

# 振れなしネーター $\mathbb{F}_1$ スキームに対する絶対ゼータ関数の 絶対 Euler 積表示

慶應義塾大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻  
富田拓希 (Takuki TOMITA)

## 概要

代数方程式の有限体  $\mathbb{F}_p$  上の解の個数の母関数である合同ゼータ関数は、整数論において古典的な対象である。黒川は、その “ $p \rightarrow 1$  での極限” (絶対ゼータ関数) が持つであろう無限積構造 (絶対 Euler 積) を示唆している。本レポートでは、Connes と Consani により定義された振れなしネーター  $\mathbb{F}_1$  スキームに対する絶対ゼータ関数の絶対 Euler 積表示を与える。

## 1 合同ゼータ関数と絶対ゼータ関数

代数方程式の解を調べることは整数論において重要な研究テーマであり、そのために代数方程式の解の集合によって定義される図形 (代数多様体) や、それをさらに抽象化した幾何学的対象 (スキーム) を調べることが多い。特に、代数方程式を  $\text{mod } p$  した方程式の有限体  $\mathbb{F}_p$  上の解の集合 ( $\mathbb{F}_p$  上の多様体) は重要な研究対象となっている。

$X$  を  $\mathbb{F}_p$  上のスキームとする。このとき  $X$  の合同ゼータ関数を

$$Z(X/\mathbb{F}_p, p^{-s}) := \exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\#X(\mathbb{F}_{p^m})}{m} p^{-sm} \right) \in \mathbb{Q}[[p^{-s}]]$$

と定義する。ただし  $s \in \mathbb{C}$  とする。これは “ $\text{mod } p$  方程式の解” の個数の母関数であり、整数論において古典的な研究対象である。 $X$  を  $\mathbb{Z}$  上の有限型スキーム (数論的スキーム) とすると、 $X_p := X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$  は  $\mathbb{F}_p$  上のスキームとなるので、 $Z(X/\mathbb{F}_p, p^{-s}) := Z(X_p/\mathbb{F}_p, p^{-s})$  と定義することで  $\mathbb{Z}$  上の有限型スキームに対しても合同ゼータ関数が定義できる。

任意の素数  $p$  と任意の  $m \in \mathbb{N}$  に対して  $N(p^m) = \#X_p(\mathbb{F}_{p^m})$  となる関数  $N$  を  $X$  の計数関数 (counting function) という。計数関数が存在するとき、合同ゼータ関数は  $p$  と  $s$  の関数として見れることに注意する。

次に、この合同ゼータ関数を “ $p \rightarrow 1$ ” とすることを考える。

**定義 1.1** ([Sou04]). 数論的スキーム  $X$  の計数関数が多項式  $N(t) \in \mathbb{Z}[t]$  で与えられると仮定する。このとき  $X$  に対する絶対ゼータ関数を

$$\zeta_X^{\text{abs}}(s) := \lim_{p \rightarrow 1} Z(X/\mathbb{F}_p, p^{-s})(p-1)^{N(1)}$$

と定義する。

**注意 1.2.** 絶対ゼータ関数の定義に関しては Connes と Consani [CC10]、黒川と落合 [KO13] による定義も存在するが、計数関数が整数係数多項式で与えられる場合にはどの定義も絶対ゼータ関数が一致するので、本レポートでは他の定義については触れないことにする。

ここで極限を取る際に  $(p-1)^{N(1)}$  を掛けているのは、 $Z(X/\mathbb{F}_p, p^{-s})$  の  $p=1$  での極を打ち消すためである。さらに、このゼータ関数の前に「絶対」と付いているのは、合同ゼータ関数の  $\mathbb{F}_1$  類似を考えているからである。 $\mathbb{F}_1$  に関しては次の 2 章で説明する。

本レポートの主定理は、良い性質を持つ  $\mathbb{F}_1$  スキームに対する絶対ゼータ関数が無限積構造 (絶対 Euler 積) を持つということである。正確な主張は次の通りである。

