

あるトロピカル曲面のレイディアンズ障害について

東京大学大学院 数理科学研究科 数理科学専攻

筒井 勇樹 (Yuki TSUTSUI)

1 はじめに

トロピカル代数幾何は代数幾何の組合せ的類似物を研究する分野である。[\[MS15\]](#)の言葉を借りると、トロピカル幾何は代数幾何の「組合せ的な影」だともいえる。多様体や多項式から「組合せ的な影」であるトロピカル多様体やトロピカル多項式を取り出す手法が「トロピカル化」である。体における加法 $x + y$ や乗法 $x \cdot y$ は「トロピカル化」を行うことでそれぞれ $\max\{x, y\}$, $x + y$ に変換される。表 1 は多項式と「トロピカル化」で得られる (max-plus 代数上の) トロピカル多項式との対応表である¹。この対応に基づくトロピカル幾何は標語的には「トロピカル半体 $\mathbb{T}$ 上の幾何学」とも言える。こういった「組合せ的な影」から元の代数多様体の情報をどれだけ回復できるかがトロピカル幾何の主要なテーマの一つである。

係数半体 ²	K	$\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$	乗法単位元	1	0
乗法群	$K^\times$	$\mathbb{T}^\times = \mathbb{R}$	単項式	ax^i	$b + ix$
加法	$+$	$\max$	多項式	$f = \sum_{i=1}^n a_i x^i$	$f = \max_{i=1, \dots, n} \{b_i + ix\}$
乗法	$\cdot$	$+$	零点	$f(x) = 0$ となる点	f が狭義凸または
零元	0	$-\infty$			$f(x) = -\infty$ となる点

表 1: 多項式とトロピカル多項式との対応表

トロピカル幾何にはいくつかの流儀が存在するが、得られるトロピカル多様体は基本的には凸多面体をいくつか貼り合わせたようなものになっており (図 2)、トロピカル多項式はその上の区分線形な凸関数を与える。そのためトロピカル幾何はトーリック幾何と非常に相性がよい³。

しかしトーリック幾何とは異なり一つ多様体から得られるトロピカル多様体は「トロピカル化」の仕方によって大きく変化する。全く異なる多様体から同じトロピカル多様体を得られることもままある。そのためどのトロピカル多様体がトロピカル化する前の多様体の「よい類似」になっているのかについても注意する必要があるがでてくる。

一方でトロピカル多様体やトロピカル多項式はただの「組合せ的な影」ではなくれっきとした幾何学的な対象物である。そのため「トロピカル化」を介さなくても直接的に代数幾何学の類似を考察することができる。この立場でトロピカル幾何を展開した場合は「トロピカル化」によって生じる不確定性を気にすることなく、何がトロピカル幾何において重要な不変量であるかや、他分野との対応関係などについて考察しやすい仕組みができると期待できる⁴。

本稿では基本的に後者の立場から [\[GS06\]](#) や [\[KS06\]](#) など扱われている特異点つきアファイン多様体に関するトロピカル幾何、とくに特異点付きトロピカルアファイン曲面と複素曲面との類似について紹介する。この類似を見る上でアファイン多様体のレイディアンズ障害 [\[GH84\]](#) が中心的な役割を果たす。そのほかの流儀のトロピカル幾何について知りたい場合は、例えば [\[BIMS15, JL17, MS15\]](#) やそれらで引用されている文献を参照せよ。なお本稿では中心的な役割を果たすわけではないが、代数幾何との類似を説明する際には表 1 の類似を念頭に入れて説明していく。トロピカル代数に関する基本的な話は [\[BIMS15, §1\]](#) や [\[MS15, Chapter 1\]](#) などを参照せよ。

¹なお流儀によって min-plus 代数を用いることも多く、少数だが超体 (hyperfield) [\[Vir10\]](#) を用いた流儀も存在する。

²ここでの半体とは体の定義から加法の逆元の公理を除いて零元の公理を代わりに加えたものとする。

³トロピカルトーリック多様体については [\[梶原 07\]](#) や [\[MS15, §6.2\]](#) などを参照せよ。

⁴ただし、トロピカル幾何には「加法の逆元」がないため代数的な性質があまりよくなくそれを補う新たな枠組みや考え方が必要となる。例えばトロピカル幾何における「線形代数」は非常に複雑である。

2 特異点つきトロピカルアファイン多様体

ここでは複素曲面と特異点つきトロピカルアファイン多様体との類似を考察するために必要な定義について説明する。(今後、複素曲面とどの様な対応関係を与えるかについて先に知りたい場合は複素クンマー曲面とトロピカルクンマー曲面との対応を表 3 に載せているので適宜参照せよ。) 基本的にトロピカル多様体⁵は凸多面体を適当に張り合わせたものとなるが、円周 S^1 のように多様体として表現されるトロピカル多様体はトロピカルアファイン多様体と呼ばれる。

定義 2.1. トロピカルアファイン多様体 (tropical affine manifold) (resp. アファイン多様体 (affine manifold), 整アファイン多様体 (integral affine manifold)) とは実 n 次元多様体 B_0 と各座標変換が局所的にアファイン変換 $\psi_j \circ \psi_i^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n$ (resp. $\psi_j \circ \psi_i^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$, $\psi_j \circ \psi_i^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^n$) となる極大な座標近傍系 $\mathcal{U} = \{(U_i, \psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{Z}^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})\}_{i \in I}$ との組である。⁶

例 2.2. (1) $\mathbb{R}^n$ には標準的なトロピカルアファイン多様体の構造が入る。

(2) $\mathbb{R}^n$ を (1) と同じとし、 $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の加法に関する階数 n の自由アーベル部分群とすると、 $\mathbb{R}^n/\Lambda$ には $\mathbb{R}^n$ より誘導されるトロピカルアファイン多様体としての構造が入る。これを トロピカルトーラスと呼び、複素トーラスのトロピカル幾何的な類似物である [MZ08]。

アファイン多様体は多様体とその接束上の捻じれの無い平坦な接続 ∇ の組としても表現される (e.g. [志磨 01, 定義 1.2.3])。アファイン多様体 $(B_0, \mathcal{U})$ 上の (擬) リーマン計量 g が、各アファイン座標近傍 $(U, \psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n; p \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p))) \in \mathcal{U}$ に対してある関数 $K : U \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し $g|_U = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 K}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \otimes dx^j$ と表されるとき、 g をヘッセ計量と呼びその組 $(B_0, \mathcal{U}, g)$ をヘッセ多様体 (Hessian manifold) またはアファインケーラー多様体 (Affine Kähler manifold) と呼ぶ。 B_0 上のヘッセ計量は B_0 から誘導されたアファイン構造を持つ普遍被覆空間 $\tilde{B}_0$ 上のある条件を満たす関数 $K : \tilde{B}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ から定義される。ヘッセ多様体は統計多様体 (e.g. [黒瀬 04]) の一種⁷である。

