

Brauer-friendly 加群の slash 直既約性について

東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻

渡辺 将一 (Nobukatsu WATANABE)

概要

本研究では, Ishioka-Kunugi により与えられた Scott 加群に対する Brauer 直既約性の同値条件を Brauer-friendly 加群に対する slash 直既約性の同値条件へと一般化する。

1 モチベーション

まず, 有限群の表現論とは何かを一言で言えば, 「与えられた有限群の性質とその表現の関係性を調べる分野」である。モジュラー表現論とは, 考えている表現の係数体の標数が考えている有限群の位数を割り切る場合をいう。なぜこの設定の場合を区別するかというと, 係数体の標数が 0 や有限群の位数と互いに素の場合 (このような場合の表現を通常表現という) は Maschke の定理より, すべての表現が半単純表現 (つまり, 単純表現のいくつかの直和) と同値になるので比較的よくわかっているためである。1935 年頃から R. Brauer により有限体や環上の表現などが本格的に研究され始める。その頃から現在までの有限群のモジュラー表現論における一つの大きな指針 (哲学) を標語的に言えば「与えられた有限群の標数 p の体上の表現は, その p -局所部分群の表現により統制されているのではないか?」という有限群のモジュラー表現論における局所-大域原理のようなものがある。ここで, p -局所部分群とは p -部分群の正規化群や中心化群のことをいう。この思想を意識しながら有限群のモジュラー表現論を勉強すると, いくつもの定理や命題のモチベーションが自然にわかるようになる。有限群の表現論では与えられた表現を加群論的手法により研究することがあり, 本研究でも加群論的に表現を調べる。ここで加群論的手法とは, 有限群 G の可換環 R 上の加群 V に関するある表現 $G \rightarrow GL(V)$ が与えられることと, RG -加群 V が与えられることは同値なことなので, 表現を加群を用いて調べる研究方針のことである。ここで, $RG := \{\sum_{g \in G} \lambda_g g \mid \lambda_g \in R, g \in G\}$ とは群の積を線形に拡張した積を定義した R -多元環で, 可換環 R と有限群 G に関する群環である。群環やそれ上の加群の構造には, 群環の係数体や有限群やそれ自身の多元環としての構造が絡み, 群, 環, 体のすべてが絡むとても興味深い対象である。

これから, いくつかの用語を定義していく。以下, 任意の環上の加群は特に断らない限り有限生成な左加群とし, $\mathcal{O}$ を完備離散付値環でその唯一の極大イデアル $J(\mathcal{O})$ による剰余体 $k := \mathcal{O}/J(\mathcal{O})$ が標数 $p > 0$ の代数的閉体であるものを一つ固定する。これによる自然な全射 $\mathcal{O}G \twoheadrightarrow kG$ の $x \in \mathcal{O}G$ の像を $\bar{x}$ により表す。 $R \in \{\mathcal{O}, k\}$ を固定する。既に説明したように通常表現の直和分解による最小単位は単純加群 (表現) になる。しかし, モジュラー表現論においては必ずしも単純加群だけが最小単位ではないので, 直和による分解でこれ以上分解できない加群を直既約加群と定める。これが

モジュラー表現論における表現の直和分解における最小単位である。もちろん単純加群は直既約加群の例になっている。 RG はそれ自身の積を作用に用いて左 RG -加群かつ右 RG -加群になり両側 (RG, RG) -加群にもなっている。このとき、この両側 (RG, RG) -加群 RG の直既約 (RG, RG) -加群への分解を $RG = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n$ としたときに、各 B_i を RG の $(p-)$ ブロックという。また各 B_i に対してその単位元はあるべき等元 $b_i \in Z(RG)$ で、 $\{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$ は $Z(RG)$ における原始べき等元で、 $B_i = RGb_i = b_iRG$ となる。この b_i を B_i のブロックべき等元という。以下ではブロックべき等元も単にブロックという。各直既約 RG -加群 M は唯一のブロック b_i により $b_iM \neq 0$ となる。このとき M はブロック b_i に属するという。 R を RG の作用がすべて自明に作用する RG -加群と見たものを自明な RG -加群といい R_G により表す。自明な RG -加群 R_G の属するブロックを主ブロックという。 RG -加群 L の直和分解に RG -加群 M と同型な加群が出てくる場合 $M \mid L$ と表す。次に加群に対する誘導と制限を定義する。 $H \leq G$, RG -加群 M , RH -加群 N に対して、 $\text{Ind}_H^G(N) := RG \otimes_{RH} N$ により N の G への誘導を定義し、 M の作用を RH に制限することにより RH -加群 $\text{Res}_H^G(M)$ を定義する。また、 M^* により M の双対 RG -加群を表す。直既約 RG -加群に対して vertex と source という G の p -部分群とその群環上の加群を定義する。