**定理 1.3** ([Tom19], 定理 3.5).  $\mathcal{X} = (X_{\mathfrak{M}_0}, X_{\mathbb{Z}}, e)$  を振れなしネーター  $\mathbb{F}_1$  スキームとする。このとき

$$\zeta_{\mathcal{X}/\mathbb{F}_1}(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^{N(1)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{s}\right)^n\right)^{-\kappa(n, X_{\mathfrak{M}_0})}$$

が成り立つ。ただし  $N(t) \in \mathbb{Z}[t]$  は  $\mathcal{X}$  の計数関数、 $r(x) := \text{rank } \mathcal{O}_{X_{\mathfrak{M}_0}, x}^{\times}$  とし、

$$\kappa(n, X_{\mathfrak{M}_0}) := \sum_{x \in |X_{\mathfrak{M}_0}|} \sum_{j=0}^{r(x)} (-1)^{r(x)-j} \binom{r(x)}{j} \kappa_j(n), \quad \kappa_j(n) := \frac{1}{n} \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) j^m$$

とする。ここで  $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  は Möbius 関数で、

$$\mu(k) := \begin{cases} 0 & (k \text{ が平方因子を持つとき}) \\ 1 & (k \text{ が偶数個の相異なる素数の積、または } k=1 \text{ のとき}) \\ -1 & (k \text{ が奇数個の相異なる素数の積のとき}) \end{cases}$$

と定義する。さらに  $X_{\mathbb{Z}}$  が  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  上固有、かつ少なくとも 1 つの素数で良い還元を持つならば、この絶対 Euler 積は少なくとも  $|s| > \text{rel.dim } X_{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}$  で絶対収束する。ただし、 $\text{rel.dim } X_{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}$  は  $X_{\mathbb{Z}}$  の  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  上の相対次元とする。

振れなしネーター  $\mathbb{F}_1$  スキームの定義に関しては 2 章で述べる。また、この無限積構造は黒川 [黒川 16] により絶対 Euler 積と呼ばれているが、その詳細は 3 章で述べる。

## 2 $\mathbb{F}_1$ スキーム

一元体  $\mathbb{F}_1$  とは  $\mathbb{Z}$  の“係数体”とみなせるような数学的対象であり、1957 年に Tits により有限体  $\mathbb{F}_q$  の類似として初めて言及された。そして 1990 年代に Deninger と黒川が、 $\mathbb{F}_1$  の概念を導入することにより、Weil 予想と類似した方法で Riemann 予想にアプローチできるという可能性を示唆した [Man95]。それ以降  $\mathbb{F}_1$  上の幾何学の理論を様々な方法で構築しようとする試みがなされていて、現在も発展途上の理論である。本レポートでは Deitmar [Dei05] が定義したモノイドスキームの理論を発展させた Connes と Consani [CC10] の  $\mathbb{F}_1$  の理論を用いる。ちなみにこの理論における  $\mathbb{F}_1$  は、自明な乗法モノイド  $\{1\}$  に 0 を付け加えて演算を延長した<sup>1</sup>乗法モノイド  $\{0, 1\}$  として定義する。

最初に、Deitmar が導入したモノイドスキームの理論を説明する。これは端的に言うと、可換環からスキームを構成した方法と同様の方法で、0 を含む可換乗法モノイドからモノイドスキームを構成した理論である。以下、単にモノイドというとき 0 を含む可換乗法モノイドを指すこととする。

まずモノイドの局所化を定義する。

---

<sup>1</sup> $0 \times 1 = 0, 0 \times 0 = 0$  と演算を延長する。

**定義 2.1.**  $A$  をモノイドとし、 $S$  を  $A$  の部分モノイドとする。このとき任意の  $(a, s), (a', s') \in A \times S$  に対して、

$$(a, s) \sim (a', s') \iff \text{ある } s'' \in S \text{ が存在して } s''s'a = s''sa' \text{ を満たす}$$

