系とは異なる現象がランダムの場合に起こる事を、筆者による一般的な設定のもとで概説する。特に、ジェネリックなランダム力学系は平均して安定的であるか、または相空間全体でカオス的になることを紹介する。

1 導入

「力学系の研究の主な目標は、時間と共に決定論的な法則に従って状態が変化していくような系において、その状態の長期にわたる挙動を理解することである。」([Rob] p.1 より引用.) このような系は、数学の各分野を含むあらゆる科学分野において遍く存在する、極めて重要な研究対象である。本稿で扱うのはリーマン球面上の離散時間力学系とそのランダム版であるが、まずはその動機について歴史を追って紹介する。

生物の個体数をモデル化した式として $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ という漸化式が知られている。ここで、 x_n はある時刻 $n \geq 0$ における個体数、 μ はパラメータである。例えば μ が 3.3 程度のときは、ほとんどの初期値 $x_0 \in (0, 1)$ に対してその軌道 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ はある周期 2 の軌道に収束する。その一方で、パラメータ μ の値によっては、初期値 x_0 の小さな摂動に対して軌道が全く異なってしまう、系の時間発展が原理的に予測不可能であることが観測・証明された。この振る舞いは当時の科学者に新鮮な衝撃を与え様々な論争を巻き起こした。数学においては二十世紀中頃に「カオス」と命名され、今日に到るまで深く研究されている。（しかし、カオスの厳密で統一的な定義については未だ議論がある。）これらの詳細は [Rob] を参照されたい。

前述の例は二次関数 $f(x) = \mu x(1 - x)$ により $x_{n+1} = f(x_n)$ と表される。その軌道 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $x_n = f \circ \cdots \circ f(x_0) =: f^n(x_0)$ のように、 f の反復合成 f^n を用いて定義される。しかし、関数 f の代数的な単純さは点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の単純さを導かない。むしろ、非常に複雑な振る舞いを導きうるわけである。この複雑さは f の非線形性に由来し、二次関数の繰り返しという一見簡単な行為でさえ今なお最先端の研究対象である。

^{*} E-mail: watanabe.takayuki.43c@st.kyoto-u.ac.jp

二次関数，より一般に多項式や有理関数を考察する上で，変数を複素化することは代数的に自然であり，かつ複素関数論的な利点をもたらす．これが複素解析的な写像の力学系を考える重要な動機である．複素力学系と呼ばれるこの分野は独自の発展を遂げ，いくつかの未解決問題を残しつつも美しい理論が構築されてきた [Miln]．その過程で実力学系への応用はもちろん，タイヒミュラー理論を通して複素関数論や双曲三次元多様体論，幾何学的群論などに関係することが発見されてきた．

洗練された複素力学系の理論を念頭において，次のような問題を考える：パラメータ μ に依存する写像族 f_μ と初期点 z_0 に対して，ランダムに $\mu_1, \mu_2, \dots$ を選択したときのランダム軌道 $f_{\mu_n} \circ \dots \circ f_{\mu_2} \circ f_{\mu_1}(z_0)$ はどのような振る舞いをするか．本稿ではこれをランダム力学系と呼ぶ．

ランダム力学系の研究は近年急速に発展しており，決定論的な力学系とは異なる振る舞いが生じることが数値実験により観測されたり，数学的に証明されたりしている．このような事象をランダム性誘起現象という．複素解析的な写像のランダム性誘起現象については，[FS, S1, S2, S3]などを参照．また，純粋数学としての興味に留まらず，ランダム力学系の研究はランダム項を含む数理モデルの解析へ応用されている．生物の個体数モデルに例えると，ランダムに環境が変化するときの時間発展を考察することがランダム力学系に相当する．

これまで研究されているランダム力学系の多くは独立同分布か，そうでなければ非常に一般的かつ抽象的な系を考えている．上にあげた文献 [FS, S1, S2, S3] は全て，写像を独立同分布に選ぶ系を研究している．そこで，もう少し柔軟で具体的な系を考察することが応用数学に貢献するのではないかと筆者は考えている．

