曲率次元条件を通して見る有向グラフの極限

東北大学大学院理学研究科数学専攻
竹内秀 (Shu TAKEUCHI)

概要

空間列がある条件を満たすときに極限空間でも同じ条件が成り立つか, という問題は, 幾何解析において重要である. 特に, 曲率が下に有界かつ次元が上に有界であるという条件は曲率次元条件と呼ばれ, 空間収束に関するこの条件の安定性に関する研究としては Sturm, Lott-Villani 等が挙げられる. 本発表では, 曲率次元条件の観点から, 有向グラフの辺の重さが無限大に発散する場合にはどのようなグラフに収束するべきかを提起する. また, 現在判明している限りではあるが, そのような収束に関する曲率次元条件の安定性を紹介したい.

1　導入

まず, 次の問題を考える:

問題. $\{X_h\}_{h=0}^{\infty}$ を, “空間” の列とする. また, X_h は X_∞ に “収束” しているとする. この時, ある “条件” が存在し, 全ての $h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し X_h が “条件” を満たすならば, X_∞ は “条件” を満たすか.

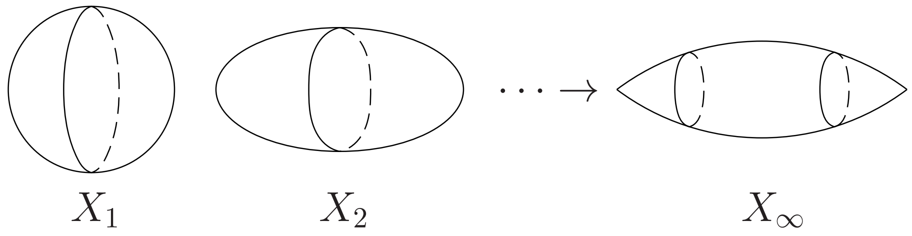

図 1

ここで, “空間”, “収束”, “条件” は考えている問題により異なる. **問題**の具体例としては, 以下が挙げられる, すなわち, $X_1, X_2, \ldots$ は図 1 における曲面の列とし, X_∞ は図 1 における特異点付き曲面とする. この時, X_h は X_∞ に Gromov-Hausdorff 距離 (ここでは定義は述べない) について収束している. この例のようにすれば, 数学的に扱いにくい空間 (ここでは X_∞) に関する性質を, 数学的に扱いやすい空間 (ここでは $X_1, X_2, \ldots$) により近似することで調べることが可能である. これが冒頭で述べた**問題**の背景である. このような問題は幾何解析と呼ばれる分野では非常に重要な問題である.

近年, 次の問題に対する研究が盛んである (用語の意味は後で述べる):

問題. $\{(X_h, d_h, m_h)\}_{h=0}^{\infty}$ を, 測度距離空間の列とする. また, (X_h, d_h, m_h) は $(X_\infty, d_\infty, m_\infty)$ に測

度付き Gromov-Hausdorff 収束しているとする．この時, ある $N \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ とある $K \in \mathbb{R}$ が存在し, 全ての $h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し (X_h, d_h, m_h) が "次元が N 以下かつ Ricci 曲率が K 以上" を満たすならば, $(X_\infty, d_\infty, m_\infty)$ は "次元が N 以下かつ Ricci 曲率が K 以上" を満たすか.

ここで, (X, d, m) が測度距離空間であるとは, (X, d) が完備可分距離空間であり, m が (X, d) 上の Borel 測度である, ということである．測度付き Gromov-Hausdorff 収束の定義はここでは述べないが, 図 1 の例は測度付き Gromov-Hausdorff 収束する測度距離空間の列の例である．ここで問題となるのは, X が Riemann 多様体でない場合に "次元が N 以下かつ Ricci 曲率が K 以上" という仮定が定義できるかどうかである．実は, 測度距離空間に対してはこのような条件が定式化できることが知られている．この条件は曲率次元条件と呼ばれ, 英語の頭文字をとって $\mathrm{CD}(N, K)$ 条件と呼ばれる．この問題に関する研究としては, 例えば [6], [10] が挙げられる．特に, 曲率が下に有界であるという条件はとりわけ重要であり, Lichnerowicz-Obata の定理 (例えば, [12] を参照) などの応用がある．