以降、簡単のためアファイン多様体 $(B_0, \mathcal{U})$ は単に B_0 と書く。各座標変換がアファイン変換で表されるという条件は非常に強い条件である。例えば連結かつコンパクトな二次元アファイン多様体の位相型はトーラスとクラインの壺しか存在しない [Mil58]。また、コンパクトアファイン多様体 B_0 の位相的オイラー数 $\chi_{\mathrm{top}}(B_0)$ は常に 0 であると予想されている (Chern's conjecture)。

そのためトロピカル幾何では次の特異点を許したアファイン多様体も扱う。

定義 2.3. n 次元特異点つきトロピカルアファイン多様体 (tropical affine manifold with singularities) B とはトロピカルアファイン多様体の開埋め込み $\iota : B_0 \hookrightarrow B$ をもつ位相多様体であり補集合 $B \setminus B_0$ が余次元 2 の局所閉部分多様体の有限和となるものである。

以降本稿でアファイン変換の線形変換成分は特に断らない限り皆整数係数行列とする。トロピカルアファイン多様体 B_0 の各座標近傍 $\psi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ には $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) = 1$ を誘導する $\mathbb{R}^n$ 上のルベグ測度による体積が定義され、アファイン同型変換において不変である。さらに B_0 が整アファイン多様体のとき、座標近傍系 $\mathcal{U}$ によって B_0 上の格子点が定義される。そのため整アファイン多様体 B_0 は格子多面体の類似物だと思える。 $B_0(\mathbb{Z})$ を B_0 上の格子点全体の集合とする。

一方で定義 2.3 には特異点集合 $B \setminus B_0$ 近傍の構造に制約がほとんどないため、次の条件を課す。今回は簡単のため B が二次元の場合のみの仮定で考える。

条件 2.4. 任意の特異点 $v \in B \setminus B_0$ に対して v を頂点とした (有限) 三角形分割可能な近傍が存在し、各三角形が $\mathbb{R}^2$ 内の三角形とアファイン同型である。

⁵抽象的なトロピカル多様体の定義は例えば [BIMS15, §7] にある。

⁶トロピカルアファイン多様体の方を整アファイン多様体と呼ぶ場合も多い。本稿では Gross の最近の呼称 (e.g. [Gro11]) に従ったが、こちらでは min-plus 代数を採用している。

⁷統計多様体は Codazzi 多様体 (e.g. [志磨 01, §2.5]) とも呼ばれたり別の意味を指す場合 (e.g. [藤原 15, §5.4]) があるが、どれが一般的な呼称かは筆者はよく知らない。

例 2.5. B_0 を $\mathbb{R}^2$ とし標準的なトロピカルアファイン構造を入れる。 B を $\mathbb{R}^2$ の一点コンパクト化とし $\iota: B_0 \hookrightarrow B$ を標準的な開埋め込みとする。このとき B は条件 2.4 を満たさない。

以降条件 2.4 を満たす特異点つきトロピカルアファイン曲面を TASS と呼ぶ。 B を TASS とすると面積 $\text{vol}(B)$ が同様に定義され、 B_0 が整アファイン多様体ならば格子点集合 $B(\mathbb{Z})$ も定義される。特にコンパクトな TASS は、条件 2.4 による特異点の近傍の面積は有限となるため $\text{vol}(B)$ は有限となる。以下に TASS の例を三つ挙げるがそれらの関係については 4 節で議論する。

例 2.6. (1) $T := \mathbb{R}^2/\Lambda$ を二次元トロピカルトーラスとする。すると、 T 上の写像 $-1_T: T \rightarrow T; x \mapsto -x$ による商 $B = \text{Km}(T) := T/ -1_T$ は球面 $S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$ と同相であり、TASS の構造が T から誘導される。これをトロピカルクンマー曲面と呼ぶ (図 1)。薄い灰色部分が T の基本領域であり、濃い灰色部分が $\text{Km}(T)$ の基本領域である。特異点集合 $B \setminus B_0$ は -1_T の固定点集合の 4 点である (図 1 の白丸)。なおこの構成は [FRSS18, §5.7] でも考えられている。[RSS14] ではトロピカル化によって本稿とは異なるトロピカルクンマー曲面を定義している。

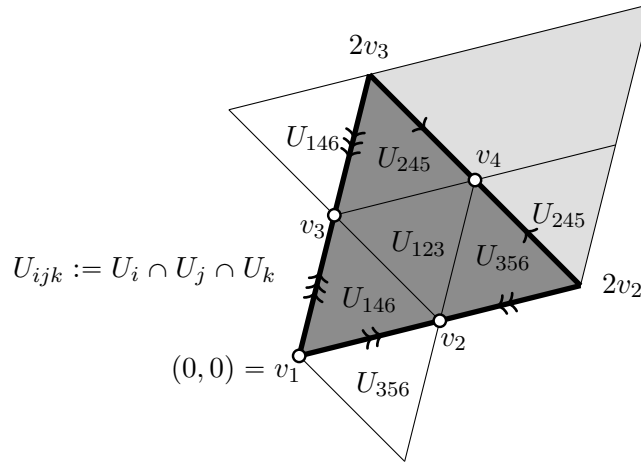


図 1: トロピカルクンマー面 $B = \text{Km}(T)$ と B_0 の座標近傍系 $\{(U_i, \psi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^2)\}_{i=1,\dots,6}$
(2) 結晶群 (crystallographic group) G とは、 $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ の離散部分群で群作用による商 $\mathbb{R}^n/G$ がコンパクトなものである。 $n = 2$ のとき G を壁紙群 (wallpaper group) と呼び、実アファイン変換で共役な同値類は 17 種類存在する (例えば [河野 15] を見よ)。このとき $\mathbb{R}^2/G$ には平坦軌道体 (flat orbifold) の構造が入り、特に底空間 $\mathbb{R}^2/G$ には (境界も許した) TASS の構造が入る。得られた TASS は代数曲面の類似物であり、表 2 のような対応が存在する⁸。表 2 の $\mathbb{TP}^1$ はトロピカル

二次元平坦軌道体	トロピカル —
T (2 次元トーラス)	アーベル曲面
K (クラインの壺)	超楕円曲面
$S^2(2, 2, 2, 2) = T/ -1_T = \text{Km}(T)$	クンマー曲面
$S^2(3, 3, 3), S^2(2, 4, 4), S^2(2, 3, 6)$	クンマー型 K3 曲面
$\mathbb{RP}^2(2, 2)$ (実射影平面)	エンリケス曲面
$[0, 1] \times S^1$ (円筒=「閉区間×円周」)	$\mathbb{TP}^1 \times S^1$
$(S^1)^2/\mathfrak{S}_2$ (メビウスの帯)	$\mathbb{TP}^1$ -束
$D^2(a, b, c; p, q, r)$ (閉円盤と同相)	有理曲面