以上のように，ランダムに複素解析的な写像を選択する力学系は自然かつ重要な研究対象であろう．純粋および応用数学の観点から，写像の選び方が独立同分布でないようなランダム複素力学系は大変興味深いと筆者は考えている．そこで，筆者らは写像の選び方がマルコフ的規則を満たすような力学系を導入した [SW1]．本稿ではそのジェネリックな性質を考察する [SW2]．

本論の前に本稿の構成を述べよう．2章で反復合成の決定論的な複素力学系について，古典的に知られている理論の一部を紹介する．その後3章でマルコフ的なランダム力学系を定義する．そのような力学系において，二種類のランダム性誘起現象が生じうることを述べる．さらに，この二種類がランダム力学系全体の空間において，適切な位相の元で稠密に存在していることを主結果として述べる．

2 反復合成の複素力学系：不変なファトゥ成分の分類 タクソノミー

リーマン球面を $\hat{\mathbb{C}}$ で表す．これは複素平面 $\mathbb{C}$ の一点コンパクト化から作られる種数 0 のリーマン面であり，複素 1 次元射影空間と等角同形である．また，位相的には実 2 次元球面と微分同相であり，そこから誘導される距離 d により距離空間となる．

さて， $\hat{\mathbb{C}}$ から自身への正則写像 $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を考える．球面のコンパクト性により， f は有理関数 $p(z)/q(z)$ であることがわかる．ここで， $p(z), q(z)$ は多項式であり，その次数の最大値を f の次数と定義する．次数 2 以上の正則写像全体の空間を Rat とし，距離を $\kappa(f, g) := \sup_{z \in \hat{\mathbb{C}}} d(f(z), g(z))$ により定める．すなわち， Rat 上に（局所）一様収束から定まる位相を考える．

本章では $f \in \text{Rat}$ を一つ固定し，その反復合成の力学系を考える．詳しくは [Miln]などを参照されたい．

Definition 2.1. ある近傍 U が存在して写像族 $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が U 上で同程度連続であるような点 $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ の集合を $F(f)$ と書き, f のファトウ集合と呼ぶ.

Example 2.2. 二次多項式の族 $f_c(z) = z^2 + c$ を考える. パラメータ $c = 0$ のとき, $F(f_0)$ は単位円の内部と外部の和集合である. しかし一般に, $\widehat{\mathbb{C}} \setminus F(f_c)$ は驚くべきほど複雑な, フラクタルと呼ばれる形状をしいる. 次頁の図はその一例であり, 白色の部分がファトウ集合 $F(f_c)$, 色のついた部分が補集合である.

ここで, 写像族 $\mathcal{F}$ が U 上同程度連続であるとは, 任意の $z_0 \in U$ と $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して, z_0 との距離が δ 未満の任意の w_0 と任意の $g \in \mathcal{F}$ に対して $d(g(z_0), g(w_0)) < \epsilon$ となることをいう. 力学系の文脈で言えば, 写像 f のファトウ集合 $F(f)$ とは, 初期点の摂動に対して軌道のずれが一様に小さいような安定的初期点の集合である. 逆に, $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$ は初期値鋭敏性を持つという. これはカオス的現象の一つの特徴とされる. 詳しくは後述するが, この性質は「指数関数的な拡大」を導く (Theorem 2.8).

同程度連続性は複素関数論において別の言葉で表現でき, モンテルの定理をはじめとする強力な解析手法を適用できる. 次の命題はアスコリ・アルツェラの定理から直ちに従う.

Proposition 2.3. $\widehat{\mathbb{C}}$ への正則写像族 $\mathcal{F}$ が領域 U 上で同程度連続であることは, $\mathcal{F}$ が U 上正規族であることと同値である. ここで, $\mathcal{F}$ が U 上正規族であるとは, 任意の写像列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ に対してある部分列が存在して, それが U 上で局所一様収束することをいう.