と同値関係を定義する。このとき  $S^{-1}A := (A \times S)/\sim$  を  $A$  の  $S$  による局所化という。ちなみに可換環の局所化と同様に、モノイドの局所化にも普遍性が成り立つ。

次にモノイドのイデアル、素イデアル、モノイドのスペクトラムを定義する。ちなみにイデアルの定義は、環のイデアルから加法を忘却したものになっている。

**定義 2.2** ([Tha16]).  $A$  をモノイドとする。 $A$  の部分集合  $\mathfrak{a}$  が  $Aa \subset \mathfrak{a}$  を満たすとき、 $\mathfrak{a}$  を  $A$  のイデアルという。また、 $A$  のイデアル  $\mathfrak{p}$  に対して  $A \setminus \mathfrak{p}$  が積閉になるとき、 $\mathfrak{p}$  を  $A$  の素イデアルという。さらに、 $\text{spec } A := \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \text{ は } A \text{ の素イデアル}\}$  をモノイドのスペクトラムという。

$\text{spec } A$  には、可換環論のときと同様に、任意のイデアル  $\mathfrak{a}$  に対し  $V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \text{spec } A \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$  を閉集合の基とすることで位相 (**Zariski 位相**) を入れることができる。

**注意 2.3.** モノイドのスペクトラムは  $\text{spec}$ 、環のスペクトラムは  $\text{Spec}$  と書く。

任意のモノイド  $A$  に対して、唯一の極大イデアルは  $A \setminus A^\times$  である。また、任意の  $A$  に対して  $\emptyset$  は  $\text{spec } A$  の唯一の生成点 (generic point) となっている [Tha16, Prop.2.9]。

**例 2.4.**  $G$  を乗法群とし、 $\mathbb{F}_1[G] := G \cup \{0\}$  を、任意の  $g \in G$  に対して  $g \cdot 0 = 0$  として  $G$  の群演算を延長した乗法モノイドとする。このとき  $\text{spec } \mathbb{F}_1[G] = \{\emptyset, \mathbb{F}_1[G] \setminus \mathbb{F}_1[G]^\times = \{0\}\}$  である。

さらにモノイドのスペクトラムの構造層を定義する。

**定義 2.5** ([Dei05]).  $A$  をモノイドとする。任意の  $\text{spec } A$  の開集合  $U$  に対して、

$$\mathcal{O}_{\text{spec } A}(U) := \left\{ s: U \rightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \left| \begin{array}{l} \text{任意の } \mathfrak{p} \in U \text{ に対して、} s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}} \text{ であり、} \\ \mathfrak{p} \text{ の近傍 } V \subset U \text{ と } a, b \in A \text{ が存在して} \\ \text{任意の } \mathfrak{q} \in V \text{ に対し } b \notin \mathfrak{q} \text{ かつ } s(\mathfrak{q}) = \frac{a}{b} \text{ を満たす。} \end{array} \right. \right\}$$

とおくとき、関手  $\mathcal{O}_{\text{spec } A}: \mathbf{Op}(\text{spec } A) \rightarrow \mathfrak{M}_0$  は層になっていて、これを  $\text{spec } A$  の構造層という。ただし  $\mathbf{Op}(\text{spec } A)$  は  $\text{spec } A$  の開集合からなる圏で、 $\mathfrak{M}_0$  はモノイドの圏である。

**命題 2.6** ([Dei05, Prop.2.1]).  $A$  をモノイドとする。

(1) 任意の  $\mathfrak{p} \in \text{spec } A$  に対して、 $\mathcal{O}_{\text{spec } A, \mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$  が成り立つ。