定義 1 (vertex, source). 直既約 RG -加群 M に対して、次の 2 条件を満たす G の p -部分群 P が G -共役を除き一意に決まる。

- (a) $M \mid \text{Ind}_P^G(\text{Res}_P^G M)$ となる。
- (b) $H \leq G$ に対して $M \mid \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G(M))$ ならば、 $P \leq_G H$ となる。

ここで $P \leq_G H$ は、ある $g \in G$ により ${}^gP \leq H$ であることを表す。この P を M の **vertex** といい、 $\text{vtx}(M)$ により表す。さらに、 $\text{vtx}(M)=P$ に対して、次の条件を満たす直既約 RP -加群 S が $N_G(P)$ -共役を除き一意に定まる。

- (a) $M \mid \text{Ind}_P^G(S)$
- (b) $S \mid \text{Res}_P^G(M)$
- (c) $\text{vtx}(S) = P$

この直既約 RP -加群 S を M の **source** といい、 $s(M)$ により表す。

特に RG のブロック B に対してその両側 (RG, RG) -加群としての作用を $R[G \times G]$ -加群と見ることができ、そのようにしてみたときの B の vertex としてある G の p -部分群 P により $\Delta P \leq G \times G$ が取れる。この P は G -共役を除き一意に定まるが、この P を B の不足群という。特に、 RG の主ブロックの不足群は G の Sylow p -部分群になる。これらを用いて次の Brauer の第 1 主定理と第 3 主定理を述べる (第 2 主定理もあるが、ここでは省略する)。

定理 1 (Brauer の第 1 主定理, 第 3 主定理). RG の不足群 P をもつブロック b に対して、 $RN_G(P)$ の不足群 P をもつある唯一のブロック c で、後の定義 3 で定める Brauer 準同型 $\text{br}_{\Delta P}$ により $\text{br}_{\Delta P}(b) = \text{br}_{\Delta P}(c)$ となるものが存在する。また、 RG の不足群 P をもつすべてのブロックと、 $RN_G(P)$ の不足群 P をもつすべてのブロックは、この対応により一対一に対応する。この対応により、 RG のブロック b に対応する $RN_G(P)$ のブロックを b の **Brauer** 対応子という。特に RG の主

ブロックの Brauer 対応子は $RN_G(P)$ の主ブロックになる。

この Brauer の主定理は G の表現と p -局所部分群の表現を比較していく上でとても重要である。

以上のことを用いて上で述べた有限群のモジュラー表現論における局所-大域原理の一つの定式化された問題である Broué 予想を述べる。

予想 (Broué 予想). G を有限群, b を RG のブロック, P を b の不足群, c を b の Brauer 対応子である $RN_G(P)$ のブロックとする。もし P が可換群ならば, RGB と $RN_G(P)c$ は導来同値である。

この Broué 予想は有限群のモジュラー表現論において最も興味のもたれている問題の一つであり, 今までにいくつかの場合に対して予想が示されてきた。例えば G が対称群や交代群や $SL_2(p^n)$ のすべてのブロック, P が巡回群のすべてのブロック, $P \cong C_3 \times C_3$ のすべての主ブロック, $p = 2$ のすべての群のすべての主ブロックの場合などがあり他にもいくつかの場合に確認されている ([7, 7.5] を参照)。Broué 予想の確認のためには RGB と $RN_G(P)c$ の導来同値を構成しなければならないが, その一つの手法として「奥山メソッド」と呼ばれる奥山哲郎氏により考案された RGB と $RN_G(P)c$ の森田型安定同値を足掛かりに導来同値を構成する方法が存在し, Broué 予想が確認されている多くの場合がこの奥山メソッドを用いて確認されている ([7, 7.2] を参照)。このことから, 今度は森田型安定同値の構成が重要になってくる。 b と c が主ブロックの場合に有用な一つの手法として, 次の Broué の張り合わせの原理が存在する。

定理 2 (Broué の張り合わせの原理). P を G の Sylow p -部分群, b を RG の主ブロック, M を $\text{Res}_{G \times N_G(P)}^{G \times G}(RGB)$ の vertex $\Delta(P)$ の直既約因子とする。このとき, もし $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(N_G(P))$ ならば次は同値である。

- (i) 関手 $M \otimes_{RN_G(P)} -$ と $M^* \otimes_{RG} -$ により RG の主ブロックと $RN_G(P)$ の主ブロックの間の森田型安定同値が誘導される。
- (ii) 任意の $1 \neq Q \leq P$ に対して, 関手 $\text{Br}_{\Delta Q}(M) \otimes_{kC_G(Q)} -$ と $\text{Br}_{\Delta Q}(M^*) \otimes_{kC_{N_G(P)}(Q)} -$ により $kC_G(Q)$ の主ブロックと $kC_{N_G(P)}(Q)$ の主ブロックの間の森田同値が誘導される。