安定的な初期値の集合 $F(f)$, あるいはその補集合を調べたい. これは十九世紀後半からファトウやジュリアらにより研究され, 多くの基本的な結果が知られている. 例えば, 位相的な議論により, カオス的な初期値の集合 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$ は常に非空であることがわかる. 以下ではより詳細な内容について述べる.

Proposition 2.4. $z \in F(f)$ なら $f(z) \in F(f)$ であり, 逆も成り立つ. したがって, f の力学系は $F(f)$ とその補集合に完全に分かれる.

Definition 2.5. $f^p(z) = z$ なる z を周期点という. また, これを満たす最小の $p \geq 1$ を周期点 z の周期という. このような周期点 z に対して, 複素微分の値 $\lambda = (f^p)'(z)$ を乗数という. 乗数の絶対値 $|\lambda|$ がそれぞれ $< 1, > 1$ のとき, 周期点 z は吸引的, 反発的という.

Proposition 2.6. 有理写像 f の反発的周期点全体の集合は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$ 内で稠密に存在する.

より強く, 力学系的に定義される確率測度 μ_f に対して, 反発的周期点は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$ 内に「同程度に分布」していることが知られている [L]. この測度 μ_f はエルゴード的であり, その台は $\widehat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$ と一致しており, かつ f に関して最大エントロピーを与える. 唯一つ存在するこの確率測度をリュービッチ測度と呼ぶ.

Corollary 2.7. ファトウ集合 $F(f)$ が空になるような f が存在する. 実際, 複素トーラス $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Lambda$ 上の 2 倍写像から, 分岐を持つ正則な二葉被覆写像 $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ を通してそのような例が構成できる.

