Probabilistic properties of generalized noncrossing partitions of finite type Coxeter groups

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
植田優基 (Yuki UEDA)

概要

有限型コクセター群の非交叉分割の数え上げ総数である Fuss-Catalan 数で構成される数列の正定値性を (自由) 確率論の手法で明らかにする。これは Wojciech Młotkowski 氏 (University of Wroclaw) と 佐久間紀佳氏 (愛知教育大学) との共同研究 [14] に基づく。

1 はじめに

半順序集合の分割は、組合せ論の問題としても、確率論のモーメント計算に関しても、非常に重要な概念であることが知られている。$(S, <)$ を半順序集合とするとき、$\pi := \{V_1, \cdots, V_r\}$ $(r \geq 1)$ が S の**分割**であるとは、$\emptyset \neq V_i \subset S$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ でかつ、$\bigcup_i V_i = S$ となることをいう。このとき、$V_1, \cdots, V_r$ のことを π の**ブロック**という。特に π が**交叉分割**であるとは、ある $i \neq j$ と $p_1, p_2 \in V_i$, $q_1, q_2 \in V_j$ が存在して、$p_1 < q_1 < p_2 < q_2$ となることをいう。(例は図 1 を参照) π が**非交叉分割**であ

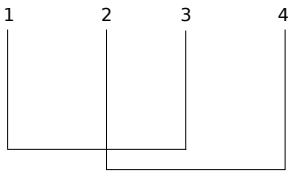

図 1　有限集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ の交叉分割

るとは、交叉しないことをいう。ここで、有限集合 $[n] := \{1, \cdots, n\}$ の非交叉分割全体の集合を $NC(n)$ と書くことにする。ここで $[n]$ の非交叉分割の組合せ総数 $|NC(n)|$ は Catalan 数:

$$C_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

になることが知られている (例えば [15])。Catalan 数は、他にも格子状の経路数え上げや平面グラフの交差の数え上げなどにも現れ、組合せ論にとって重要な情報の一つであることがわかっている。

ここで $NC(n)$ 自身にも半順序 $\prec$ が入っていることが知られている。$\pi, \sigma \in NC(n)$ に対して、$\pi \prec \sigma$ であることを π の任意のブロックが σ のあるブロックに含まれることをいう。つまり、任意の $V \in \pi$ に対してある $W \in \sigma$ が存在して、$V \subset W$ となることをいう。任意の自然数 k に対して、

$$NC^{(k)}(n) := \{(\pi_1, \cdots, \pi_k) \in NC(n)^k : \pi_1 \prec \cdots \prec \pi_k\}$$

と定めると、これは A 型のコクセター群の k-divisible 非交叉分割全体の集合 (ここでは詳しくは述べないが非交叉分割の一般化である。詳しくは例えば [2] を参照) とあり、$|NC^{(k)}(n)|$ は **Fuss-Catalan 数**:

$$C_n^{(k)} := \frac{1}{nk+1}\binom{n(k+1)}{n}$$

と呼ばれる量になる。もちろん、$C_n^{(1)} = C_n$ となる。

Catalan 数や Fuss-Catalan 数をさらに一般化した **(2-径数)Fuss-Catalan 数** (もしくは **Raney 数**、または単に Fuss-Catalan 数) とは、次の量 $A_k(p,r)$ で定義される。

$$A_k(p,r) := \frac{r}{kp+r}\binom{kp+r}{k}, \qquad k \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ p,r \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

定義より $A_n(2,1) = C_n$, $A_n(k+1,1) = C_n^{(k)}$ であるため、(2 径数)Fuss-Catalan 数は Catalan 数や Fuss-Catalan 数の一般化の一つになっていることがわかる。この数もまたコクセター群の非交叉分割の組合せ総数として現れるが、Forester と Liu ([5]) によって、ガウス型ランダム行列の特異値の 2 乗が従う確率分布のモーメントとして、この量が現れることがわかっている。以降、「2 径数」という語句を省略して、$A_k(p,r)$ のことを単に Fuss-Catalan 数と呼ぶことにする。