(2)  $\mathcal{O}_{\text{spec } A}(\text{spec } A) \cong A$

次に、モノイドにおいて、可換環のときの局所環付き空間に相当するものを定義する。

**定義 2.7** ([Dei05]). モノイダル空間とは、位相空間  $X$  とそのモノイドの層  $\mathcal{O}_X$  の組  $(X, \mathcal{O}_X)$  のことである。そしてモノイダル空間の射  $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  とは、連続写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $Y$  上のモノイドの層の射  $f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  の組である。

可換環のときと同様に、モノイドスキームを以下のように定義できる。

**定義 2.8** ([Tha16]). モノイダル空間がアフィンモノイドスキームであるとは、あるモノイド  $A$  が存在して  $\text{spec } A$  とモノイダル空間として同型であることをいう。またモノイダル空間  $X$  がモノイドスキームであるとは、任意の  $x \in X$  に対して  $x$  の開近傍  $U \subset X$  が存在して、 $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  がアフィンモノイドスキームであることをいう。

以上が Deitmar が定義したモノイドスキームである。Connes と Consani はモノイドの圏と可換環の圏を貼り合わせた圏から集合の圏への関手につけられたものを  $\mathbb{F}_1$  スキームと定義していて、この関手はモノイドスキームとスキームの2つの情報を持っている [CC10]。本レポートでは説明の簡便性のため、この  $\mathbb{F}_1$  スキームと 1:1 に対応している generalized torified schemes [PL09, §2.10] というものを  $\mathbb{F}_1$  スキームということにする。

**定義 2.9** ([PL09, §2.10]).  $\mathbb{F}_1$  スキームとは、次を満たす組  $\mathcal{X} = (X_{\mathfrak{M}_0}, X_{\mathbb{Z}}, e)$  のことである：

- $X_{\mathfrak{M}_0}$  はモノイドスキームである。
- $X_{\mathbb{Z}}$  はスキームである。
- $e$  は、任意の体  $K$  に対して  $e_K: \text{Hom}(\text{spec}(\mathbb{F}_1[K^\times]), X_{\mathfrak{M}_0}) \rightarrow \text{Hom}(\text{Spec}(K), X_{\mathbb{Z}})$  が全単射となる射である。

以下、主定理を述べるために必要な  $\mathbb{F}_1$  スキームの性質を定義しておく。

**定義 2.10** ([CC10]).  $\mathbb{F}_1$  スキーム  $\mathcal{X} = (X_{\mathfrak{M}_0}, X_{\mathbb{Z}}, e)$  がネーター的であるとは、 $X_{\mathfrak{M}_0}$  がネーター的、かつ  $X_{\mathbb{Z}}$  がネーター的であることをいう。ただし、 $X_{\mathfrak{M}_0}$  がネーター的であるとは、 $d \in \mathbb{N}$  とネーターモノイドの有限集合  $\{M_i\}$  が存在して、

$$\text{Hom}(\text{spec}(-), X_{\mathfrak{M}_0}) = \bigcup_{i=1}^d \text{Hom}_{\mathfrak{M}_0}(M_i, -)$$

を満たすことである。ただし、ネーターモノイドであることは、有限生成モノイドであること、および  $\mathbb{Z}[M_i]$  がネーター環であることと同値である。

**定義 2.11** ([CC10]).  $\mathcal{X} = (X_{\mathfrak{M}_0}, X_{\mathbb{Z}}, e)$  を  $\mathbb{F}_1$  スキームとする。 $X_{\mathfrak{M}_0}$  が振れなし (torsion free) であるとは、任意の  $x \in X_{\mathfrak{M}_0}$  に対して群  $\mathcal{O}_{X_{\mathfrak{M}_0}, x}^\times$  が振れなしであることをいう。さらにこのとき  $\mathcal{X}$  が振れなしであるという。