ここで, Br は後の定義 3 で定義される Brauer construction である。

定理の中の M は $R[G \times N_G(P)]$ の ΔP に関する Scott 加群というものである。Broué の張り合わせの原理の言っていることは, RG と $RN_G(P)$ の間の (Scott 加群による) 森田型安定同値はそれらの各 p -局所部分群の間の森田同値 (という森田型安定同値よりも強い同値) を調べればよい, ということである。Broué の張り合わせの原理を用いて主ブロックの間の森田型安定同値を確認するために Scott 加群に成り立っていてほしい条件として, Kessar-Kunugi-Mitsubishi[4] において導入された次の Brauer 直既約性という条件がある。

定義 2 (Brauer 直既約 [4]). M を RG -加群とする。 G の任意の p -部分群 Q に対して $\text{Res}_{QC_G(Q)/Q}^{N_G(Q)/Q}(\text{Br}_Q(M))$ が直既約または 0 となるとき, M は Brauer 直既約であるという。

Scott 加群に対する Brauer 直既約性の同値条件は Ishioka-Kunugi[3, Theorem 1.3] により与えられた。今までのことを一般のブロックに対して考える。そうすると, 一般のブロックに対しても

Broué の張り合わせの原理の一般化にあたる, Linckelmann の張り合わせの原理 [5, Theorem 1.2] と呼ばれる定理が存在する。この詳細を述べるにはさらに用語を用意しなければならないので控えるが, つまるところ, RG と $RN_G(P)$ の (Brauer-friendly 加群による) 森田型安定同値はそれらの各 p -局所部分群の間の森田同値を調べればよい, という定理である。本研究では, 主ブロックの場合と同様に Linckelmann の張り合わせの原理を適用する際に必要になるであろう Brauer-friendly 加群に対する条件として slash 直既約性という Brauer 直既約性の一般化を定義し, Brauer-friendly 加群に対する slash 直既約性の同値条件を [3, Theorem 1.3] を一般化する形で与える。

2 記号の導入

この節では, Brauer-friendly 加群や slash 関手の定義やそれらを定義するために必要な用語を定義する。以下, G を有限群とする。まず, $\mathcal{O}G$ -加群 M , $H \leq G$ に対して M^H により H の元の作用により不変な M の元全体を表す。また, トレース写像 $\mathrm{Tr}_H^G : M^H \rightarrow M^G$ を $\mathrm{Tr}_H^G(m) := \sum_{t \in G/H} tm$ により定める。以下, $\overline{N}_G(H) := N_G(H)/H$ とする。

定義 3 (Brauer construction, Brauer morphism, Brauer 関手). P を G の p -部分群, M を $\mathcal{O}G$ -加群とする。 $\mathrm{Br}_P(M) := M^P / (\sum_{Q < P} \mathrm{Tr}_Q^P(M^Q) + J(\mathcal{O})M^P)$ により $k\overline{N}_G(P)$ -加群である M の P による Brauer construction を定める。これにより定まる関手 $\mathrm{Br}_P : \mathcal{O}G\mathbf{Mod} \rightarrow k\overline{N}_G(P)\mathbf{Mod}; M \mapsto \mathrm{Br}_P(M)$ を Brauer 関手という。また, 自然な全射 $\mathrm{br}_P : M^P \rightarrow \mathrm{Br}_P(M)$ を M の P による Brauer morphism という。

定義 4 (subpair). b を $\mathcal{O}G$ のブロックとする。このとき, (P, b_P) が G の subpair とは, P が G の p -部分群で b_P が $\mathcal{O}C_G(P)$ のブロックである対のことをいう。また, (P, b_P) が (G, b) -subpair とは, (P, b_P) が subpair でかつ $\mathrm{br}_{\Delta P}(b)\bar{b}_P = \bar{b}_P$ を満たすときをいう。

注意. G の subpair には G の作用が自然に入り, また subpair には包含関係が定まる。

定義 5 (ブロックの fusion system). b を G のブロック, (P, b_P) を (G, b) -subpair とする。このとき, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(P, b_P)}(G, b)$ を次のような対象と射を持つ圏として定める。この $\mathcal{F}$ を (G, b) の (P, b_P) における fusion system という。

- ・対象 : P の部分群。
- ・射 : $R, Q \leq P$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q, R) := \{\varphi : Q \rightarrow R \mid \exists x \in G, \forall q \in Q, \varphi(q) = {}^x q, {}^x(Q, b_Q) \leq (R, b_R)\}$ 。

次の vertex subpair と source triple は vertex と source をより精密にした概念である。

定義 6 (vertex subpair, source triple, [1, Definition 2]). M を直既約 $\mathcal{O}Gb$ -加群とする。