このように Fuss-Catalan 数の研究は組合せ論として興味深いものであるが、確率論から興味深い研究もある。本研究の立ち位置は後者であり、具体的には Fuss-Catalan 数列 $\{A_k(p,r)\}_{k\geq 0}$ をモーメント列としてもつ確率測度 (Fuss-Catalan 分布) の研究に興味がある。

数列 $\{A_k(p,r)\}_{k\geq 0}$ が正定値であることの必要十分条件として $p \geq 1,\ 0 < r \leq p$ または $p \leq 0,\ p-1 \geq r$ もしくは $r = 0$ であることが知られている ([8, 11, 12, 13] などを参照)。ここで

$$\mathcal{A} := \{(p,r) : p \geq 1, 0 < r \leq p\} \cup \{(p,r) : p \leq 0, p-1 \geq r\} \cup \{(p,r) : r = 0\} \tag{1.2}$$

とおくと、ハンブルガーの定理によって $(p,r) \in \mathcal{A}$ のとき $A_k(p,r)$ を k-次モーメントとしてもつ確率測度 $\mu(p,r)$ が一意的に存在する。つまり、

$$A_k(p,r) = \int_{\mathbb{R}} x^k \mu(p,r), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

この確率測度 $\mu(p,r)$ のことを **Fuss-Catalan 分布**とよぶ。ここで簡単な事実として、$\mu(p,0) = \delta_0$ (0 でのデルタ分布) であることがわかる。また、[11] より $\mu(p,r)(B) = \mu(1-p,-r)(-B)$ (B は $\mathbb{R}$ のボレル集合) となることが知られている。したがって、ここでは $(p,r) \in \mathcal{A}$ を $p \geq 1,\ 0 < r \leq p$ である場合に限定し、Fuss-Catalan 分布の自由無限分解可能性、自由自己分解可能性や単峰性について得られた結果について報告する。

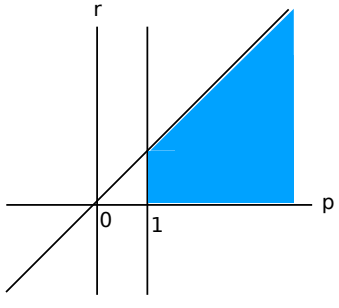

図 2　$p \geq 1,\ 0 < r \leq p$

2　Fuss-Catalan 分布の密度関数

この節では Fuss-Catalan 分布の密度関数表示について述べる。以降、$p \geq 1$, $0 < r \leq p$ とする。まず事実として $\mu(1,1) = \delta_1$ の場合を除いて、Fuss-Catalan 分布 $\mu(p,r)$ はルベーグ測度に対して絶対連続であることが知られている。ここで $W_{p,r}$ を $\mu(p,r)$ の (ルベーグ測度に関する) 密度関数としよう。また、$p > 1$ のときは $[0, p^p(p-1)^{1-p}]$ に台をもち、$p = 1, 0 < r < 1$ のときは $[0,1]$ に台をもつことが知られている。

さらに Forrester と Liu [5] は次のような密度関数表示を与えている。

命題 2.1. $p > 1$ に対して、

$$\rho(\varphi) := \frac{(\sin(p\varphi))^p}{\sin(\varphi)(\sin((p-1)\varphi))^{p-1}}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{p}.$$

とおくと、$\rho(\varphi)$ は $(0, \pi/p)$ から $\left(0, p^p(p-1)^{1-p}\right)$ への単調減少関数であり、

$$W_{p,r}(\rho(\varphi)) = \frac{(\sin((p-1)\varphi))^{p-r-1}\sin(\varphi)\sin(r\varphi)}{\pi(\sin(p\varphi))^{p-r}}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{p}.$$

