

Well-posedness and parabolic smoothing effect for higher order linear Schrödinger type equations on the torus

理化学研究所 革新知能統合研究センター/
名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻/
慶應義塾大学 理工学部/中央大学 理工学部
田中 智之 (Tomoyuki TANAKA)*

1 導入

本講演は、津川光太郎氏 (中央大学) との共同研究に基づく。ソリトン理論の研究に現れる代表的な可積分系として、様々な高階の非線形偏微分方程式が知られている。それらの初期値問題の適切性を十分高い正則性で示す際には、高階の変数係数線形方程式に対するエネルギー不等式が重要な役割を果たす。そこで、本講演では以下の 1 次元トーラス上の $2m$ 階の線形 Schrödinger 型方程式の初期値問題

$$(S) \begin{cases} \partial_t u = i\partial_x^{2m} u + \sum_{j=0}^{2m-1} (a_j \partial_x^{2m-1-j} u + b_j \partial_x^{2m-1-j} \bar{u}), & (t, x) \in (-T, T) \times \mathbb{T}, \\ u(0, x) = \varphi(x) \in H^s(\mathbb{T}) \end{cases}$$

を考える。ここで $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $0 < T \leq \infty$ とし, $u(t, x) : (-T, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ は未知関数, $a_j(t, x), b_j(t, x) \in C^\infty((-T, T) \times \mathbb{T}; \mathbb{C})$ は与えられた関数とする。定数係数の場合からの類推により, (S) は (i) 分散型方程式のように時間正負両方向に適切である場合, (ii) 放物型方程式のように平滑化効果を持ち時間一方にのみ適切である場合, (iii) 時間正負両方向について非適切である場合に分類出来ると予想される。本研究の目的は, (S) のエネルギー不等式を証明し上記の分類を行い, さらにこの結果を利用して NLS 階層を含むクラスの高階非線形 Schrödinger 型方程式の分類を行うことにある。

$m = 2$, $a_j = a_j(x)$, $b_j \equiv 0$ ($j = 0, 1, 2, 3$) の場合については, [2] により擬微分作用素の議論を用いて L^2 適切性 ((i) の場合) が成立するための必要十分条件が得られている。 $m = 1$ および 2 階の微分型非線形 Schrödinger 方程式の場合については, [1], [3] の結果などがある。

2 主結果

本講演の主結果を述べる。本講演の主結果は、 (S) に対するエネルギー不等式である。以下 $a_0 \equiv b_0 \equiv 0$, $s \geq 2m$ とする。

* tomoyuki.tanaka.hw@riken.jp/d18003s@math.nagoya-u.ac.jp

定理 1. u は (S) の十分滑らかな解とする. このとき, $\{a_j\}_{j=1}^{2m-1}$, $\{b_j\}_{j=1}^{2m-1}$, s により定まる $\{K_j\}_{j=1}^{2m-2}$, $\{L_j\}_{j=1}^{2m-2} \subset C^\infty((-T, T) \times \mathbb{T}; \mathbb{C})$ および $\{\mu_j\}_{j=1}^{m-1}$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m-1} \subset C^\infty((-T, T); \mathbb{R})$ が存在して, $(-T, T)$ 上で次が成立:

$$\left| \frac{d}{dt} \left(\|D^s u\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{2m-2} \left(\operatorname{Im} \langle K_j \partial_x^{-j} D^s u, D^s u \rangle + \operatorname{Im} \langle L_j \partial_x^{-j-1} D^s \bar{u}, D^s u \rangle \right) \right) + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\mu_j \|D^{s+m-j} u\|_{L^2}^2 + \lambda_j \operatorname{Im} \langle \partial_x^{-1} D^{s+m-j} u, D^{s+m-j} u \rangle \right) \right| \lesssim \|u\|_{H^s}^2.$$

ただし, $D = \mathcal{F}^{-1}|\xi|\mathcal{F}_x$, $\partial_x^{-1} = \mathcal{F}^{-1}(i\xi)^{-1}\mathcal{F}_x$ である.

左辺の第一項がエネルギーの主要部である. 第二項, 第三項は補正項であり主要部より低い微分階数となっている. 第四項および第五項は主要部より高い微分階数となっており, これらの項が (ii) の平滑化効果や (iii) の非適切性の原因となる. 実際, 全ての μ_j および λ_j が恒等的に 0 であれば, 第一項が最も高い微分階数の項となり, これより直ちに, 以下の (i) の場合の結果が成り立つ.