表 2: 平坦軌道体とトロピカル曲面の対応 (表の下半分は底空間が境界つき多様体の場合)

射影直線のトロピカルモーメント写像 [梶原 07, 3.4 定義] による像のことで、閉区間と一致する。

⁸この対応は、平坦トーラスと主偏極トロピカルトーラスとの対応を基に与えるので正確には「偏極つき」である。

(3) $(n+1)$ -変数トロピカルローラン多項式 $f_n \in \mathbb{T}[x_0^\pm, \dots, x_n^\pm]$ の零点集合、つまり f_n が微分不可能な点の集合 $V_{\mathbb{T}}(f_n) (\subset \mathbb{R}^{n+1} = (\mathbb{T}^\times)^{n+1})$ はトロピカル超曲面⁹と呼ばれ n 次元の凸多面体の集まりとなる。 $f_n = \max\{x_0, \dots, x_n, -(x_0 + \dots + x_n), 1\}$ としたとき、 $V_{\mathbb{T}}(f_1)$ には三つの無限長の辺と三つの有限長の辺があり、 $V_{\mathbb{T}}(f_2)$ には四つの有界な面 (図 2 の濃いグレーの部分) と六つの無限に延びる面 (図 2 の薄いグレーの部分) が存在する。 $V_{\mathbb{T}}(f_n)$ の有界な (n 次元) 面の和集合は $n+1$ 次元単体の境界 $\partial\Delta_{n+1} (\simeq S^n)$ と同相である。

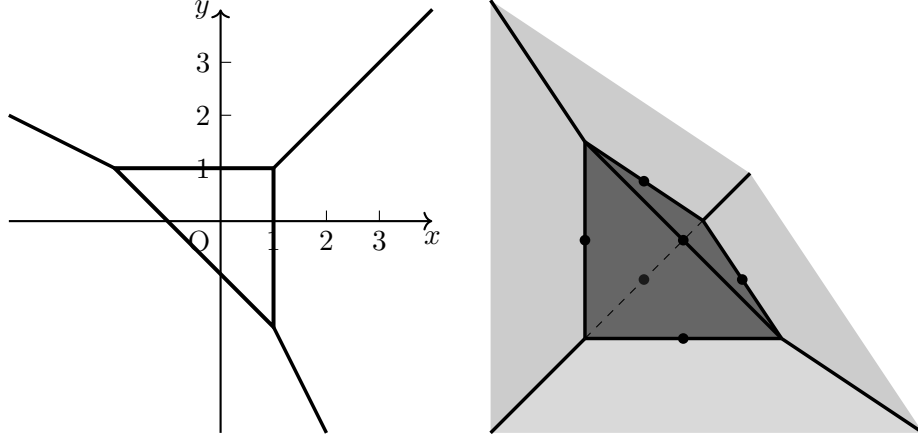


図 2: トロピカル曲線 $V_{\mathbb{T}}(f_1)$ とトロピカル曲面 $V_{\mathbb{T}}(f_2)$

$V_{\mathbb{T}}(f_1)$ は三つの無限長辺に無限遠点を付け加えることでコンパクト化 $\overline{V_{\mathbb{T}}(f_1)}$ することができる。一方で $\overline{V_{\mathbb{T}}(f_1)}$ は一次元トロピカルトーラスの頂点と無限長の辺 $[0, +\infty]$ の原点 0 とを適切に張り合わせることを三回行うことでも得られる。この操作やこの逆の操作をトロピカル改変 (tropical modification) と呼ぶ。[Yam18] では、[GS06] の理論を基にこのトロピカル改変に相当する操作を $n=2$ の場合で局所的に行うことで有界な面の和集合に対して TASS (トロピカル K3 超曲面) を構成した。この場合特異点集合 $B \setminus B_0$ は 6 点集合であり、 $\overline{V_{\mathbb{T}}(f_2)}$ の有界な辺上に存在する (図 2 の黒丸)。また、この構成と強い関係があるものとして [KS06, 4.2.5] を挙げておく。

3 レイディアンズ障害と格子

この節では、特異点つきアファイン多様体の重要な不変量であるレイディアンズ障害とその基本的な性質について説明する。簡単のため、この節では B を B_0 の座標近傍系 $\mathcal{U} = \{(U_i, \psi_i)\}$ の各座標変換が皆 $\psi_i \circ \psi_j^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^2$ となる TASS とする。このとき B_0 の基本群のホロノミー表現を $\tilde{\rho}_{B_0} : \pi_1(B_0) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^2$ とおく。 $\mathcal{T}_{B_0}$ を座標系 $\mathcal{U}$ から得られる次の自明化に対応する B_0 上の局所定数層とし、 $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}$ を整数ベクトルのなす $\mathcal{T}_{B_0}$ の部分層とする。

$$\theta_i : TU_i \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^2; (x, v) \mapsto (x, d\psi_{i,x}(v)) \quad (1)$$

$\mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}$ にはホロノミー表現 $\tilde{\rho}_{B_0}$ と整合的なモノドロミー表現 $\rho_{B_0} : \pi_1(B_0) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が対応する。 $\mathbb{Z}_{B_0}$ を $\mathbb{Z}$ -定数層、 $\mathbb{R}_{B_0}$ を $\mathbb{R}$ -定数層とし、 $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{B_0}}(\mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}, \mathbb{Z}_{B_0})$, $\mathcal{T}_{B_0}^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}_{B_0}}(\mathcal{T}_{B_0}, \mathbb{R}_{B_0})$ をそれぞれ $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}$ と $\mathcal{T}_{B_0}$ の双対層とする。

U_v を特異点 $v \in B \setminus B_0$ の開近傍とし、 $A_v \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を $U_v \setminus v$ 周りのモノドロミー行列とする。 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$ であるため A_v と $(A_v^T)^{-1}$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の中で共役となる。そのため $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}$ と $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^\vee$ に付随するモノドロミー表現も共役となるため、 $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}$ と $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^\vee$ は同型である。

条件 2.4 より TASS の各特異点近傍にはモノドロミー表現 $\rho_v : \mathbb{Z} \rightarrow \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \langle u, v | u^3 = v^2 \rangle$ と整数値 $i_{\mathrm{loc}}(v) \in \frac{1}{12}\mathbb{Z}$ が定義され、 B が向き付け可能なコンパクト TASS のとき、ガウス＝ボンネ型

⁹ トロピカル超曲面についての基本事項は [MS15, Chapter 3,6] や [BIMS15, §5] を参照せよ。

の定理 $\sum_{v \in B \setminus B_0} i_{\text{loc}}(v) = \chi_{\text{top}}(B)$ が成立する [KS06, Theorem 2]。一般に、(コンパクトな) トロピカル多様体のベッチ数 $b_i = \dim H^i(B, \mathbb{R})$ は、複素多様体 X のホッジ数 $h^{0,i} = \dim H^i(X, \mathcal{O}_X)$ の類似物と考えられている (e.g. [BIMS15, §7.7])。