と表される。

また [11] では $p = 1$, $0 < r < 1$ の場合の Fuss-Catalan 分布の密度関数が与えられている。

命題 2.2. $0 < r < 1$ とする。このとき

$$W_{1,r}(x) = \frac{\sin(r\pi)}{\pi} x^{r-1}(1-x)^{-r}\mathbf{1}_{(0,1)}(x).$$

と与えられる。

これらの密度関数表示から、例えば台の端点での漸近挙動 ([5]) や分布の単峰性などが調べることができる。とくに単峰性について得られた結果は 4 節で述べることにする。

3　自由確率論からの準備

自由確率論は、自由群因子環と呼ばれる作用素環の同型問題に関する確率論的考察から生まれた分野であり、1980 年代に Voiculescu によって提唱された。なお、動機となった自由群因子環の同型問題は現在も未解決問題である。自由確率論に関する標準的な教科書は [10] や [15] などが挙げられる。

3.1　自由独立性と自由たたみこみ

確率論の枠組みでは確率空間や確率変数、期待値、確率分布などが定義されたが、非可換確率論においても類似した定義が存在する。

定義 3.1. *(1)* $\mathbb{C}$ 上代数 $\mathcal{A}$ が **$*$-環**であるとは、任意の $a, b \in \mathcal{A}$ に対して $(ab)^* = b^*a^*$, $(a^*)^* = a$ を満たす反線形写像 *(対合)* $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $a \mapsto a^*$ をもつことをいう。とくに積に関する単位元 $1_{\mathcal{A}}$ をもつとき、$\mathcal{A}$ を**単位的 $*$-環**と呼ぶ。

(2) $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ が単位的 $*$-環 $\mathcal{A}$ 上の**状態**であるとは、$\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$, $\varphi(a^*a) \geq 0$ $(a \in \mathcal{A})$ をみたす線型汎函数であることをいう。

(3) $(\mathcal{A},\varphi)$ が**非可換確率空間**であるとは、$\mathcal{A}$ が非可換 $*$-代数、φ が $\mathcal{A}$ 上状態であることを言う。

(4) $(\mathcal{A},\varphi)$ を非可換確率空間とするとき、$\mathcal{A}$ の元のことを **(非可換) 確率変数**とよぶ。とくに $a\in\mathcal{A}$ が自己共役 $(a=a^*)$ であるとき、**実確率変数**とよぶ。また、$\varphi(a)$ のことを a の**期待値**とよぶ。

(5) 実確率変数 $a\in\mathcal{A}$ に対して、ある $\mathbb{R}$ 上確率分布 μ が存在して、

$$\varphi(a^n)=\int_{\mathbb{R}}x^n d\mu(x),\qquad n\geq 1$$

をみたすとき、μ のことを a が従う**確率分布**とよび、$a\sim\mu$ とかく。

確率論においてもう一つ重要な概念として独立性があるが、非可換確率論においても「独立性」のような概念がいくつかある。本報告書では特に重要な独立性の一つとして「自由独立性」を定義する。

定義 3.2. $(\mathcal{A},\varphi)$ を非可換確率空間とする。

(1) $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ を $\mathcal{A}$ を単位的 $*$-部分環の族とする。$\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ が**自由独立**であるとは、任意の $k\in\mathbb{N}$、$i_1\neq i_2,\cdots,i_{k-1}\neq i_k\in I$ と、$\varphi(a_s)=0$ なる $a_s\in\mathcal{A}_{i_s}$ に対して、$\varphi(a_1\cdots a_k)=0$ となることをいう。

(2) 確率変数 $X\in\mathcal{A}$ に対して、$X^{k_1}(X^*)^{l_1}X^{k_2}(X^*)^{l_2}\cdots X^{k_n}(X^*)^{l_n}$ $(k_1,l_n\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ k_2,\cdots k_n,l_1,\cdots l_{n-1}\in\mathbb{N})$ の形の確率変数の線型結合で表される元と単位元 $1_{\mathcal{A}}$ からなる集合は $\mathcal{A}$ の演算で、単位的 $*$-部分環になる。これを $1_{\mathcal{A}}$ と X **で生成される単位的 $*$-部分環**と呼ぶ。