本報告の目的は, X_h が重み付き有限有向グラフの場合に, 同様の結論が成り立つことを述べることである．

まず問題となるのは, グラフの列に対し収束の概念を与えることである．例えば, グラフの列の辺の重さが有界である場合には, [7], [8] 等において収束の定義が与えられている．一方, グラフの列の辺の重さが無限大に発散する場合の研究はほとんどなく, 収束の概念を与える必要がある．これは, グラフの辺の重さを電気回路の抵抗の逆数と考える ([4], [11] 等を参照) ことにより, 自然に得られる発想である．

次に問題となるのは, グラフの Ricci 曲率とは何か, という問題である．これに関しては, [5] 等が挙げられるが, ここでは [1] による CD 条件を用いた主張を述べる．

命題 1.1. $N \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}, K \in \mathbb{R}$ とする．任意の $h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, 重み付き有限有向グラフ G_h が $\mathrm{CD}(N, K)$ 条件を満たすならば, 重み付き有限有向グラフ G_∞ は $\mathrm{CD}(N, K)$ 条件を満たす. 但し, G_h は図 2 のようなものとする．

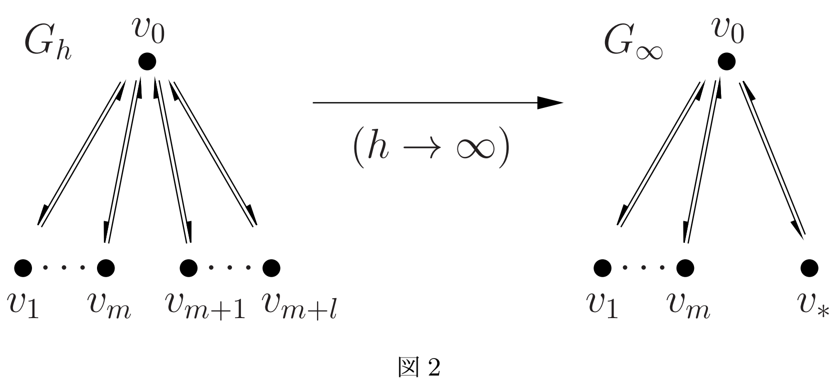

図 2

G_h の重さ w_{ij} は, $i \in \{m+1, \ldots, m+l\}$ かつ $j \in \{m+1, \ldots, m+l\}$ の時, h に依存するものと

する. これを $w_{ij,h}$ と表記する. また, グラフ G_∞ の重さは次で定める:

$$w_{ij} := \begin{cases} w_{ij} & (i,j = 0,1,\dots,m) \\ \sum_{k=m+1}^{m+l} w_{ik} & (i = 0,1,\dots,m, j = *) \\ \sum_{k=m+1}^{m+l} w_{jk}w_{kj} / \sum_{k=m+1}^{m+l} w_{jk} & (i = *, j = 0,1,\dots,m) \end{cases} \tag{1.1}$$

第 2 節では, 重み付き有限有向グラフと曲率次元条件の定義を与える. 第 3 節では, 関連する例を提示したのち, 命題 1.1 の証明のアイデアを述べる.

2 重み付き有限有向グラフの曲率次元条件

この節では, 曲率次元条件の定義を述べる. 詳細は [2] 及び [3] を参照されたい.

$G = (V, E, w)$ を重み付き有限有向グラフとする. すなわち, V, E, w は以下を満たすとする:

- V は有限集合である. 以降, $V := \{v_0, v_1, \dots, v_m\} \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ とする.
- E は $V \times V$ の部分集合である.
- w は $V \times V$ から $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への関数で, 以下を満たすとする:

$$\begin{cases} i = j \Rightarrow w(v_i, v_j) = 0, \\ i \neq j \Rightarrow (w(v_i, v_j) > 0 \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E). \end{cases} \tag{2.1}$$

以降, $w_{ij} := w(v_i, v_j)$ とする.

$\mathbb{R}^V$ を, V 上の実数値関数全体とする. 以降この節では, 重み付き有限有向グラフ $G = (V, E, w)$ を固定する.

定義 2.1. $f \in \mathbb{R}^V$ に対し, $\Delta f \in \mathbb{R}^V$ を

$$(\Delta f)(v_i) := \sum_{j=0}^{m} w_{ij}(f(v_j) - f(v_i)) \tag{2.2}$$

により定義する.

定義 2.2. $f, g \in \mathbb{R}^V$ に対し,

$$\Gamma(f, g) := \frac{1}{2}(\Delta(fg) - f(\Delta g) - (\Delta f)g) \in \mathbb{R}^V \tag{2.3}$$

とする. 更に, $\Gamma(f) := \Gamma(f, f)$ とする.