例 3.1. (i) I_2 を 2 次の単位行列とすると、トロピカルクンマー曲面 (図 1) の各特異点 v (白丸) の周りのモノドロミー行列は $A_{I_0^*} := -I_2$ となり、 $12i_{\text{loc}}(v) = 6$ となる。このような特異点を I_0^* 型特異点と呼ぶ。

(ii) 図 2 右の曲面上の各特異点 v (黒丸) の周りのモノドロミー行列は $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と共役であり、 $12i_{\text{loc}}(v) = 4$ である。一般にモノドロミー行列が $A_{I_n} := \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($n \geq 1$) と共役かつ $12i_{\text{loc}}(v) = n$ となる特異点 v を I_n 型もしくは focus-focus 型特異点と呼び [GS06] や [Yam18] で得られる TASS はこの特異点型のみを持つ。focus-focus 型特異点は (i) の場合と異なり各特異点に乗る辺の方向に少し動かしてもホロノミー表現は変化しない。このようにホロノミー表現を変えない特異点つきアファイン多様体の変形操作を "moving worms" [KS06, 3.3] と呼ぶ。

以降 B をコンパクトな TASS とする。 $\mathbb{R}_B$ を B 上の定数層、 Aff_{B_0} を B_0 上の局所アファインな関数の層とし、 $\text{Aff}_{\mathbb{Z}, B_0}$ を傾きが整数値の局所アファイン関数の層とする。TASS は Fixed Points Properties [KS06, 3.1] を満たすため、開埋め込み $\iota: B_0 \rightarrow B$ に対し、次の層の完全列が得られる。

$$0 \rightarrow \mathbb{R}_B \rightarrow \iota_* \text{Aff}_{\mathbb{Z}, B_0} \rightarrow \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^\vee \rightarrow 0 \quad (2)$$

(2) は複素多様体の指数層系列の類似であり、層の射 $\iota_* \text{Aff}_{\mathbb{Z}, B_0} \rightarrow \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^\vee$ は代数閉体 k 上の非特異射影多様体で定義される層の射 $d \log: \mathcal{O}_X^\times \rightarrow \Omega_X; f \mapsto f^{-1}df$ の類似物である (e.g. [Har77, III Ex 7.4, Appendix B 5])。この短完全列に関する拡大類 c_B は $H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0})$ の元を与えるが、これを B のレイディアンス障害 (radiance obstruction) と呼ぶ [GH84, GS06]。

拡大類の性質から連結写像はレイディアンス障害のカップ積で表される (e.g. [Ive86, I.8.8])。

$$\delta: H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^\vee) \rightarrow H^2(B, \mathbb{R}); d \mapsto c_B \cup d \quad (3)$$

よって次の列が与えられる。

$$H^1(B, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(B, \iota_* \text{Aff}_{\mathbb{Z}, B_0}) \xrightarrow{c_1} H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^\vee) \xrightarrow{\delta} H^2(B, \mathbb{R}) \quad (4)$$

これは指数層完全列より得られる次の列の類似物である。

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \quad (5)$$

これより $\text{Im}(c_1) := \text{Im}(c_1: H^1(B, \iota_* \text{Aff}_{\mathbb{Z}, B_0}) \rightarrow H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^\vee))$ は複素曲面のネロン＝セベリ群の類似だと考えられる。 $H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0})_{\text{free}} := H^1(B, \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}) / \text{torsion}$ とすると $H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0})_{\text{free}}$ は有限階数の自由 $\mathbb{Z}$ -加群となる。さらに B が向き付けられているなら、 $H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0})$ には $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^{\otimes 2} \rightarrow \bigwedge_{i=1}^2 \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0} \simeq \mathbb{Z}_{B_0}$ から誘導されるカップ積 $\cup$ が存在する¹⁰。

$$\cup: H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0})_{\text{free}} \times H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0})_{\text{free}} \rightarrow \mathbb{Z}; (C, D) \mapsto C \cup D \quad (6)$$

このカップ積は自己交点数 $D \cup D$ がすべて偶数となる非退化対称形式となる。つまり $H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0})_{\text{free}}$ は偶格子である。次の命題も同様に基本的である。

命題 3.2. (i) B が向き付けられたコンパクトな TASS ならば、 $c_B \cup c_B = 2 \text{vol}(B)$ 。

(ii) 特に B が格子三角形による三角形分割をもつ¹¹向き付けられたコンパクトな TASS ならば、

$$\sharp(B(\mathbb{Z})) = \frac{c_B \cup c_B}{2} + \chi_{\text{top}}(B) = \text{vol}(B) + \chi_{\text{top}}(B) \quad (7)$$

ここで $\sharp(B(\mathbb{Z}))$ とは、 $B(\mathbb{Z})$ の点の個数である。

¹⁰一般のコンパクト TASS の場合にも同様にカップ積を与えることができる。

¹¹この条件は $c_B \in H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0})$ の場合に弱めることができると思われる。

B をトロピカルクンマー曲面とすると式 (7) は $\sharp(B(\mathbb{Z})) = \frac{c_B \cup c_B}{2} + 2$ となるため、(ii) は複素 K3 曲面の豊富な直線束 L に関するリーマン＝ロッホの定理 $\chi(X, L) = \chi(X, K_X \otimes L) = \int_X \frac{c_1(L)^2}{2} + 2$ のトロピカル類似である。(この類似については後でもう一度説明する。) また式 (7) の左辺と右辺に注目すればこの命題は閉曲面におけるピックの公式だと解釈することもできる。よく知られているように、凸多角形のピックの公式は射影トーリック曲面におけるリーマン＝ロッホの定理と対応する。とくにトーリックファノ多様体の豊富なトーラス不変な因子から得られるトロピカル K3 超曲面 ([Yam18]) の場合は通常のリーマン＝ロッホの定理より示すことができる。なのでこれより一般のトロピカル多様体においてもリーマン＝ロッホの定理¹²やエルハート多項式の理論の類似が存在すると期待できる。

例 3.3 (TASS の対称積). 高次元の特異点付きトロピカルアファイン多様体の点の数え上げの例として次を挙げる。 B を球面と同相かつ格子三角形分割を持つ TASS とする。 $\mathfrak{S}_n$ を n 次の対称群とし $B^{[n]} := B^n / \mathfrak{S}_n$ を B の n 次対称積とする。このとき得られる特異点付きトロピカルアファイン多様体は複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ と同相となる。これは K3 曲面の n 点のヒルベルトスキームとして得られる超ケーラー多様体の類似である。重複組合せの総数を考えることで次の式が得られる。

$$\sharp(B^{[n]}(\mathbb{Z})) = \binom{\sharp(B(\mathbb{Z})) + n - 1}{n} = \binom{\frac{c_B \cup c_B}{2} + n + 1}{n} \quad (8)$$