(3) 確率変数列 $\{X_i\}_{i\in I}\subset\mathcal{A}$ が自由独立であるとは、$\mathcal{A}_i$ を $1_{\mathcal{A}}$ と X_i で生成される単位的 $*$-部分環とするとき、$\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ が自由独立であることを言う。

独立な確率変数の分布は二つの確率変数の分布のたたみこみで表される。自由確率論においても類似の概念 (自由たたみこみ) がある。

定義 3.3. *[4] ([17, 9]*も参照*)* $X\sim\mu$, $Y\sim\nu$ を自由独立な実確率変数とする。このとき、$X+Y$ が従う確率分布が存在する場合、これを $\mu\boxplus\nu$ と書くことにし、$\boxplus$ を**自由たたみこみ**とよぶ。

3.2 自由無限分解可能分布

分布のたたみこみ演算に関する重要な性質の一つとして無限分解可能性がある。ここで μ が**無限分解可能**であるとは、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対してある確率分布 μ_n が存在して、$\mu=\mu_n^{*n}$ が成立することをいう。無限分解可能分布は Lévy 過程と呼ばれる確率過程を構成する上で重要な分布のクラスである。自由確率論においても、自由たたみこみを用いて無限分解可能性を定義することができる。

定義 3.4. 確率分布 μ が**自由無限分解可能分布**であるとは、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対してある確率分布 μ_n が存在して、$\mu=\mu_n^{\boxplus n}$ が成立することを言う。

古典の場合の無限分解可能分布はその Fourier 変換 (特性関数) の Lévy-Khintchine 表現によって特徴付けられることが知られている (詳しくは [16] を参照)。自由無限分解可能分布も古典の場合と同じように、ある関数によって特徴付けられることが知られている。この関数のことは **Voiculescu 変換**と **R-変換**と呼ばれ、それぞれ次のように定義される。まず確率分布 μ の**コーシー・スチルチェス変換** G_μ とそ

の逆数 F_μ を定義する。

$$G_\mu(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} d\mu(x), \quad F_\mu(z) := \frac{1}{G_\mu(z)}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\mu).$$

F_μ は複素上半平面 $\mathbb{C}^+$ で解析的であり、$\mathbb{C}^+$ のある部分集合 D で逆関数 (かつ解析的な)F_μ^{-1} をもつことが知られている。そして μ の Voisculescu 変換 φ_μ は次のように定義される。

$$\varphi_\mu(z) := F_\mu^{-1}(z) - z, \qquad z \in D.$$

また、μ の R-変換 R_μ を以下で定義する。

$$R_\mu(z) := z\varphi_\mu\left(\frac{1}{z}\right), \qquad 1/z \in D.$$

これらの関数を用いて自由無限分解可能分布の特徴づけができる。

命題 3.5. *[4, 3]* 次は同値である。

(1) μ は自由無限分解可能分布である。
(2) φ_μ は $\mathbb{C}^+$ から $\mathbb{C}^- \cup \mathbb{R}$ への解析関数に解析接続 *(*それを改めて φ_μ とかくことにする*)* され、

$$\varphi_\mu(z) = \gamma + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+zx}{z-x} d\sigma(x), \qquad z \in \mathbb{C}^+$$

となる $\gamma \in \mathbb{R}$ と有限測度 σ が一意に存在する。
(3) R_μ は $\mathbb{C}^-$ 上の解析関数に解析接続 *(*改めて R_μ とかく*)* され、

$$R_\mu(z) = az^2 + \eta z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1-zx} - 1 - zx\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\right)\nu(dx), \qquad z \in \mathbb{C}^- \tag{3.1}$$