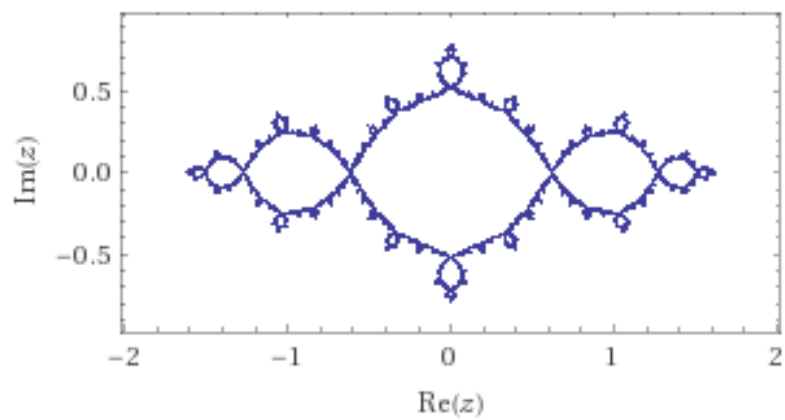


图 1 $c = -1$

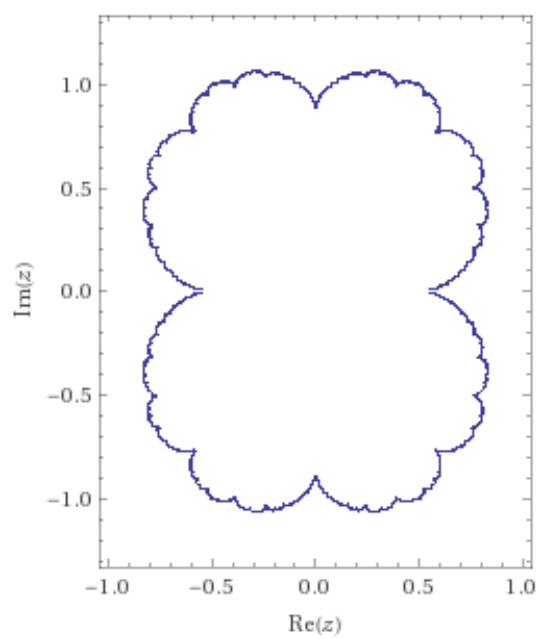


图 2 $c = 1/4$

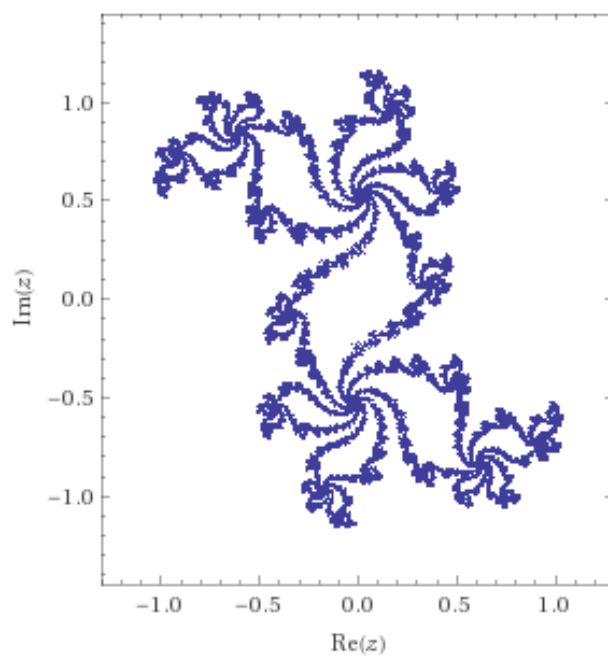


图 3 $c = 0.3 + 0.5i$

Theorem 2.8 ([Mañé]). 定数 $\alpha > 0$ が存在して、リュービッチ測度 μ_f に関するほとんど全ての z に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D(f^n)(z)\| \geq \alpha$$

が成り立つ。ここで、写像 g に対して z における微分写像を $Dg(z)$ とし、球面計量に関するノルムを $\|Dg(z)\|$ と記す。

Theorem 2.8 の不等式の左辺で定義される量をリャプノフ指数という。ファトウ集合の外における、無限小レベルでの初期値のズレが時間発展とともに指数関数的に拡大されることを意味する。

このように、ファトウ集合の外では初期値の摂動に関し不安定であり、カオス的な振る舞いをしていと考えられる。それではファトウ集合上ではどのような力学系が起こるだろうか。以下の二定理により、その振る舞いはほぼ完全に予測できる。ファトウ集合の連結成分 U をファトウ成分とよぶことにすると、 f の U への制限は別のファトウ成分への正則分岐被覆であることに注意する。

Theorem 2.9 ([Sullivan]). 任意のファトウ成分 U_0 に対して、ある $k \in \mathbb{N}$ と $p \in \mathbb{N}$ が存在して、ファトウ成分 $U = f^k(U_0)$ は f^p により U 自身に写される。 p を U の周期と呼ぶ。

Theorem 2.10. 周期 p の周期的なファトウ成分 U は以下のいずれか一つを満たす。

- (吸引的) f^p の吸引的固定点 $a \in U$ が存在して、任意の $z \in U$ に対し $\{f^{kp}(z)\}_{k \in \mathbb{N}}$ は $k \rightarrow \infty$ で a に収束する。
- (発散的) f^p の固定点 $b \in \partial U$ が存在して、任意の $z \in U$ に対し $\{f^{kp}(z)\}_{k \in \mathbb{N}}$ は $k \rightarrow \infty$ で b に収束する。
- (回転的) 原点中心の開円板（またはアニュラス） $D \subset \mathbb{C}$ と双正則写像 $\phi: U \rightarrow D$ が存在して、任意の $z \in U$ に対して $\phi \circ f(z) = \lambda \phi(z)$ となる。 λ は 1 の冪根でない、絶対値 1 の複素数である。

図 1 は中央に周期 2 の吸引的なファトウ成分を持ち、軌道は周期点 $a = 0$ に吸引される。図 2 は中央に周期 1 の発散的なファトウ成分を持ち、軌道は境界上の固定点 $b = 1/2$ に収束する。なお、回転的なファトウ成分を持つ有理関数の存在は非自明だが、2 次多項式について次が知られている。