- ・ M の vertex subpair が (P, b_P) であるとは, (P, b_P) が (G, b) -subpair で, $P \leq_G \mathrm{vtx}(M)$ で, ある直既約 $\mathcal{O}P$ -加群 V により $M \mid b\mathcal{O}Gb_P \otimes_{\mathcal{O}P} V$ が成り立つことをいう。
- ・ V が M の vertex subpair (P, b_P) に関する source であるとは, V が $M \mid b\mathcal{O}Gb_P \otimes_{\mathcal{O}P} V$ の成り立つ直既約 $\mathcal{O}P$ -加群のことをいう。

・ (P, b_P, V) が M の source triple であるとは, V が M の vertex subpair (P, b_P) に関する source であるときをいう。

注意. ・ M の source triple が (P, b_P, V) ならば, [1, Lemma 1] の同値より $\text{vtx}(M) = P$, $s(M) = V$ と取れる。

定理 3 (Green 対応 [1, Lemma 1, Definition 2]). (P, b_P) を (G, b) -subpair とする。 M を直既約 $\mathcal{O}Gb$ -加群としたとき, $f_{b_P}^b(M)$ を $b_P \text{Res}_{N_G(P, b_P)}^G(M)$ の直既約因子で vertex P を持つ唯一の因子により定める。このとき, $f_{b_P}^b$ は source triple (P, b_P, V) をもつ直既約 $\mathcal{O}Gb$ -加群の同型類全体から source triple (P, b_P, V) をもつ直既約 $\mathcal{O}N_G(P, b_P)b_P$ -加群の同型類全体への全単射を与える。

この後定義する Brauer-friendly 加群は source に $\mathcal{F}$ -stable endo-permutation 加群をもつの加群なので, その endo-permutation 加群と $\mathcal{F}$ -stable を定義する。

定義 7 (endo-permutation 加群). M を RG -加群とする。このとき, M が endo-permutation RG -加群であるとは, ある $H_i \leq G$ により $\text{End}_R(M) \cong \bigoplus_i \text{Ind}_{H_i}^G(R_{H_i})$ となるときをいう。

注意. Endo-permutation 加群の定義の中に出てきた $\bigoplus_i \text{Ind}_{H_i}^G(R_{H_i})$ は **permutation 加群**と呼ばれるものなので, endo-permutation 加群は End を取ったらそれが permutation 加群であるような加群のことである。

定義 8 ($\mathcal{F}$ -stable). b を $\mathcal{O}G$ のブロック, (P, b_P) を (G, b) -subpair, V を endo-permutation $\mathcal{O}Q$ -加群, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{(P, b_P)}(G, b)$ とする。

・ V が $\mathcal{F}$ -stable であるとは, 任意の $R \leq Q$ と任意の $\phi_{g^{-1}} \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(R, Q)$ に対して $\text{Res}_R^Q(V) \oplus \text{Res}_R^{gQ}(gV)$ が endo-permutation 加群であるときをいう。

・ (P, b_P, V) が $\mathcal{F}$ -stable endo-permutation source triple とは, V が $\mathcal{F}$ -stable かつ直既約 endo-permutation $\mathcal{O}P$ -加群で vertex P をもつときをいう。

定義 9 (source triple に対する compatible). (P_i, b_{P_i}, V_i) を $\mathcal{F}_{(P_i, b_i)}(G, b)$ -stable endo-permutation source triple ($i = \{1, 2\}$) とする。

・ (P_1, b_{P_1}, V_1) と (P_2, b_{P_2}, V_2) が compatible であるとは, 任意の (G, b) -subpair (Q, b_Q) と任意の $\phi_i \in \text{Hom}_{\text{Br}(G, b)}((Q, b_Q), (P_i, b_{P_i}))$ に対して $\text{Res}_{\phi_1}(V_1) \oplus \text{Res}_{\phi_2}(V_2)$ が endo-permutation 加群であることである。ここで, $\text{Br}(G, b)$ はすべての (G, b) -subpair を対象に持ち, 射はブロックの fusion system と同じ様に定めた Brauer 圏と呼ばれる圏である。

定義 10 (Brauer-friendly 加群 [1, Definition 8]). M を $\mathcal{O}Gb$ -加群, $M = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} X_i$ を直既約分解で

各 X_i が直既約 $\mathcal{O}Gb$ -加群で source triple (P_i, b_{P_i}, V_i) をもつものとする。

・ M が Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$ -加群であるとは, (P_i, b_{P_i}, V_i) が $\mathcal{F}_{(P_i, b_i)}(G, b)$ -stable endo-permutation source triple ($i = \{1, \dots, n\}$) で, (P_i, b_{P_i}, V_i) と (P_j, b_{P_j}, V_j) が compatible ($\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$) であるときをいう。

定義 11 (Brauer-friendly 加群に対する compatible). 任意の Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$ -加群 L, M に対