4 トロピカル K3 曲面とトロピカルクンマー曲面

4.1 トロピカル K3 曲面

この節ではトロピカル K3 曲面とクンマー曲面について考察する。まず複素 K3 曲面について [金銅 15] などを参考に復習する。複素 K3 曲面 X とは標準束 K_X が自明かつ $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ である 2 次元コンパクト非特異複素曲面である。 $H^2(X, \mathbb{Z})$ は自然な格子構造をもち階数 22 のユニモジュラー格子 $U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$ と同型となる。ここで U とはカルタン行列が $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と同型な格子であり $E_8(-1)$ とは E_8 型ディンキン図形に対応するカルタン行列を持つ階数 8 の負定値格子である。 ω_X を X 上で至るところ 0 とならない正則 2-形式とすると、 ω_X はリーマン条件

$$\langle \operatorname{Re}(\omega_X), \operatorname{Re}(\omega_X) \rangle = \langle \operatorname{Im}(\omega_X), \operatorname{Im}(\omega_X) \rangle > 0, \langle \operatorname{Re}(\omega_X), \operatorname{Im}(\omega_X) \rangle = 0 \quad (9)$$

を満たしている。レフシェッツの定理より $\operatorname{Pic}(X) \simeq \operatorname{NS}(X) = \{x \in H^2(X, \mathbb{Z}) \mid \langle \omega_X, x \rangle = 0\}$ となる。代数的複素 K3 曲面のネロン＝セベリ群 $\operatorname{NS}(X)$ は正の固有値を 1 つもつ $H^2(X, \mathbb{Z})$ の部分格子となり、その直交補格子である超越格子は正の固有値を 2 つもつ。なお複素代数曲面の超越格子は双有理不変量である。これらをトロピカル K3 曲面の場合と比較する。

定義 4.1. トロピカル K3 曲面 (*tropical K3 surface*) B とは球面 S^2 と同相かつ、各特異点 $v \in B \setminus B_0$ に対して $i_{\operatorname{loc}}(v) \geq 0$ であるような TASS である。

この定義は [OO18, §4.3] における定義とは少し異なる。 B をトロピカル K3 曲面とすると $\sharp(B \setminus B_0) \geq 3$ である。 $\sharp(B \setminus B_0) = 3$ となる例は表 2 にある。[KS06] では 24 点の I_1 型特異点を持つトロピカル K3 曲面を中心的に扱っており、このとき $H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^\vee)$ は階数 20 のユニモジュラー格子 $U^{\oplus 2} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$ と同型となる。 $H^1(B, \mathbb{R}) = 0$ なので式 (2) より $H^1(B, \iota_* \operatorname{Aff}_{\mathbb{Z}, B_0}) \simeq \operatorname{Im}(c_1) = \{x \in H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^\vee) \mid c_B \cup x = 0\}$ となる。 $c_B \cup c_B > 0$ はリーマン条件の類似物である。

トロピカルクンマー曲面は二次元トロピカルトーラスの有限群の商として定義した。これと格子の一般論を用いることで次が示される。

¹²現在一般的な因子に関するトロピカル多様体におけるリーマン＝ロッホの定理が証明されているのは曲線の場合のみであるが、トロピカルアーベル多様体に関してはリーマン＝ロッホ不等式が [Sum18] で示されている。

定理 4.2. 2次元トロピカルトーラス T とそのトロピカルクンマー曲面 $\text{Km}(T)$ に対して自然な群同型射 $q_* : H^1(T, \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, T}) \xrightarrow{\sim} H^1(\text{Km}(T), \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, \text{Km}(T)_0})$ が存在し、カップ積に関して $q_*(D) \cup q_*(D) = 2D \cup D$, $(q_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})(c_T) = 2c_{\text{Km}(T)}$ を満たす。

これは複素トーラスとクンマー曲面に関する古典的な結果の類似であり、証明も古典的な場合の証明とほぼ同様に行うことができる。以上のことを纏めると以下のような表となる。

	複素クンマー曲面	トロピカルクンマー曲面
二次元トーラス 標準束の自明性	$T_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}^2 + \Lambda) \simeq (\mathbb{C}^\times)^2/q^\Lambda$ ¹³ $\wedge_{i=1}^2 \Omega_{\text{Km}(T_{\mathbb{C}})}^1 \simeq \mathcal{O}_{\text{Km}(T_{\mathbb{C}})}$ $h^i(\text{Km}(T_{\mathbb{C}}), \mathcal{O}_{\text{Km}(T_{\mathbb{C}})})$	$T = \mathbb{R}^2/\Lambda = (\mathbb{T}^\times)^2/\Lambda$ $\iota_*(\wedge_{i=1}^2 \mathcal{T}_{\text{Km}(T)_0}^\vee) \simeq \mathbb{R}_{\text{Km}(T)}$ $h^i(\text{Km}(T), \mathbb{R}_{\text{Km}(T)})$
零とならない正則関数	$\mathcal{O}_{\text{Km}(T_{\mathbb{C}})}^\times$	$\iota_* \mathcal{A}ff_{\mathbb{Z}, \text{Km}(T)_0}$
周期	ω (正則 2 形式)	$c_{\text{Km}(T)}$ (レイディアンズ障害) ¹⁴
ネロン＝セベリ群	$\text{NS}(\text{Km}(T_{\mathbb{C}})) = \{\langle \omega, d \rangle = 0\}$	$\text{Im } c_1 = \{c_{\text{Km}(T)} \cup d = 0\}$
リーマン＝ロッホの定理	$\dim \Gamma(\check{X}, L) = \int_{\check{X}} \frac{c_1(L)^2}{2} + 2$	$\#(\text{Km}(T)(\mathbb{Z})) = \frac{c_{\text{Km}(T)} \cup c_{\text{Km}(T)}}{2} + 2$
超越格子	$q_*(H^2(T_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})) \simeq U(2)^{\oplus 3}$ $q_*(\text{NS}(T_{\mathbb{C}})^\perp) \simeq \text{NS}(\text{Km}(T_{\mathbb{C}}))^\perp$	$q_*(H^1(T, \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, T})) \simeq U(2)^{\oplus 2}$ $q_*((\text{Im } c_{1,T})^\perp) = (\text{Im } c_{1, \text{Km}(T)})^\perp$