となる $a \geq 0$, $\eta \in \mathbb{R}$ と自由 *Lévy* 測度 ν *(*$\nu(\{0\}) = 0$ かつ $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge x^2)d\nu(x) < \infty$ となる正測度*)* が一意に存在する。

また *(2)* の (γ, σ) と *(3)* の (a, η, ν) には以下の関係がある。

$$\begin{aligned} \nu(dx) &= \frac{1+t^2}{t^2} \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x)\sigma(dx) \\ \eta &= \gamma + \int_{\mathbb{R}} x\left(\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) - \frac{1}{1+x^2}\right)\nu(dx) \\ a &= \sigma(\{0\}). \end{aligned}$$

式 (3.1) のような表示を**自由 Lévy-Khintchine 表現**と呼ぶ。

3.3 自由自己分解可能分布

古典確率論において無限分解可能分布の特殊なサブクラスの一つとして自己分解可能分布がある。ここで μ が**自己分解可能**であるとは、任意の $c \in (0,1)$ に対してある確率分布 μ_c が存在して $\mu = D_c(\mu) * \mu_c$ となることをいう。ここで $D_c(\mu)(B) := \mu(c^{-1}B)$ (B は $\mathbb{R}$ のボレル集合) である。自己分解可能分布は同分布とは限らない独立確率変数の和の極限分布として現れる。ここで古典の場合と同様に自由たたみこみを用いて自由自己分解可能分布を定義することができる。

定義 3.6. μ が**自由自己分解可能分布**であるとは、任意の $c \in (0,1)$ に対してある確率分布 μ_c が存在して $\mu = D_c(\mu) \boxplus \mu_c$ となることをいう。

まず (古典/自由) 自己分解可能分布の特筆すべき性質として単峰性がある。つまり全ての自己分解可能分布は単峰である (山里の定理 [18])。また全ての自由自己分解可能分布も単峰であることがわかっている ([7])。ここで確率分布 μ が**モード a の単峰**であるとは、

$$\mu(dx) = c\delta_a + f(x)dx,$$

という形でかけることを言う。ここで $c > 0$, $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ は $(-\infty, a)$ で単調非減少、(a,∞) で単調非増加である関数である。つまり、単峰でない分布は自己分解可能にはならないことがわかる。

自由自己分解可能分布は、自由無限分解可能なので自由 Lévy 測度が現れる。実は自由自己分解可能分布の自由 Lévy 測度は次のような形で記述されることが知られている。

命題 3.7. μ を自由自己分解可能分布、ν をその自由 *Lévy* 測度とするとき、ν はルベーグ測度に関して絶対連続であり、

$$\nu(dx) = \frac{k(x)}{|x|}dx \tag{3.2}$$

という形で表される。ここで $k : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ は $(-\infty, 0)$ 上で単調増加、$(0,\infty)$ 上で単調減少となる。逆に ν が (3.2) の形でかける時、μ は自由自己分解可能分布となる。

また自由自己分解可能分布がコンパクト台をもつとき、自由キュムラント列による特徴づけができることも知られている。ここで μ の**自由キュムラント** $\kappa_n(\mu)$ とは R-変換 R_μ のベキ級数展開で現れる n 次係数のことをいう。

命題 3.8. *[6]* コンパクト台をもつ確率分布 μ が自由自己分解可能分布であることと、$\{n\kappa_n(\mu)\}_{n\geq 1}$ が条件付き正定値であることが同値である。ここで $\{a_n\}_{n\geq 1}$ が**条件付き正定値**であるとは $\{a_{i+j}\}_{i,j\geq 1}$ が正定値であることをいう。

3.4 自由正則分布

$[0,\infty)$ 上の自由無限分解可能分布のサブクラスとして自由正則分布と呼ばれるものが定義される。これは非単調減少な Lévy 過程 (**subordinator**) の分布の自由版として特徴付けられている ([1])