して, $L \oplus M$ が Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$ -加群となるととき L と M は compatible であるという。

定義 12 (slash 関手 [1, Definition 14]). b を $\mathcal{O}G$ のブロック, (P, b_P) を (G, b) -subpair, ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Mod}$ の部分圏, (P, b_P) を (G, b) -subpair, $PC_G(P) \leq H \leq N_G(P, b_P)$, $\overline{H} := H/P$ とする。

$Sl : {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \rightarrow {}_{k\overline{H}b_P}\mathbf{Mod}(\text{additive})$ 関手が以下の条件を満たすとき, Sl を (P, b_P) -slash 関手という。
 ・ 任意の $L, M \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ に対して次の図式を可換にするような, ある

$$f_{L,M} : \text{Br}_{\Delta P}(\text{Hom}_{\mathcal{O}}(b_P L, b_P M)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(Sl(L), Sl(M)) (\text{as } k(C_G(P) \times C_G(P))\Delta H - \text{mod})$$

が存在する。

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(L, M) & \xrightarrow{Sl_{L,M}} & \text{Hom}_k(Sl(L), Sl(M)) \\ & \searrow \text{Br}_{(\Delta P, b_P)} \quad \circlearrowright \quad \nearrow f_{L,M} & \\ & \text{Br}_{\Delta P}(\text{Hom}_{\mathcal{O}}(b_P L, b_P M)) & \end{array}$$

Slash 関手はどんな圏に対しても存在する訳ではなく, 次のような Brauer-friendly 圏に対しては存在することが知られている。

定義 13 (Brauer-friendly 圏 [1, Definition 15]). ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Mod}$ の部分圏とする。

・ ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ が Brauer-friendly 圏とは, 任意の $L, M \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ に対して, L と M は compatible な Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$ -加群であるときをいう。

例. ある permutation 加群の直和因子に同型である加群を **p -permutation 加群** という。 ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Perm}$ を対象がすべての p -permutation $\mathcal{O}Gb$ -加群の圏とすると, これは Brauer-friendly 圏になっている。

定理 4 ([1, Theorem 18]). b を $\mathcal{O}G$ のブロック, ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Mod}$ の Brauer-friendly 部分圏, (P, b_P) を (G, b) -subpair, $PC_G(P) \leq H \leq N_G(P, b_P)$, $\overline{H} := H/P$, $\overline{C}_G(P) := PC_G(P)/P$ とする。このとき, 以下のことが成り立つ。

- (i) (Gb, P, b_P) -slash 関手 $Sl_{(Gb, P, b_P)} : {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \rightarrow {}_{k\overline{H}b_P}\mathbf{Mod}$ が存在する。
- (ii) $Sl'_{(Gb, P, b_P)} : {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \rightarrow {}_{k\overline{H}b_P}\mathbf{Mod}$ を (Gb, P, b_P) -slash 関手とすると, ある linear character $\chi : \overline{H}/\overline{C}_G(P) \rightarrow k^\times$ により関手としての同型 $\chi_* Sl_{(Gb, P, b_P)} \cong Sl'_{(Gb, P, b_P)}$ が成り立つ。

例. 上で考えた Brauer-friendly 圏の例である ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Perm}$ に対しては slash 関手は Brauer 関手 (の linear character 倍) である。

定義 14 (slash 直既約 [2, Definition 5.1]). ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{Mod}$ の Brauer-friendly 部分圏, $M \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ とする。このとき, M が slash 直既約であるとは, 任意の (G, b) -Brauer pair (Q, b_Q) に対する, ある (Gb, Q, b_Q) -slash 関手 $Sl_{(Gb, Q, b_Q)} : {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \rightarrow {}_{k\overline{H}b_Q}\mathbf{Mod}$ により $\text{Res}_{QC_G(Q)/Q}^{N_G(Q, b_Q)/Q}(Sl_{(Gb, Q, b_Q)}(M))$ が直既約または 0 となることをいう。

注意. ・ Slash 直既約性の定義は ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} : \text{Brauer-friendly 圏}$ と $Sl_{(Gb, Q, b_Q)} : (Gb, Q, b_Q)\text{-slash 関手}$ には依存しない。

定理 5 ([1, Theorem 23]). b を $\mathcal{O}G$ のブロック, (P, b_P, V) を $\mathcal{F}_{(P, b_P)}(G, b)$ -stable endo-permutation source triple, ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を "big enough" な (つまり, 任意の直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$ -加群で source triple (P, b_P, V) をもつものの有限個の直和が属する) Brauer-friendly 圏, $Sl_{(Gb, P, b_P)}: {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \rightarrow {}_{k\overline{N}_G(P, b_P)\bar{b}_P}\mathbf{Mod}$ を (Gb, P, b_P) -slash 関手とする。このとき, source triple (P, b_P, V) をもつすべての直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$ -加群の同型類の集合からすべての直既約射影 $k\overline{N}_G(P, b_P)\bar{b}_P$ -加群の同型類の集合への全単射が $Sl_{(Gb, P, b_P)}$ により与えられる。