Example 2.11. 族 $f_\xi(z) = z^2 + e^{2\pi i \xi} z$ について、ルベーグ測度に関するほとんど全ての $\xi \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対して f_ξ は固定点 $z = 0$ の近傍で回転的なファトウ成分を持つ。図 4 は $\xi = \sqrt[3]{1/4}$ のとき。

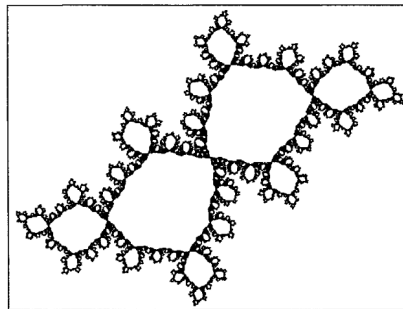


図 4 [Miln] p.127 より引用。中央やや左下の大きな単連結領域が回転的成分である。

3 主結果：ランダム複素力学系の二分律 ダイコトミー

本章で [SW1] の意味でのランダム力学系を定義し, [SW2] に基づいて主結果を述べる.

Definition 3.1. ある $m \in \mathbb{N}$ と Rat 上の非負測度 $\tau_{ij} (i, j = 1, \dots, m)$ の組み $\tau = (\tau_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ がマルコフ的ランダム力学系であるとは, 任意の $i = 1, \dots, m$ に対して $\sum_{j=1}^m \tau_{ij}(\text{Rat}) = 1$ を満たすことをいう.

与えられた $\tau = (\tau_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ に対して $\hat{\mathbb{C}} \times \{1, \dots, m\}$ 上のマルコフ過程で, 点 (z, i) から $B \times \{j\}$ の形のボレル集合への遷移確率が $\tau_{ij}(\{f \in \text{Rat} : f(z) \in B\})$ であるようなものを考えたい. この過程は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の次のような過程を誘導する. 初期点 z_0 に対し, 適当な確率で $i_0 = 1, \dots, m$ を選択する. その後, 上述のマルコフ過程にしたがい時刻 n の点 $(z_n, i_n) \in \hat{\mathbb{C}} \times \{1, \dots, m\}$ が, そして $\hat{\mathbb{C}}$ 上の点列 $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が確率的に定まる.

Example 3.2. もし $m = 1$ ならば, このマルコフ過程は $\tau = \tau_{11}$ に従う独立同分布の確率過程に由来するランダム力学系である. つまり, マルコフ的ランダム力学系は独立同分布ランダム力学系を包含している. 加えて τ_{11} が写像 f に重みを持つディラック測度であるとき, この系は f を反復合成する決定論的な力学系と等価である.

Notation 3.3. マルコフ的ランダム力学系 $\tau = (\tau_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ に対して, $V = \{1, \dots, m\}$ を頂点集合, $E = \{(i, j) \in V \times V : \tau_{ij}(\text{Rat}) > 0\}$ を有向辺の集合とする有向グラフを考える. ただし, $e = (i, j) \in E$ の始点は i , 終点は j であり, それぞれ $i(e), t(e)$ とも書く. 有向辺 $e = (i, j) \in E$ に対し, τ_{ij} を τ_e とも記す.

本稿ではある意味で既約かつ有界ノイズの系を取り扱う. 厳密には次で定義される空間を考える.

Definition 3.4. 以下を満たすマルコフ的ランダム力学系 τ 全体の集合を MRDS と書く

- 有向グラフ (V, E) が強連結, すなわち, 任意の $(i, t) \in V \times V$ に対して有限個の有向辺 $e_1, \dots, e_N \in E$ が存在して $i = i(e_1), t(e_n) = i(e_{n+1}), (n = 1, \dots, N-1), t(e_N) = t$.
- 任意の $e \in E$ に対して, 付属する測度の台 (の閉包) $\text{supp } \tau_e$ が Rat でコンパクトである.

また, MRDS の位相として, 点列 $\{\tau^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が τ に収束することを以下の三条件が成り立つことにより定める.