定義 3.9. $[0,\infty)$ 上の自由無限分解可能分布 μ が**自由正則分布**であるとは、任意の $t > 0$ に対して $\mu^{\boxplus t}$ が $[0,\infty)$ 上の確率分布になることをいう。

なお、自由正則分布のクラスと $[0,\infty)$ 上の自由無限分解可能分布のクラスは一致しないことが知られている。さらに自由正則分布は R-変換によって次のような特徴づけがある。

命題 3.10. *[1]* μ が自由正則分布であることと、ある $\eta' \geq 0$ と $\nu((-\infty, 0]) = 0$ となる自由 *Lévy* 測度 ν が存在して、

$$R_\mu(z) = \eta' z + \int \left(\frac{1}{1-zx} - 1 \right) \nu(dx), \qquad z \in \mathbb{C}^-$$

と表されることが同値である。

4　主結果

Fuss-Catalan 分布 $\mu(p,r)$ の密度関数の評価 (第 2 節) や自由 Lévy 測度を調べることによって、$\mu(p,r)$ が自由無限分解可能、自由自己分解可能、単峰となる条件が得られたので、それぞれの結果を報告する。まず $\mu(p,r)$ の自由無限分解可能性については以下の結果が得られた。

定理 4.1. *[14]* $\mu(p,r)$ が自由無限分解可能であることと、$1 \leq p = r \leq 2$ または $0 < r < \min\{p/2, p-1\}$ であることが同値。

このとき $\mu(p,r)$ の R-変換は次のように与えられる。

命題 4.2. *[14]* 任意の $0 < r \leq \min\{p/2, p-1\}$ と $z \in \mathbb{C}^-$ に対して、

$$R_{\mu(p,r)}(z) = \int_0^{(p-r)^{p-r}(p-r-1)^{1-(p-r)}} \left(\frac{1}{1-zx} - 1\right) W_{p-r,r}(x)dx,$$

ここで $W_{p-r,r}(t)$ は $\mu(p-r,r)$ の密度関数であることに注意。

とくに $\mu(p,p)$ と $\mu(p,p-1)$ の R-変換に関しては、具体的な表示が得られる。計算にはガウスの超幾何級数の表示が必要なため、ここでは結果のみを記述する。

命題 4.3. *[14]* 任意の $1 < p < 2$, $z \in \mathbb{C}^-$ に対して、

$$R_{\mu(p,p)}(z) = pz + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1-zx} - 1 - zx\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\right) \times \left(-\frac{\sin(p\pi)}{\pi|x|}\right) \left(\frac{1+x}{-x}\right)^p \mathbf{1}_{(-1,0)}(x)dx,$$

$$R_{\mu(p,p-1)}(z) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1-zx} - 1\right) \times \left(-\frac{\sin(p\pi)}{\pi}\right) x^{p-2}(1-x)^{1-p}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)dx,$$

$\mu(p,p)$ の R-変換の表示から $1 \leq p \leq 2$ のとき $\mu(p,p)$ は自由自己分解可能分布になる。また $0 < r \leq \min\{p/2, p-1\}$ のときの $\mu(p,r)$ の自由 Lévy 測度 $W_{p-r,r}(x)dx$ の振る舞いを調べることによって、3 節での特徴づけから $\mu(p,r)$ の自由自己分解可能性と自由正則性の条件が確定する。

定理 4.4. *[14]* 次が成立する。

(1) $\mu(p,r)$ が自由自己分解可能であることと、$1 \leq p = r \leq 2$ であることが同値。
(2) $\mu(p,r)$ が自由正則であることと、$0 < r \leq \min\{p/2, p-1\}$ または $p = r = 1$ であることが同値。

$\mu(p,r)$ の自由自己分解可能性と $\kappa_n(\mu(p,r)) = A_n(p-r,r)$ であることから、次の簡単な系が従う。

系 4.5. $\{nA_n(p-r,r)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が条件付き正定値であることと、$1 \leq p = r \leq 2$ であることは同値である。