表 3: 複素クンマー曲面 $\text{Km}(T_{\mathbb{C}})$ とトロピカルクンマー曲面 $\text{Km}(T)$ の比較

例 4.3. 例 2.6(2) で述べたように主偏極二次元トロピカルトーラスは平坦二次元トーラスと一対一対応する [JL17, Proposition 10.19]。これより主偏極二次元トロピカルトーラス T から得られるトロピカルクンマー曲面 $\text{Km}(T)$ も特異点を 4 つ持つ球面と同相な平坦軌道体と一対一対応する。主偏極を与える因子類の自己交点数は 2 である。このとき因子の原始的埋め込み $\langle 2 \rangle \hookrightarrow U^{\oplus 2}$ が同型を除き一意に定まる。 $(\langle n \rangle)$ は生成元の自己交点数が n となる階数 1 の格子である。) そのため主偏極二次元トロピカルトーラスが十分に一般的なら直交補格子は $\text{Im}(c_{1,T})^\perp \simeq U \oplus \langle -2 \rangle$ である。よって付随する $\text{Km}(T)$ においては $\text{Im}(c_{1, \text{Km}(T)})^\perp \simeq U(2) \oplus \langle -4 \rangle$ となる。

4.2 トロピカルクンマー曲面の第二の構成法

ここではトロピカル K3 超曲面からトロピカルクンマー曲面を構成する方法について説明する。前述のとおり例 2.6(3) の手法にしたがってトロピカル K3 曲面を得た場合、各特異点は高々 focus-focus 型となるが、TASS の有限群の商で得られるトロピカル K3 曲面には必ず focus-focus 型ではない特異点が現れる。特に [RSS14] で扱われているクンマー曲面のトロピカル化から例 2.6(3) の手法を用いて得られるトロピカル K3 曲面は筆者の定義でのトロピカルクンマー曲面にはならない。そのため両者の差をどのように埋めるのかという問題が出てくる。これはトロピカル多様体が元の代数多様体のよい類似であるかという問いと強く関係している。

一方でトロピカルクンマー曲面は高々 focus-focus 型の特異点をもつトロピカル K3 曲面の "moving worms" による特異点の合流として得られる。トロピカルクンマー曲面の特異点は皆 I_0^* 型の特異点 (図 3 左の白丸) であるがこれは 3 つの I_2 型特異点 (図 3 左の黒丸) を図の半直線に沿って動かし、中心で合流させることで得られる。この半直線は各 I_2 型特異点のホロノミー不変の方向の一部を表している。さらに各 I_2 型特異点は同様に二つの I_1 型特異点を合流させることで得られる。その他の例は [AET19, Table 8.2] を利用することで同様に得られる。レイディアンズ障害 c_B はホロノミー表現にのみ依存するため、"moving worms" では不変である。 B をトロピカル K3 曲面とし、 B' を B の "moving worms" による合流で得られたトロピカル K3 曲面とすれば、写像

¹³最後の表示は複素トーラスの乗法的表示であり、例えば [Oda88, §4.3] に簡易的な説明がある。

¹⁴一方でレイディアンズ障害にはケーラー類の類似という側面も持っている。

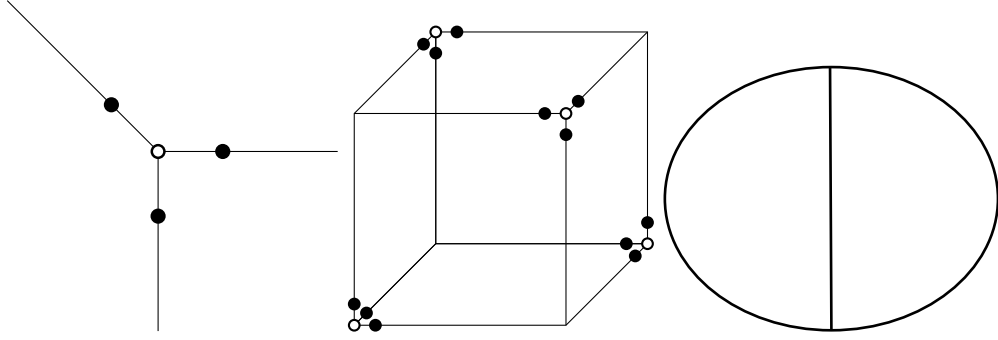


図 3: 特異点の合流 (左), トロピカル K3 超曲面の変形 (中央), 種数 2 のトロピカル曲線 (右)

$f: H^1(B', \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B'_0}) \rightarrow H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0})$ が誘導され $f(c_{B'}) = c_B$ となる。これを用いることで次のようにトロピカル K3 超曲面からトロピカルクンマー曲面を得ることができる。

例 4.4. P を立方体 $[-1, 1]^3 (\subset \mathbb{R}^3)$ とし $P^\vee$ を P の極双対とする。この時、 $P^\vee$ は $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$ を頂点とした正八面体となる。 X_P を反射的凸多面体 P に付随するトーリックファノ多様体とすると $X_P \simeq (\mathbb{P}^1)^3$ となる。このとき対応する反標準因子 $-K_{X_P}$ は非常に豊富である。 Y を $-K_{X_P}$ の非常に一般的な切断より得られる超平面とすると Y は K3 曲面となる。ここで $f = \max_{(i,j,k) \in P^\vee \cap \mathbb{Z}^3} \{c_{ijk} + ix + jy + kz\}$ を $P^\vee$ の内点を中心としたユニモジュラな三角形分割を与えるトロピカルローラン多項式とする。 $V_{\mathbb{T}}(f)$ を対応するトロピカル K3 超曲面とすると、 $V_{\mathbb{T}}(f)$ の有界な面全体の集合は直方体の境界となる。さらに c_{ijk} が皆整数値であると仮定すると対応するトーラス不変因子 $c_f \in \text{CDiv}_{T_N}(X_P)$ は豊富であり c_f に対応する格子多面体 P_f の境界は、 $V_{\mathbb{T}}(f)$ の有界な面全体の集合と同一視できる。 B を例 2.6(3) の手法より $V_{\mathbb{T}}(f)$ から得られる TASS とし、 c_B をレイディアンズ障害とする。 B は 12 個の I_2 型特異点を持つ (図 3 中央の黒丸)。このとき格子 $\text{Pic}_{\text{amb}}(Y) := \text{Im}(\text{Pic}(X_P) \rightarrow \text{Pic}(Y))$ は、格子 $H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0})$ に埋め込まれ c_f の像は c_B となる [Yam18]。 Y が $-K_{X_P}$ と線形同値であることより $\text{Pic}_{\text{amb}}(Y) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \simeq U(2) \oplus \langle -4 \rangle$ となる。とくに $c_f^2 = 2 \text{vol}(\partial P_f) = 2 \text{vol}(B)$ となる。ここで $\text{vol}(\partial P_f)$ とは P_f の境界部分の相対的な面積である。さらに $h^{2,0}(Y) > h^{2,0}(X_P)$ なので [Moi67] より $\text{Pic}_{\text{amb}}(Y) \simeq \text{Pic}(Y)$ であることもわかる。ここで B の特異点を直方体の 4 つの頂点 (図 3 中央の白丸) に向かって辺に沿って "moving worms" を行うことでトロピカルクンマー曲面が得られる。得られたトロピカルクンマー曲面は図 3 右のような形の種数 2 のトロピカル曲線のヤコビ多様体の商として得られるものと対応する。この距離グラフの各辺の長さは直方体の各辺の長さに比例する。またこの対応と例 4.3 を合わせることで $\text{Pic}_{\text{amb}}(Y)$ は十分に一般的な主偏極トロピカルヤコビ多様体から得られるトロピカルクンマー曲面の超越格子 $(\text{Im } c_1)^\perp$ と格子として同一視できる。なおこの対応は K3 曲面に関する Dolgachev のミラー対称性の一例 [Dol96, Example 9.2] を参考にして構成した。