この定理を用いて Brauer-friendly 加群を次の様に表示する。

定義 15. 定理 5 と同じ設定とし, M を直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$ -加群で source triple (P, b_P, V) を持ち ${}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ に属するものとする。このとき, 定理 5 によりある唯一の単純 $k\overline{N}_G(P, b_P)\bar{b}_P$ -加群 S により $Sl_{(Gb, P, b_P)}(M) \cong P(S)$ となるので, $M := B(Gb, (P, b_P, V), Sl_{(Gb, P, b_P)}, S)$ と表す。また, $S = k\overline{N}_G(P, b_P): \text{自明 } k\overline{N}_G(P, b_P)\bar{b}_P\text{-加群 (つまり, } b_P \text{ は } N_G(P, b_P) \text{ の主ブロック) のとき, } BS(Gb, (P, b_P, V), Sl_{(Gb, P, b_P)}) := B(Gb, (P, b_P, V), Sl_{(Gb, P, b_P)}, S)$ と表す。この加群を Brauer-friendly Scott $\mathcal{O}G$ -加群と呼ぶことにする。

注意. ・ 上記の Brauer-friendly 加群の表示は linear char. 倍を除き一意である。

・ Scott $\mathcal{O}G$ -加群 $S(G, P)$ とは, b が $\mathcal{O}G$ の主ブロック, $V = \mathcal{O}_P$, $(b_P$ が $\mathcal{O}C_G(P)$ の主ブロック), $S = k\overline{N}_G(P, b_P)$ の特別な場合の $B(Gb, (P, b_P, V), Sl_{(Gb, P, b_P)}, S)$ のことである。なので, これから示していく補題は Scott 加群に対しても成り立っている。

3 補題

このセクションでは [3] において主定理を示すために必要であった Scott 加群と Brauer 関手に対する補題を, Brauer-friendly 加群 (や Brauer-friendly Scott 加群) と slash 関手に対して用意する。証明は省略しているが証明の本質的なことは, 元の Scott 加群に対する命題の証明は source が自明な加群であることを用いて示されているが, それを関手的な方法で source が自明な加群でないような Brauer-friendly 加群に対しても示していくことである。

補題 1. $PC_G(P) \leq H \leq G$, b を $\mathcal{O}G$ のブロック, (P, b_P) を (G, b) -subpair, M を Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$ -加群, $Sl_{(Gb, P, b_P)}$ を (Gb, P, b_P) -slash 関手とする。 $b_P \text{Res}_{N_H(P, b_P)}^G(M) = L \oplus L'$ (L は Brauer-friendly $\mathcal{O}N_H(P, b_P)$ -加群, L' は vertex に P を含まない直既約加群の直和) と出来る ([1, Lemma 10(i)] より)。 ${}_{\mathcal{O}N_H(P, b_P)b_P}\mathbf{M}$ を Brauer-friendly 圏で $L \in {}_{\mathcal{O}N_H(P, b_P)b_P}\mathbf{M}$ とする。このとき, ある $(N_H(P, b_P)b_P, P, b_P)$ -slash 関手 $Sl_{(N_H(P, b_P)b_P, P, b_P)}: {}_{\mathcal{O}N_H(P, b_P)b_P}\mathbf{M} \rightarrow {}_{k\overline{N}_H(P, b_P)\bar{b}_P}\mathbf{Mod}$ により $k\overline{N}_H(P, b_P)\bar{b}_P$ -加群としての同型

$$\text{Res}_{N_H(P, b_P)}^{\overline{N}_G(P, b_P)}(Sl_{(Gb, P, b_P)}(M)) \cong Sl_{(N_H(P, b_P)b_P, P, b_P)}(L)$$

を得る。特に, $H = G$ で M が source triple (P, b_P, V) を持つときは $f_{b_P}^b$ を $(Gb, (P, b_P), N_G(P, b_P))$ に関する Green 対応とすると, $k\overline{N}_G(P, b_P)\bar{b}_P$ -加群としての同型

$$Sl_{(Gb, P, b_P)}(M) \cong Sl_{(N_G(P, b_P)b_P, P, b_P)}(f_{b_P}^b(M))$$

が成り立つ。

補題 2. M を直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$ -加群で source triple (P, b_P, V) を持つ, $M \in {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M}$ を Brauer-friendly 圏, (Q, b_Q) を (G, b) -subpair, $Sl_{(Gb, Q, b_Q)} : {}_{\mathcal{O}Gb}\mathbf{M} \rightarrow {}_{k\overline{N}_G(Q, b_Q)\overline{b}_Q}\mathbf{Mod}$ を (Gb, Q, b_Q) -slash 関手とする。このとき,