自由自己分解可能分布は単峰なので $1 \leq p \leq 2$ のとき $\mu(p,p)$ は単峰である。実は、密度関数である $W_{p,p}(x)$ をより詳しく調べることで、さらに強い結果が示される。他の Fuss-Catalan 分布の単峰性も密度関数を詳しく調べることでわかる。

定理 4.6. *[14]* 次が成立する。

(1) $\mu(p,p)$ は全ての $p \geq 1$ で単峰である。
(2) $\mu(p,p-1)$ は全ての $p \geq 1$ で単峰である。
(3) $\mu(1,r)$ は全ての $0 < r < 1$ で単峰にならない。

(4) $\mu(2,r)$ は全ての $1 < r < r_0(2)$ で単峰になる。ここで $r_0(2)$ は次の方程式：

$$r\sin\left(\frac{3r+3}{2r+4}\pi\right) + 2\sin\left(\frac{3r}{2r+4}\pi\right)\cos\left(\frac{3}{2r+4}\pi\right) = 0$$

の区間 $(1,2)$ 内の一意解 $r_0(2)$ である。数値計算では $r_0(2) = 1.6756...$ となる。密度関数 $W_{2,r}$ の変化については図 *3* を参照のこと。

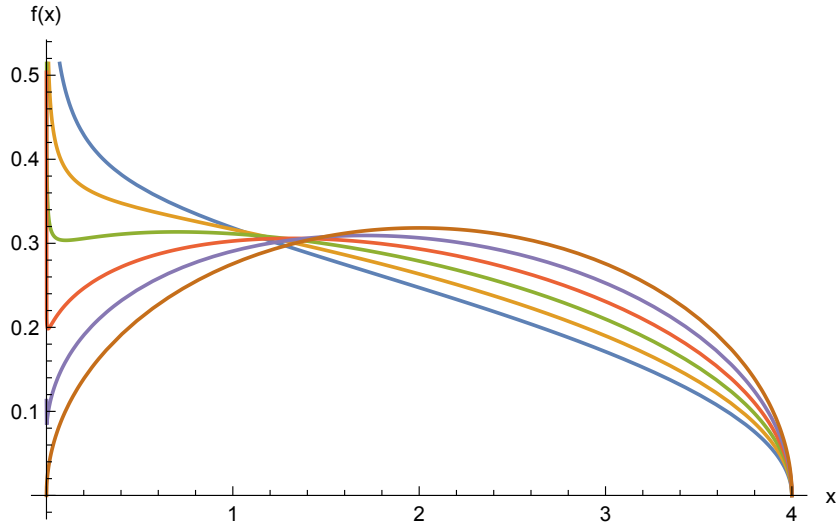

図 3　密度関数 $W_{2,r}$ の概形 (下から $r = 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, .2$ のとき)

定理 4.5 を元に、$\mu(p,r)$ の単峰性の相転移について以下のような予想があげられる。なお、$p = 2$ の時は正しい。

Conjecture 4.7. 任意の $p > 1$ に対して、$r_0(p) \in (p-1, p)$ が *(*一意的に*)* 存在して、$\mu(p,r)$ が単峰となるための必要十分条件は、$p = r$ または $0 < r < r_0(p)$ である。