次に  $\mathcal{X}$  に対して絶対ゼータ関数を以下のように定義する。

**定義 2.12.**  $\mathcal{X} = (X_{\mathfrak{M}_0}, X_{\mathbb{Z}}, e)$  を  $\mathbb{F}_1$  スキームとする。 $N(t) \in \mathbb{Z}[t]$  が存在して、任意の素数  $p$  と  $m \in \mathbb{N}$  に対して  $\#X_{\mathbb{Z}}(\mathbb{F}_{p^m}) = N(p^m)$  を満たすと仮定する。このとき  $s \in \mathbb{R}$  に対して

$$\zeta_{\mathcal{X}/\mathbb{F}_1}(s) := \zeta_{X_{\mathbb{Z}}}^{\text{abs}}(s) = \lim_{p \rightarrow 1} Z(X_{\mathbb{Z}}, p^{-s})(p-1)^{N(1)}$$

と定義する。これは  $\mathbb{C}$  全体に有理型接続され<sup>2</sup>、これを  $\mathcal{X}$  に関する絶対ゼータ関数という。

次の定理は、振れなしネーター  $\mathbb{F}_1$  スキームに対して整数係数多項式の計数関数が存在することを主張している。これにより、振れなしネーター  $\mathbb{F}_1$  スキームに対して絶対ゼータ関数を定義することができる。

<sup>2</sup>これは、計数関数  $N$  が多項式であるとき  $\zeta_{\mathcal{X}/\mathbb{F}_1}(s) \in \mathbb{Q}(s)$  となることによる。

**定理 2.13** ([CC10, Thm.4.13]).  $\mathcal{X}$  を振れなしネーター  $\mathbb{F}_1$  スキームとする。さらに  $C_n$  を位数  $n$  の巡回群とする。

(1)  $N(t) \in \mathbb{Z}[t]$  が存在して、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$X_{\mathfrak{M}_0}(\mathbb{F}_1[C_n]) := \# \operatorname{Hom}(\operatorname{spec}(\mathbb{F}_1[C_n]), X_{\mathfrak{M}_0}) = N(n+1)$$

を満たす。

(2) 任意の  $q = p^f$  に対して、 $\#X_{\mathbb{Z}}(\mathbb{F}_q) := \# \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec}(\mathbb{F}_q), X_{\mathbb{Z}}) = N(q)$  が成り立つ。

(3)  $N(t) = \sum_{k=0}^r a_k t^k$  と書くと、

$$\zeta_{\mathcal{X}/\mathbb{F}_1}(s) = \prod_{k=0}^r (s-k)^{-a_k} = \prod_{x \in |X_{\mathfrak{M}_0}|} \prod_{j=0}^{r(x)} (s - r(x) + j)^{(-1)^{j+1} \binom{r(x)}{j}}$$

となる。ただし  $r(x) := \operatorname{rank} \mathcal{O}_{X_{\mathfrak{M}_0}, x}^{\times}$  とする。

この定理より、振れなしネーター  $\mathbb{F}_1$  スキームの計数関数は  $X_{\mathfrak{M}_0}$  と  $X_{\mathbb{Z}}$  のそれぞれから得られることがわかる。さらにこの定理の証明から次の系が得られる。

**系 2.14.**  $\mathcal{X}$  を振れなしネーター  $\mathbb{F}_1$  スキームとする。このとき  $\#X_{\mathfrak{M}_0} < \infty$  となる。

### 3 絶対 Euler 積

この章では、主定理である絶対ゼータ関数の持つ無限積構造について述べる。まず、Riemann ゼータ関数には次のような Euler 積と呼ばれる無限積構造が存在する。

$$\zeta(s) = \prod_{p: \text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

この無限積の一般化の一つに、環のゼータ関数 (アフィンスキームに対する Hasse ゼータ関数) の無限積表示がある。環のゼータ関数とは、 $R$  を有限生成環として

$$\zeta_R(s) := \prod_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{m}\text{-Spec} R} (1 - (\#R/\mathfrak{a})^{-s})^{-1}$$