- 充分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対して τ^n の有向グラフが τ のそれ (V, E) と一致する.
- 任意の $e \in E$ に対して, 付属する測度 τ_e^n が τ_e に弱収束する.
- 任意の $e \in E$ に対して, 付属する測度の台 $\text{supp } \tau_e^n$ が $\text{supp } \tau_e$ にハウスドルフ距離に関して収束する.

ここでハウスドルフ距離とは, Rat の空でないコンパクト集合全体の集合上で定義される, Rat の距離から自然に定まる距離である.

以下で、 $\tau \in \text{MRDS}$ に対していくつかの概念、特にファトウ集合を定義する。これは単一の有理写像を反復合成する力学系におけるファトウ集合の自然な一般化である。そして、 MRDS の部分集合 $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ を定義し、各々について簡単な性質や注意を述べる。

Definition 3.5. 列 $(f_n, e_n)_{n=1}^N \in (\text{Rat} \times E)^N$ が許容語であるとは、任意の $n = 1, \dots, N-1$ に対し $t(e_n) = i(e_{n+1})$ かつ、任意の $n = 1, \dots, N$ に対し $f_n \in \text{supp } \tau_{e_n}$ となることをいう。また、各 $i, j \in V$ に対し $H_i^j(S_\tau) := \{f_N \circ \dots \circ f_1 : \exists N \in \mathbb{N}, \exists \text{ 許容語 } (f_n, e_n)_{n=1}^N, \text{ s.t. } i(e_1) = i, t(e_N) = j\}$ と定義する。各 $i \in V$ に対して、ある近傍 U が存在して写像族 $\bigcup_{j \in V} H_i^j(S_\tau)$ が U 上で同程度連続であるような点 $z \in \hat{\mathbb{C}}$ の集合を $F_i(S_\tau)$ と書き、 τ の $i \in V$ におけるファトウ集合と呼ぶ。

Definition 3.6. 各 $i \in V$ に空でないコンパクト集合 $L_i \subset \hat{\mathbb{C}}$ が対応する族 $(L_i)_{i \in V}$ を考える。 $(L_i)_{i \in V}$ が極小集合であるとは、任意の $z \in L_i$ と $j \in V$ に対して $L_j = \overline{\bigcup_{h \in H_i^j(S_\tau)} \{h(z)\}}$ となることをいう。

Definition 3.7. 極小集合 $(L_i)_{i \in V}$ が吸引的であるとは、任意の $i \in V$ に対して $L_i \subset F_i(S_\tau)$ であって次が成り立つことをいう。定数 $0 < c < 1$ と $N \in \mathbb{N}$ が存在して、 L_i と交わる $F_i(S_\tau)$ の任意の連結成分 U 上の任意の二点 p, q と任意の許容語 $(f_n, e_n)_{n=1}^N \in (\text{Rat} \times E)^N$ に対して、

$$d(f_N \circ \dots \circ f_1(p), f_N \circ \dots \circ f_1(q)) \leq c d(p, q).$$

さらに、全ての極小集合が吸引的であるような τ 全体の集合を $\mathcal{A} \subset \text{MRDS}$ と定める。

Definition 3.8. ファトウ集合 $F_i(S_\tau)$ が任意の $i \in V$ で空でありかつ $(\hat{\mathbb{C}})_{i \in V}$ が極小であるような τ 全体の集合を $\mathcal{C} \subset \text{MRDS}$ と定める。

Proposition 3.9. マルコフ的ランダム力学系を $\tau \in \mathcal{A}$ とする。このとき、ある $\alpha < 0$ が存在して、任意の $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D(f_n \circ \dots \circ f_1)(z)\| \leq \alpha$ がほとんど全ての許容語 $(f_n, e_n)_{n=1}^\infty \in (\text{Rat} \times E)^\mathbb{N}$ に対して成立する。