$$Sl_{(Gb, Q, b_Q)}(M) \neq 0 \iff Q \leq_G P$$

が成り立つ。

補題 3. (P, b_P) を (G, b) -subpair, $f_{b_P}^b$ を $(Gb, (P, b_P), N_G(P, b_P))$ に関する Green 対応とする。このとき, ある $Sl_{(N_G(P, b_P)b_P, P, b_P)} : (N_G(P, b_P)b_P, P, b_P)$ -slash 関手により $\mathcal{O}N_G(P, b_P)$ -加群の同型

$$f_{b_P}^b(B(Gb, (P, b_P, V), Sl_{(Gb, P, b_P)}, S)) \cong B(N_G(P, b_P)b_P, (P, b_P, V), Sl_{(N_G(P, b_P)b_P, P, b_P)}, S)$$

が成り立つ。特に,

$$f_{b_P}^b(BS(Gb, (P, b_P, V), Sl_{(Gb, P, b_P)})) \cong BS(N_G(P, b_P)b_P, (P, b_P, V), Sl_{(N_G(P, b_P)b_P, P, b_P)})$$

が成り立つ。

次の補題は, Scott 加群に対する [6, IV, 定理 8.6(ii)] に対応する結果である。

補題 4. $PC_G(P) \leq H \leq G$, (P, b_P) を (G, b) -subpair かつ (H, b') -subpair とする。ある $t \in N_G(P, b_P)$ が存在して, ${}_{\mathcal{O}Hb'}\mathbf{M}$ を $(P, b_P, {}^tV)$ に関して”big enough” な Brauer-friendly 圏とすると, 次が成り立つ。ある (Hb', P, b_P) -slash 関手 $Sl_{(Hb', P, b_P)} : {}_{\mathcal{O}Hb'}\mathbf{M} \rightarrow {}_{k\overline{N}_H(P, b_P)\overline{b}_P}\mathbf{Mod}$, ある S' を単純 $k[\overline{N}_H(P, b_P)\overline{b}_P]$ -加群により

$$B(Hb', (P, b_P, {}^tV), Sl_{(Hb', P, b_P)}, S') \mid \text{Res}_H^G(B(Gb, (P, b_P, V), Sl_{(Gb, P, b_P)}, S))$$

が成り立つ。特に

$$BS(Hb', (P, b_P, {}^tV), Sl_{(Hb', P, b_P)}) \mid \text{Res}_H^G(BS(Gb, (P, b_P, V), Sl_{(Gb, P, b_P)}))$$

が成り立つ。

次に [3, Lemma 2.2] の H. Kawai による結果の Brauer-friendly Scott 加群版を, 元の H. Kawai による証明と同様の方針で示す (全く同じ様には出来ない)。

補題 5. (P, b_P) を (G, b) -subpair, $(Q, b_Q) \leq_G (P, b_P)$, $H := N_G(Q, b_Q)$ とする。

もし R が $P \cap_G H$ の極大元かつ $Q \leq R$ ならば, $\exists Sl_{(Hb_Q, R, b_R)}, \exists n \in G, \exists S' : \text{単純 } k[\overline{N}_H(R, b_R)\overline{b}_R]$ -加群により

$$B(Hb_Q, (R, b_R, \text{Cap}(\text{Res}_R^{{}^n P}({}^n V))), Sl_{(Hb_Q, R, b_R)} S') \mid \text{Res}_H^G(B(Gb, (P, b_P, V), Sl_{(Gb, P, b_P)}, S))$$

が成り立つ (ここで, b_R は仮定より $R \leq {}^g P$ なので, $(R, b_R) \leq {}^g (P, b_P)$ を満たす唯一のブロックとする)。

次の補題は, [3, Lemma 2.1] の Thévenaz のテキストの exercise に対応するものである。

補題 6. (P, b_P) を (G, b) -subpair, $M := B(Gb, (P, b_P, V), Sl_{(Gb, P, b_P)}, S)$, $Q \leq_G P$, $H := N_G(Q, b_Q)$ とする。[1, Lemma 10(i)] より, $b_Q \text{Res}_H^G(M) = L \oplus L'$ (L は Brauer-friendly $\mathcal{O}Hb_Q$ -加群, L' は各直既約因子の vertex が Q を含まない) と直和分解し, $L := \bigoplus_{1 \leq i \leq n} L_i$ と直既約分解する。 $Z_i := \text{vtx}(L_i)$ とする。