として定義される関数である。ここから素数を走る無限積に変形するために、剰余体の位数  $p^n$  ごとに **Euler factor** を分類すると、次のようになる。

$$\zeta_R(s) := \prod_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{m}\text{-Spec} R} (1 - (\#R/\mathfrak{a})^{-s})^{-1} = \prod_{p: \text{素数}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p^{-ns})^{-\kappa(p, n; R)}$$

ただし  $\kappa(p, n; R) := \#\{\mathfrak{a} \in \mathfrak{m}\text{-Spec} R \mid \#R/\mathfrak{a} = p^n\}$  とする。これを環のゼータ関数に対する Euler 積表示という。

例 3.1.  $R = \mathbb{Z}$  のとき、

$$\kappa(p, n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n \geq 2) \end{cases}$$

となり、 $\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \zeta(s)$  となる。

例 3.2.  $R = \mathbb{Z}[T]$  のとき、

$$\kappa(p, n; \mathbb{Z}[T]) = \frac{1}{n} \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) p^m$$

となり、 $\zeta_{\mathbb{Z}[T]}(s) = \zeta(s-1)$  となる。

次に、合同ゼータ関数に対しても同様の無限積表示に変形することを考える。 $X$  を数論的スキームとすると、合同ゼータ関数は

$$Z(X/\mathbb{F}_p, p^{-s}) = \zeta_{X/\mathbb{F}_p}(s) = \prod_{x \in |X|} (1 - \#k(x)^{-s})^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p^{-ns})^{-\kappa(p, n; X)}$$

と書けることが知られている。ただし  $k(x)$  は  $x$  の剰余体であり、 $\kappa(p, n; X) := \#\{x \in X \mid \#k(x) = p^n\}$  とする。さらに環のゼータ関数と同様に

$$Z(X/\mathbb{F}_p, p^{-s}) = \prod_{l: \text{素数}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - l^{-ns})^{-\kappa(l, n; X)}$$

と書ける。ただし

$$\kappa(l, n; X) = \begin{cases} \kappa(p, n; X) & (l = p) \\ 0 & (l \neq p) \end{cases}$$

とする。この無限積表示も環のゼータ関数の時と同様に Euler 積と呼ぶ。

この表示で  $p \rightarrow 1$  とすると数論的スキーム  $X$  の絶対ゼータ関数の Euler 積表示が得られそうだが、具体的に  $\mathbb{G}_m/\mathbb{F}_p$  のときそれが上手くいかないことがわかる [黒川 16, p.131]。そこで、黒川は次のようにすると絶対ゼータ関数の Euler 積を定義できると示唆している。

予想 3.3 (黒川の示唆 [黒川 16, p.132]).  $X$  を数論的スキームとする。このとき  $\kappa(n, X) \in \mathbb{Z}$  が存在して、

$$\zeta_X^{\text{abs}}(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^{\chi_{\text{abs}}(X)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{s}\right)^n\right)^{-\kappa(n, X)}$$

を満たす。ただし、 $\chi_{\text{abs}}(X) := N(1)$  は絶対 Euler 標数<sup>3</sup>であり、 $N$  は  $X$  の計数関数とする。これを絶対 Euler 積といい、これは  $\text{Re}(s) > \dim X$  で絶対収束している。

注意 3.4. 絶対ゼータ関数は今のところ計数関数が性質の良いような数論的スキームに対してしか定義されていないため、この主張は一般の数論的スキームに対して絶対ゼータ関数が存在することも暗に主張に含んでいる。

<sup>3</sup>これが Euler 標数と呼ばれているのは、Lefschetz 跡公式から  $N(p^m) = \#X(\mathbb{F}_{p^m}) = \sum (-1)^i (a_{i,1}^m + \cdots + a_{i,b_i}^m)$  となるため、 $m=0$  とすると  $N(1) = \sum (-1)^i b_i$  となり Euler 標数と合致しているからである。