まとめとして、$\mu(p,r)$ の自由自己分解可能性、自由正則性および単峰性の相転移を表す部分は以下の図で表すことができる。

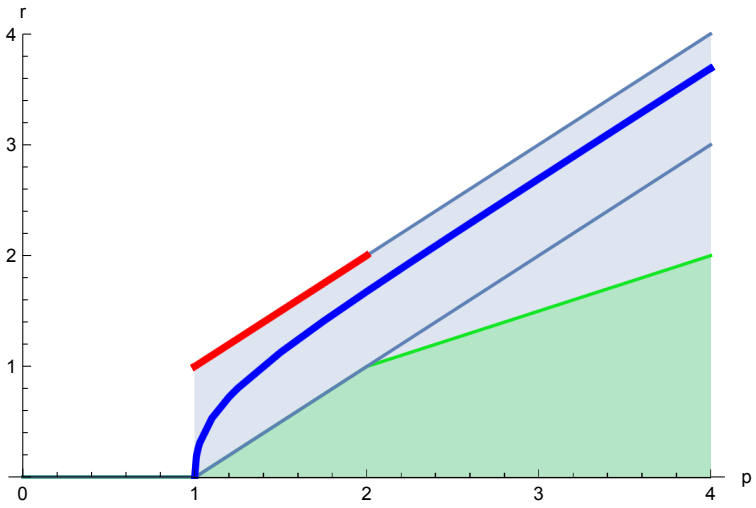

図 4　$\mu(p,r)$ の性質について

参考文献

[1] O. Arizmendi, T. Hasebe, N. Sakuma, On the law of Free Subordinators. ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat., **10** (2013), no. 1, 271–291.

[2] D. Armstrong, Generalized noncrossing partitions and combinatorics of Coxeter groups, Ph.D. thesis, Cornell University, 2006; Memoirs of the American Mathematical Society 2009; 159 pp; Electronic ISBN: 978-1-4704-0563-2.

[3] O.E. Barndorff-Nielsen, S. Thorbjørnsen, Self-decomposability and Lévy processes in free probability, Bernoulli **8** (3), 2002, 323-366.

[4] H. Bercovici and D. Voiculescu, Free convolution of measures with unbounded support, Indiana Univ. Math. J. **42**, no. 3 (1993), 733–773.

[5] P. J. Forrester, D.-Z. Liu, Raney distributions and random matrix theory. *J. Stat. Phys.*, **158** (2015), no. 5, 1051–1082.

[6] T. Hasebe, N. Sakuma and S. Thorbjørnsen, The normal distribution is freely selfdecomposable, Int. Math. Res. Not. IMRN, vol. 2019, Issue **6**, 1758-1787.

[7] T. Hasebe, S. Thorbjørnsen, Unimodality of the freely selfdecomposable probability laws. J. Theoret. Probab., **29** (2016), no. 3, 922–940.

[8] J.-G. Liu and R. Pego, On generating functions of Hausdorff moment sequences. *Trans. Am. Math. Soc.*, **368** (2016), no. 12, 8499–8518.

[9] H. Maassen. Addition of freely independent random variables. J. Funct. Anal. **106** (2), 409-438 (1992).

[10] J. A. Mingo, R. Speicher, Free Probability and Random Matrices, Fields Institute Monographs **37** (2017) Springer-Verlag New York, XIV, 336.

[11] W. Młotkowski, Fuss-Catalan numbers in noncommutative probability. *Doc. Math.*, **15** (2010), 939–955.

[12] W. Młotkowski, K. A. Penson, Probability distributions with binomial moments. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **17** (2014), no. 2, 1450014, 32 pp.

[13] W. Młotkowski, K. A. Penson, K. Życzkowski, Densities of the Raney distributions. *Doc. Math.*, **18** (2013), 1573–1596.

[14] W. Młotkowski, N. Sakuma, Y. Ueda, Free self-decomposability and unimodality of the Fuss-Catalan distributions, arXiv:1908.07887.

[15] A. Nica, R. Speicher, Lectures on the combinatorics of free probability. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, **335**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006. xvi+417 pp.

[16] K. Sato, Lévy processes and infinitely divisible distributions, volume **68** of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge (2013). ISBN 978-1-107-65649-9.

[17] D. V. Voiculescu, Addition of certain noncommuting random variables, J. Funct. Anal. **66** (3) (1986), pp. 323-346.

[18] M. Yamazato. Unimodality of infinitely divisible distribution functions of class L. Ann. Probab. **6** (4), 523-531 (1978).