問 4.5. 種数 2 のトロピカル曲線のヤコビ多様体から得られるトロピカルクンマー曲面の族と [RSS14] で与えられているクンマー曲面のトロピカル化の族はここまで用いてきた変形操作もしくはそれに準ずる操作で同様に一対一対応をつけられるか?

5 ミラー対称性との関係

最後に補足として特異点つきトロピカルアファイン多様体がミラー対称性においてどのような場面で現れるのかについてみることで他分野とどのように関係するのかを説明する。この章は主に [ABC⁺09, Chapter 6.7] と [OO18, §4.3]などを参考にした。ここでは簡単のためトロピカルアファイン多様体とすることが多くが TASS において正当化できる。 B_0 をトロピカルアファイン多様体

とすると、接束を $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}$ によって各接ベクトル空間毎に商をとることで $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 束 $f: X(B_0) \rightarrow B_0$ が得られ、余接束を $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^\vee$ によって同様に商をとることで双対束 $\check{f}: \check{X}(B_0) \rightarrow B_0$ が定義される。 $\check{X}(B_0)$ は自然なシンプレクティック構造を持ち、 $X(B_0)$ にはアファイン座標近傍系を用いることで平坦な複素構造が入る。さらに B_0 にリーマン計量であるヘッセ計量を与えるポテンシャル関数 K が存在するとき、 $X(B_0), \check{X}(B_0)$ には自然なケーラー計量が与えられる¹⁵。さらにポテンシャル関数 K を基にしたルジャンドル変換 (e.g. [志磨 01, §2.3], [ABC⁺09, 6.1.2]) を行うことで双対なアファイン多様体 $\check{B}_0$ とポテンシャル関数 $\check{K}$ が定義される。このときケーラー多様体としての同型 $X(B_0, K) \simeq \check{X}(\check{B}_0, \check{K})$ が存在する。ペア $(X(B_0, K), X(\check{B}_0, \check{K}))$ を [ABC⁺09, Definition 6.17] では SYZ 双対と呼んでいる。SYZ ミラー対称性とは非常におおざっぱに言えばカラビ=ヤウ多様体のミラー多様体が (特異点つき) 特殊ラグランジュトラスファイブレーションの双対として得られるというものである。 X の特殊ラグランジュ部分多様体 L とは、ラグランジュ部分多様体かつ体積形式 Ω_X に対して $\text{Im } \Omega_X|_L = 0$ となるものである。 $\check{B}_0$ は B_0 のミラー多様体だと言える。 g を K から得られるヘッセ計量だとすると、この計量の類 $[g] \in H^1(B_0, \text{Aff}_{B_0})$ が定義され、層完全列 (2) より誘導される $H^1(B_0, \mathcal{T}_{B_0}^\vee)$ の元 $c_1([g])$ は $\check{B}_0$ のレイディアンス障害 $c_{\check{B}_0}$ と一致する。

$D \in H^1(B_0, \text{Aff}_{\mathbb{Z}, B_0})$ がリーマン計量であるヘッセ計量の類として与えられているとき D を正の因子類と呼ぶ。これは複素幾何における正の因子の類似物であり、小平の埋め込み定理より正の因子は豊富な因子と対応する。この対応を基に式 (7) を見るとこの式はミラートロピカルアファイン多様体 $\check{B}_0$ の正の因子に関するリーマン=ロッホの定理だと考えられる。引き続き式 (7) について考察する。 B_0 を整アファイン多様体とすると格子点集合 $B_0(\mathbb{Z})$ が定義される。この格子構造と接ベクトル空間の格子構造を局所的に同一視することで自然な切断 $s: B_0 \rightarrow X(B_0)$ が定義される。 $s_0: B_0 \rightarrow X(B_0)$ を零切断とすると $f(s \cap s_0)$ は $B_0(\mathbb{Z})$ と同一視される。またアーノルド=リュービルの定理によってトロピカルアファイン多様体がラグランジュトラス束から得られている場合には、 $B_0(\mathbb{Z})$ はボーア=ゾンマーフェルト点の集合だと思える。このように見ると式 (7) の左辺はシンプレクティック幾何的な対象であり、右辺は複素幾何的な対象であると考えられる。

$f_I: X \rightarrow \mathbb{CP}^1 =: B$ を切断をもつ楕円 K3 曲面¹⁶とする。複素 K3 曲面はハイパーケーラー多様体であるため、 $IJK = -1, IJ = K, JK = I, KI = J$ となる三つの複素構造 I, J, K をもつ。超ケーラー回転をすることで複素構造 K に対して f_I が特殊ラグランジュトラスファイブレーションとなるようにとれる。これをもとに $\mathbb{CP}^1$ には特異点つきアファイン多様体の構造が誘導される。 B の特異点集合 $B \setminus B_0$ はファイバーが特異となる点の集合である。各特異ファイバーのオイラー数は $12i_{\text{loc}}(v)$ と一致する¹⁷。小平による特異ファイバーの分類表は例えば [金銅 15, p.56] や [DK19, Table 1] などを参照せよ。TASS の各特異点の型の名称はこの特異ファイバーの分類に由来する。楕円 K3 曲面には多重な特異ファイバーがないため、ルレイのスペクトル系列より $R^1 f_{I*} \mathbb{Z}_X \simeq \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^\vee$ となる。とくに $H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^\vee)$ は $E_8(-1)^2 \oplus U^2$ の部分格子である。一般には $H^1(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^\vee)$ は f_I に関する trivial lattice $\text{Triv}(f_I)$ の直交補格子であり、 $H^2(B, \iota_* \mathcal{T}_{\mathbb{Z}, B_0}^\vee)$ はモデル=ヴェイユ群の捻じれ部分の双対となる (e.g. [DK19])。楕円 K3 曲面で現れる $(\text{Triv}(f_I), \text{MW}_{\text{tor}}(f_I))$ の組合せは [Shi00] において調べられている。この様に考えると今までのトロピカル K3 曲面の例は皆ある楕円 K3 曲面の底集合として得られるものとなっている。特にトロピカルクンマー曲面は二つの楕円曲線 E, F の直積の第一射影 $\pi: E \times F \rightarrow E$ より誘導される楕円 K3 曲面 $\pi': \text{Km}(E \times F) \rightarrow \mathbb{CP}^1$ の底集合としても得られる。