系 2. 定理 1 において得られた $\mu_j(t)$, $\lambda_j(t)$ が $\mu_j(t) \equiv \lambda_j(t) \equiv 0$ をみたすとき, 任意の $\varphi \in H^s(\mathbb{T})$ に対し, (S) の一意解 $u \in C((-T, T); H^s(\mathbb{T}))$ が存在する.

一方で, 第四項または第五項が残れば, 系 2 のような適切性は期待できない. 実際, 最も高い微分階数の項が第四項となる場合については, 以下の (ii) の場合の結果が成り立つ.

系 3. 定理 1 において得られた $\mu_j(t)$, $\lambda_j(t)$ が, $1 \leq j \leq j_* - 1$ に対して $\mu_j(t) \equiv \lambda_j(t) \equiv 0$ をみたし, $\inf_{[0, T]} \mu_{j_*}(t) > 0$ (resp. $\sup_{(-T, 0]} \mu_{j_*}(t) < 0$) であるとき, 任意の $\varphi \in H^s(\mathbb{T})$ に対し, (S) の一意解 $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{T})) \cap C^\infty((0, T) \times \mathbb{T})$ (resp. $u \in C((-T, 0]; H^s(\mathbb{T})) \cap C^\infty((-T, 0) \times \mathbb{T})$) が存在する.

最も高い微分階数の項が第五項となる場合については, (iii) の場合の結果が成り立つと予想されるが, これを示すにはより精密な評価が必要となる. この場合および非線形への応用は今後の研究課題である.

以下, 定理 1 の証明のアイデアを述べる. エネルギー法を適用すると, (S) の方程式の $\partial_t u$ から定理の左辺第一項が得られる. 方程式の最高階微分の項 $i\partial_x^{2m} u$ から起因する項は反対称性により消滅する. 残りの低階の項から生じる微分の損失 (エネルギーの主要部より高い階数の微分を含む項) を解消するために, 補正項を利用する. このための評価の一つが以下の補題である.

補題 4. u は (S) の十分滑らかな解とし, $1 \leq l \leq m-1$, $K \in C^\infty((-T, T) \times \mathbb{T}; \mathbb{C})$ とする. このとき, $\{\Phi_k(K)\}_{k=0}^{2(m-1-l)}$, $\{\Psi_k(K)\}_{k=0}^{2(m-1-l)} \subset C^\infty((-T, T) \times \mathbb{T}; \mathbb{C})$ が存在して, $(-T, T)$ 上で次が

成立:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dt} \operatorname{Im} \langle K \partial_x^{-2l+1} D^s u, D^s u \rangle + 2m \operatorname{Re} \langle \partial_x K \partial_x^{2(m-l)} D^s u, D^s u \rangle \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=0}^{2(m-1-l)} \left(\operatorname{Re} \langle \Phi_k(K) \partial_x^{2(m-l)-k-1} D^s u, D^s u \rangle + \operatorname{Re} \langle \Psi_k(K) \partial_x^{2(m-l)-k-1} D^s \bar{u}, D^s u \rangle \right) \right| \\ & \lesssim \|u\|_{H^s}^2. \end{aligned}$$

第一項が補正項の時間微分であり、これにより、高い階数の微分を含む項である第二項を相殺することが出来ることを意味している。ただし、この際に新たに第三項と第四項の低階の微分を含む項が現れる。定理 1 の証明においては、これらの低階の項と、もともと (S) の方程式が持つ低階の項を同時に相殺するために、補題 4 およびこれと類似の補題を繰り返し用いて $\{K_j\}_{j=1}^{2m-2}, \{L_j\}_{j=1}^{2m-2}$ を帰納的に決定することが鍵である。また、この手法において相殺できる項 $\operatorname{Re} \langle \partial_x K \partial_x^{2(m-l)} D^s u, D^s u \rangle$ の係数が $\partial_x K$ という形であるため、係数の Fourier 0 モードが消えている項しか相殺できない。この結果 Fourier 0 モードに起因して残る部分が定理 1 の左辺の第四項と第五項となる。

参考文献

- [1] H. Chihara, *The initial value problem for Schrödinger equations on the torus*, Int. Math. Res. Not. **15** (2002), 789–820.
- [2] R. Mizuhara, *The initial value problem for third and fourth order dispersive equations in one space dimension*, Funkcial. Ekvac. **49** (2006), 1–38.
- [3] K. Tsugawa, *Local well-posedness of derivative Schrödinger equations on the torus*, preprint.