このとき, $\exists g_i \in G (1 \leq i \leq n)$, $\exists S_i$: 単純 $k[N_H(Z_i, b_{Z_i})/Z_i]\bar{b}_{Z_i}$ -加群 ($1 \leq i \leq n$) により, $Sl_{(Hb_Q, Q, b_Q)}(L_i) \cong$

$$B(Hb_Q, (Z_i, b_{Z_i}, \text{Cap}(\text{Res}_{Z_i}^{g_i P}(^i V))[Q]), Sl_{(Hb_Q, Z_i, b_{Z_i})}, S_i) \oplus (\bigoplus_j X_{i,j})$$

が成り立つ。ここで $X_{i,j}$ は,

$(Q, b_Q) \leq \exists (\text{vtx}(X_{i,j}), b_{\text{vtx}(X_{i,j})}) \leq (Z_i, b_{Z_i})$, $\exists s(X_{i,j}) \mid \text{Res}_{\text{vtx}(X_{i,j})}^{Z_i}(\text{Cap}(\text{Res}_{Z_i}^{g_i P}(^i V)))[Q]$, $\exists Sl_{(Hb_Q, \text{vtx}(X_{i,j}), b_{\text{vtx}(X_{i,j})})}$, $\exists S_{i,j}$: 単純 $k[N_H(\text{vtx}(X_{i,j}))/\text{vtx}(X_{i,j})]\bar{b}_{\text{vtx}(X_{i,j})}$ -加群により,

$$X_{i,j} = B(Hb_Q, (\text{vtx}(X_{i,j}), b_{\text{vtx}(X_{i,j})}, s(X_{i,j})), Sl_{(Hb_Q, \text{vtx}(X_{i,j}), b_{\text{vtx}(X_{i,j})})}, S_{i,j})$$

である。

4 主定理

次が [3, Theorem 1.3] の一般化にあたる Brauer-friendly 加群の slash 直既約性の同値条件を与える主定理である。

定理 6. b を $\mathcal{O}G$ のブロック, (P, b_P) を (G, b) -subpair, $M := B(Gb, (P, b_P, V), Sl_{(Gb, P, b_P)}, S)$, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{(P, b_P)}(G, b)$ を saturated とする。 $Q \leq P$ に対して, $H_Q := N_G(Q, b_Q)$, $N_Q := N_P(Q)$ と表す。このとき, 以下は同値である。

- (i) M : slash 直既約.
- (ii) $\text{Res}_{QC_G(Q)}^{H_Q}(B(H_Q b_Q, (N_Q, b_{N_Q}, \text{Cap}(\text{Res}_{N_Q}^{n P}(^n V))[Q]), Sl_{(H_Q b_Q, N_Q, b_{N_Q})}, S_Q))$: 直既約, ($\forall Q \leq P$: fully $\mathcal{F}$ -normalized 部分群).

これらの条件が成り立てば, $\forall Q \leq P$: fully $\mathcal{F}$ -normalized 部分群に対して

$$Sl_{(Gb, Q, b_Q)}(M) \cong B(H_Q b_Q, (N_Q, b_{N_Q}, \text{Cap}(\text{Res}_{N_Q}^{n P}(^n V))[Q]), Sl_{(H_Q b_Q, N_Q, b_{N_Q})}, S_Q)$$

が成り立つ。

注意. ・ (ii) の中の $B(H_Q b_Q, (N_Q, b_{N_Q}, \text{Cap}(\text{Res}_{N_Q}^{n P}(^n V))[Q]), Sl_{(H_Q b_Q, N_Q, b_{N_Q})}, S_Q)$ は M と Q に対して補題 5 と補題 6 により定まる加群である。

・ 主定理の証明は, [3, Theorem 1.3] を示すために必要であった Scott 加群に対する補題は前の章ですべて Brauer-friendly 加群に対して用意したことと, 群論的な補題は [3] の中で準備されているものを subpair により精密化すればよいので, [3, Theorem 1.3] の証明と同じ手法で示せる。

参考文献

- [1] E. Biland, *Brauer-friendly modules and slash functors*, J. Pure Appl. Algebra 218 (2014), 2319-2336.
- [2] Z. Feng and Z. Li, *Endopermutation Scott modules, slash indecomposability and saturated fusion systems*, Comm. Algebra 46 (2018), 3608-3621.
- [3] H. Ishioka and N. Kunugi, *Brauer indecomposability of Scott modules*, J. Algebra 470 (2017), 441-449.
- [4] R. Kessar, N. Kunugi and N. Mitsuhashi, *On saturated fusion systems and Brauer indecomposability of Scott modules*, J. Algebra 340 (2011), 90-103.
- [5] M. Linckelmann, *On stable equivalences with endopermutation source*, J. Algebra 434 (2015), 27-45.
- [6] 永尾汎・津島行男, 有限群の表現, 裳華房, (1987).
- [7] 宇野勝博・切刀直子, 有限群のモジュラー表現論における予想について, 数学 65 巻 1 号 (2013), 1-23.