¹⁵ このポテンシャル関数のトーリック多様体版に相当するものは [Gui94] で研究されており、[志磨 01, p.31] や [藤原 15, §5.4] においてその典型例がヘッセ幾何的な観点で扱われている。

¹⁶ 楕円曲面とは曲面 X から曲線 C への固有かつ全射な正則写像 $\pi: X \rightarrow C$ で各ファイバーが有限点を除いて楕円曲線となるものである。

¹⁷ そのため TASS に対するガウス=ボンネ型の定理からわかるように底集合に対してトロピカル K3 曲面を与える複素楕円曲面は位相的オイラー数は $24 = 12\chi(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}) = 12\chi_{\text{top}}(B)$ だとわかる。

参考文献

- [ABC⁺09] Paul S. Aspinwall, Tom Bridgeland, Alastair Craw, Michael R. Douglas, Mark Gross, Anton Kapustin, Gregory W. Moore, Graeme Segal, Balázs Szendrői, and P. M. H. Wilson. *Dirichlet Branes and Mirror Symmetry*, volume 4 of *Clay Mathematics Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2009. [8](#), [9](#)
- [AET19] Valery Alexeev, Philip Engel, and Alan Thompson. Stable pair compactification of moduli of K3 surfaces of degree 2. *arXiv e-prints*, page arXiv:1903.09742, Mar 2019. [7](#)
- [BIMS15] Erwan Brugallé, Ilia Itenberg, Grigory Mikhalkin, and Kristin Shaw. Brief introduction to tropical geometry. *arXiv e-prints*, page arXiv:1502.05950, Feb 2015. [1](#), [2](#), [4](#), [5](#)
- [DK19] Charles Doran and Jordan Kostiuk. Geometric Variations of Local Systems and Elliptic Surfaces. November 2019. [9](#)
- [Dol96] I. V. Dolgachev. Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces. *J. Math. Sci.*, 81(3):2599–2630, 1996. [8](#)
- [FRSS18] Tyler Foster, Joseph Rabinoff, Farbod Shokrieh, and Alejandro Soto. Non-Archimedean and tropical theta functions. *Math. Ann.*, 372(3-4):891–914, 2018. [3](#)
- [GH84] William Goldman and Morris W. Hirsch. The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 286(2):629–649, 1984. [1](#), [5](#)
- [Gro11] Mark Gross. *Tropical geometry and mirror symmetry*, volume 114 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. [2](#)
- [GS06] Mark Gross and Bernd Siebert. Mirror symmetry via logarithmic degeneration data. I. *J. Differential Geom.*, 72(2):169–338, 2006. [1](#), [4](#), [5](#)
- [Gui94] Victor Guillemin. Kaehler structures on toric varieties. *J. Differential Geom.*, 40(2):285–309, 1994. [9](#)
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. [5](#)
- [Ive86] Birger Iversen. *Cohomology of sheaves*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1986. [5](#)
- [JL17] Lizhen Ji and Eduard Looijenga. *Introduction to moduli spaces of Riemann surfaces and tropical curves*, volume 14 of *Surveys of Modern Mathematics*. International Press, Somerville, MA; Higher Education Press, Beijing, 2017. [1](#), [7](#)
- [KS06] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman. Affine structures and non-Archimedean analytic spaces. In *The Unity of Mathematics*, volume 244 of *Progr. Math.*, pages 321–385. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006. [1](#), [4](#), [5](#), [6](#)
- [Mil58] John Milnor. On the existence of a connection with curvature zero. *Comment. Math. Helv.*, 32:215–223, 1958. [2](#)
- [Moř67] B. G. Mořezon. Algebraic homology classes on algebraic varieties. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 31:225–268, 1967. [8](#)
- [MS15] Diane Maclagan and Bernd Sturmfels. *Introduction to tropical geometry*, volume 161 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. [1](#), [4](#)
- [MZ08] Grigory Mikhalkin and Ilia Zharkov. Tropical curves, their Jacobians and theta functions. In *Curves and abelian varieties*, volume 465 of *Contemp. Math.*, pages 203–230. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008. [2](#)
- [Oda88] Tadao Oda. *Convex Bodies and Algebraic Geometry*, volume 15 of *Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. [7](#)
- [OO18] Yuji Odaka and Yoshiki Oshima. Collapsing K3 surfaces, Tropical geometry and Moduli compactifications of Satake, Morgan-Shalen type. *arXiv e-prints*, page arXiv:1810.07685, October 2018. [6](#), [8](#)
- [RSS14] Qingchun Ren, Steven V. Sam, and Bernd Sturmfels. Tropicalization of classical moduli spaces. *Math. Comput. Sci.*, 8(2):119–145, 2014. [3](#), [7](#), [8](#)
- [Shi00] Ichiro Shimada. On elliptic K3 surfaces. *Michigan Math. J.*, 47(3):423–446, 2000. [9](#)
- [Sum18] Ken Sumi. Tropical Theta Functions and Riemann-Roch Inequality for Tropical Abelian Surfaces. *arXiv e-prints*, page arXiv:1809.10987, Sep 2018. [6](#)
- [Vir10] Oleg Viro. Hyperfields for Tropical Geometry I. Hyperfields and dequantization. *arXiv e-prints*, page arXiv:1006.3034, Jun 2010. [1](#)
- [Yam18] Yuto Yamamoto. Periods of tropical K3 hypersurfaces. *arXiv e-prints*, page arXiv:1806.04239, June 2018. [4](#), [5](#), [6](#), [8](#)
- [梶原 07] 梶原 健. Tropical toric geometry. 代数幾何学シンポジウム記録, (2007):16–27, 2007. [1](#), [3](#)
- [黒瀬 04] 黒瀬 俊. 統計多様体の幾何学. 宮岡礼子 and 小谷元子, editors, *21 世紀の数学*, 34–43. 日本評論社, 2004. [2](#)
- [河野 15] 河野 俊丈. 結晶群. Number 7 in 共立講座 数学探検. 共立出版, 2015. [3](#)
- [金銅 15] 金銅 誠之. K3 曲面. Number 5 in 共立講座 数学の輝き. 共立出版, 2015. [6](#), [9](#)
- [志磨 01] 志磨 裕彦. ヘッセ幾何学. 裳華房, 2001. [2](#), [9](#)
- [藤原 15] 藤原 彰夫. 情報幾何学の基礎. Number 29 in 数理情報科学シリーズ. 牧野書店, 星雲社 (発売), 2015. [2](#), [9](#)