反復合成の力学系で $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ に対応する集合は空集合であり、その意味でこれらはランダム性誘起現象である。実際 $\mathcal{A}$ について、Theorem 2.8 と Proposition 3.9 により、リャプノフ指数の正負で決定論の場合とランダムの場合とで力学系の性質が異なる。また $\mathcal{C}$ について、決定論的な力学系においては各周期軌道が極小だが、それらは無限個存在する。特に、決定論的な力学系において $\hat{\mathbb{C}}$ が極小になることはない。

さて、本稿の主結果を述べる。粗く言えば、ジェネリックなマルコフ的ランダム力学系 τ は $\mathcal{A}$ か $\mathcal{C}$ のいずれか一方に属する。また、多項式写像に制限すればジェネリックな τ は $\mathcal{A}$ に属する。

Main Result A. 集合 $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$ は空間 MRDS 内で稠密である。また、 $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ はそれぞれ空集合でなく、 $\mathcal{A}$ は開集合である。

Corollary 3.10. 多項式写像のランダム力学系全体の空間

$$\text{PMRDS} := \{\tau \in \text{MRDS} : \text{supp } \tau_e \text{ は任意の } e \in E \text{ に対して多項式写像のみからなる}\}$$

において、 $\mathcal{C} \cap \text{PMRDS} = \emptyset$ である。特に、 $\mathcal{A} \cap \text{PMRDS}$ は稠密である。

主結果の証明の鍵は、2 章で述べた古典的な複素力学系の理論 (Theorem 2.10) を、ランダムな設定に拡張した次の補題である.

Lemma 3.11. マルコフ的ランダム力学系 $\tau \in \text{MRDS}$ の極小集合 $(L_i)_{i \in V}$ は次のいずれかを満たす.

- $(L_i)_{i \in V}$ は吸引的である.
- ある $i \in V$ に対して $L_i \not\subset F_i(S_\tau)$ となる.
- 任意の $j \in V$ に対して $L_j \subset F_j(S_\tau)$, かつある $i \in V$ に対して $h \in H_i^i(S_\tau)$ と $F_i(S_\tau)$ の連結成分 D が存在して次を満たす. h は $h(D) \subset D$ であり制限 $h|_D$ は無理数回転写像 (の一部) と等角写像により共役かつ $L_i \cap D \neq \emptyset$ となる.

決定論的な力学系の理論を基礎としながらも、特有の興味深い現象が数多く存在する点がランダム力学系研究の醍醐味である.

参考文献

- [FS] John Fornaess and Nessim Sibony, Random iterations of rational functions. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 11 (1991), 687-708.
- [L] M. Ljubich, Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* (1983), 3, 351-385.
- [Mañé] R. Mañé, The Hausdorff dimension of invariant probabilities of rational maps, *Dynamical Systems (Valparaiso, 1986)* (Lecture Notes in Mathematics vol 1331) (Berlin: Springer) 86-117, 1988.
- [Miln] John Milnor, Dynamics in one complex variable, third edition. *Annals of Mathematical Studies*. 160, Princeton University Press, 2006.
- [Rob] C. ロビンソン著 國府・柴山・岡訳, 『力学系 上』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2001.
- [Sullivan] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I : Solutions of the Fatou-Julia problem on wandering domains, *Ann. Math.* 122 (1985), 401-418.
- [S1] Hiroki Sumi, Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 102 (2011), no. 1, 50-112.
- [S2] Hiroki Sumi, Cooperation principle, stability and bifurcation in random complex dynamics. *Adv. Math.* 245 (2013), 137-181.
- [S3] Hiroki Sumi, Negativity of Lyapunov Exponents and Convergence of Generic Random Polynomial Dynamical Systems and Random Relaxed Newton's Methods, preprint, <https://arxiv.org/abs/1608.05230>.
- [SW1] H. Sumi and T. Watanabe, Non-i.i.d. random holomorphic dynamical systems and the probability of tending to infinity. *Nonlinearity* 32 (2019) No. 10, 3742-3771.
- [SW2] H. Sumi and T. Watanabe, Non-i.i.d. random holomorphic dynamical systems and the generic properties. in preparation.