本レポートの主定理である次の定理は、この黒川の示唆を  $\mathbb{F}_1$  スキームのあるクラスを用いて定式化し、黒川の示唆を部分的に解決したものに相当する。また、 $\mathbb{F}_1$  スキームに付随するモノイドスキームの閉点を用いて  $\kappa(n, X)$  を具体的に与え、絶対 Euler 積が少なくとも絶対収束する領域を与えている。

**定理 3.5** ([Tom19]).  $\mathcal{X} = (X_{\mathfrak{M}_0}, X_{\mathbb{Z}}, e)$  を振れなしネーター  $\mathbb{F}_1$  スキームとする。このとき

$$\zeta_{\mathcal{X}/\mathbb{F}_1}(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^{N(1)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{s}\right)^n\right)^{-\kappa(n, X_{\mathfrak{M}_0})}$$

が成り立つ。ただし  $N(t) \in \mathbb{Z}[t]$  は  $\mathcal{X}$  の計数関数、 $r(x) := \text{rank } \mathcal{O}_{X_{\mathfrak{M}_0}, x}^{\times}$  とし、

$$\kappa(n, X_{\mathfrak{M}_0}) := \sum_{x \in |X_{\mathfrak{M}_0}|} \sum_{j=0}^{r(x)} (-1)^{r(x)-j} \binom{r(x)}{j} \kappa_j(n), \quad \kappa_j(n) := \frac{1}{n} \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) j^m$$

とする。ここで、 $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  は Möbius 関数である。さらに  $X_{\mathbb{Z}}$  が  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  上固有、かつ少なくとも 1 つの素数で良い還元を持つならば、この絶対 Euler 積は少なくとも  $|s| > \text{rel.dim } X_{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}$  で絶対収束する。ただし、 $\text{rel.dim } X_{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}$  は  $X_{\mathbb{Z}}$  の  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  上の相対次元とする。

この定理の証明には、主に次の 3 つの補題を用いる。

**補題 3.6** ([黒川 16, 問題 7.1]).  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \mathbb{C}$  とする。

$$\kappa_a(n) := \frac{1}{n} \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) a^m$$

とするとき、任意の  $n$  と  $a$  に対して  $\kappa_a(n) \in \mathbb{Z}$  であり、

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u^n)^{\kappa_a(n)} = 1 - au$$

が成り立つ。

**補題 3.7** ([Tom19]).  $a \geq 1$  のとき、補題 3.6 の無限積は少なくとも  $|u| < \frac{1}{a}$  で絶対収束する。

**補題 3.8** ([Tom19]).  $X$  を数論的スキームとし、この計数関数  $N$  が  $N \in \mathbb{Z}[t]$  であることを仮定する。このとき、 $X$  が  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  上固有、かつ少なくとも 1 つの素数で良い還元を持つならば、

$$\deg N = \text{rel.dim } X/\mathbb{Z}$$

が成り立つ。

**例 3.9** ([黒川 16]).  $\mathbb{F}_1[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}] := \{0\} \cup \{t_1^{u_1} \cdots t_r^{u_r} \mid u_i \in \mathbb{Z}\}$  を乗法モノイドとする。 $X_{\mathfrak{M}_0} = \text{spec } \mathbb{F}_1[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}] = \{\emptyset, \{0\}\}$ 、 $X_{\mathbb{Z}} = \mathbb{G}_m^r = \text{Spec } \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}]$  とすると、 $\mathcal{X} = (X_{\mathfrak{M}_0}, \mathbb{G}_m^r, e)$  は振れなしネーター  $\mathbb{F}_1$  スキームである。 $\mathcal{X}$  の計数関数は

$$N(x) = (x-1)^r \in \mathbb{Z}[x]$$

となっているので、 $\chi_{\text{abs}}(\mathbb{G}_m^r) = N(1) = 0$  であり、

$$\zeta_{\mathcal{X}/\mathbb{F}_1}(s) = \zeta_{\mathbb{G}_m^r}^{\text{abs}}(s) = \prod_{k=0}^r (s-k)^{(-1)^{r-k+1} \binom{r}{k}}$$

である。このとき

$$\kappa(n, X_{\mathfrak{M}_0}) := \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \kappa_k(n) = \frac{1}{n} \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} k^m$$

とおくと、命題??で  $a = k$ ,  $u = \frac{1}{s}$  とすることで

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathbb{G}_m^r}^{\text{abs}}(s) &= \prod_{k=0}^r (s-k)^{(-1)^{r-k+1} \binom{r}{k}} = \left(\frac{1}{s}\right)^{\sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k}} \prod_{k=0}^r \left(1 - \frac{k}{s}\right)^{(-1)^{r-k+1} \binom{r}{k}} \\ &= \prod_{k=0}^r \left(1 - \frac{k}{s}\right)^{(-1)^{r-k+1} \binom{r}{k}} = \prod_{k=0}^r \left( \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{s}\right)^n\right)^{\kappa_k(n)} \right)^{(-1)^{r-k+1} \binom{r}{k}} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{s}\right)^n\right)^{-\sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \kappa_k(n)} \end{aligned}$$

となり、

$$\zeta_{\mathbb{G}_m^r}^{\text{abs}}(s) = \left(\frac{1}{s}\right)^{N(1)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{s}\right)^n\right)^{-\kappa(n, X_{\mathfrak{M}_0})}$$

を得る。

**注意 3.10** ([Tom19]).  $\kappa(n, X_{\mathfrak{M}_0})$  は一見複雑に見えるが、これは計数関数に正規化線形 Möbius 変換を施したものであると考えることができる。ここで正規化線形 Möbius 変換  $M_n$  とは、 $\mathbb{Z}$  加群の準同型写像

$$M_n: \mathbb{Z}[[t]] \rightarrow \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z} \kappa_a(n)$$

で  $M_n(t^a) := \kappa_a(n)$  を満たすものと定義する。このとき計数関数  $N(t) \in \mathbb{Z}[t]$  に対して、

$$\kappa(n, X_{\mathfrak{M}_0}) = M_n(N(t))$$

であることがわかる。

## 参考文献

- [黒川 16] 信重 黒川, 絶対ゼータ関数論, 岩波書店, 2016.
- [CC10] Alain Connes and Caterina Consani, *Schemes over  $\mathbb{F}_1$  and Zeta Functions*, *Compositio Mathematica* **146** (2010), no. 6, 1383–1415.
- [Dei05] Anton Deitmar, *Schemes over  $\mathbb{F}_1$* , *Number fields and function fields—two parallel worlds*, 2005, pp. 87–100.
- [KO13] Nobushige Kurokawa and Hiroyuki Ochiai, *Dualities for Absolute Zeta Functions and Multiple Gamma Functions*, *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences* **89** (2013), no. 7, 75–79.
- [Man95] Yuri Manin, *Lectures on Zeta Functions and Motives*, *Astérisque* **228** (1995), 121–163.
- [PL09] Javier López Pena and Oliver Lorscheid, *Mapping  $\mathbb{F}_1$ -Land: An Overview of Geometries over the Field with One Element*, arXiv preprint arXiv:0909.0069 (2009).
- [Sou04] Christophe Soulé, *Les Variétés sur le Corps  $\mathbb{F}_1$  un Élément*, *Mosc. Math. J* **4** (2004), no. 1, 217–244.
- [Tha16] Koen Thas, *The Combinatorial-Motivic Nature of  $\mathbb{F}_1$ -Schemes*, *Absolute arithmetic and  $\mathbb{F}_1$ -geometry*, 2016, pp. 83–160 (eng). arXiv:1406.5447.
- [Tom19] Takuki Tomita, *The Absolute Euler Product Representation of the Absolute Zeta Function for a Torsion Free Noetherian  $\mathbb{F}_1$ -Scheme*, in preparation (2019).