定義 2.3. $f, g \in \mathbb{R}^V$ に対し,

$$\Gamma_2(f, g) := \frac{1}{2}(\Delta(\Gamma(f, g)) - \Gamma(\Delta f, g) - \Gamma(f, \Delta g)) \in \mathbb{R}^V \tag{2.4}$$

とする. 更に, $\Gamma_2(f) := \Gamma_2(f, f)$ とする.

定義 2.4. $N \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$, $K \in \mathbb{R}$ とする. G が $\mathrm{CD}(N, K)$ 条件を満たすとは, 任意の $f \in \mathbb{R}^V$ に対し

$$\Gamma_2(f) \geq \frac{1}{N}(\Delta f)^2 + K\Gamma(f) \tag{2.5}$$

が成り立つこととする．G が $v \in V$ において $\mathrm{CD}(N,K)$ 条件を満たすとは，任意の $f \in \mathbb{R}^V$ に対し

$$(\Gamma_2(f))(v) \geq \frac{1}{N}(\Delta f)^2(v) + K(\Gamma(f))(v) \tag{2.6}$$

が成り立つこととする．

注意 2.5. 定義 2.4 は，次の事実の類似である：M を $\dim_M \leq N$ 及び $\mathrm{Ric}_M \geq K$ を満たす *Riemann* 多様体とする．この時，任意の $f \in C^\infty(M)$ に対し，

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 - \langle \nabla f, \nabla \Delta f\rangle \geq \frac{1}{N}(\Delta f)^2 + K|\nabla f|^2 \tag{2.7}$$

が成り立つ．証明は [9] を参照されたい．

定義 2.4 において $x_i := f(v_i) - f(v_0)$ とすることで，次の補題を得る：

補題 2.6. $m \geq 1$ とする．この時，以下は同値である．

(1) G が v_0 において $\mathrm{CD}(N,K)$ 条件を満たす．
(2) 任意の $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j + \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{m} w_{0i}w_{i0}x_i^2 \geq \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^{m} w_{0i}x_i\right)^2 + \frac{1}{2}\left(K + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} w_{0i}\right)\sum_{i=1}^{m} w_{0i}x_i^2 \tag{2.8}$$

が成り立つ．ただし，

$$a_{ij} := \begin{cases} \sum_{k=1}^{m}(3w_{0i}w_{ik} + w_{0k}w_{ki}) & (i = j) \\ -2(w_{0i}w_{ij} + w_{0j}w_{ji}) & (i \neq j) \end{cases} \tag{2.9}$$

とする．

3　計算例及び主結果の証明のアイデア

例 3.1. 図 3 のグラフにおいて，$w_{01} > 0$ とする．補題 2.6 より，v_0 において $\mathrm{CD}(N,K)$ 条件が成り立つための必要十分条件は，

$$\kappa \leq -w_{01}\nu + \frac{3}{4}w_{10} \tag{3.1}$$

が成り立つことである．ここで，

$$\kappa := \frac{1}{2}\left(K + \frac{1}{2}w_{01}\right), \nu := \frac{1}{N} - \frac{1}{2} \tag{3.2}$$

である．

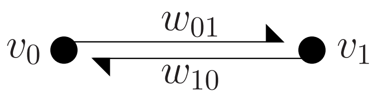

図 3

例 3.2. 図 4 のグラフにおいて, $w_{01}, w_{02}, c > 0$ とする. 補題 2.6 より, v_0 において $\mathrm{CD}(N, K)$ 条件が成り立つことと, 次は同値である:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, w_{01}w_{02}c(x_1 - x_2)^2 + \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{2} w_{0i}w_{i0}x_i^2 \geq \nu \left(\sum_{i=1}^{2} w_{0i}x_i\right)^2 + \kappa \sum_{i=1}^{2} w_{0i}x_i^2 \tag{3.3}$$

$$\Leftrightarrow \kappa \leq \frac{1}{2}\left(-(\nu - c)\sum_{i=1}^{2} w_{0i} + \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{2} w_{i0} + \sqrt{\left((\nu + c)(w_{01} - w_{02}) - \frac{3}{4}(w_{10} - w_{20})\right)^2 + 4w_{01}w_{02}(\nu + c)^2}\right) \tag{3.4}$$

ここで,

$$\kappa := \frac{1}{2}\left(K + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} w_{0i}\right), \nu := \frac{1}{N} - \frac{1}{2} \tag{3.5}$$

である.

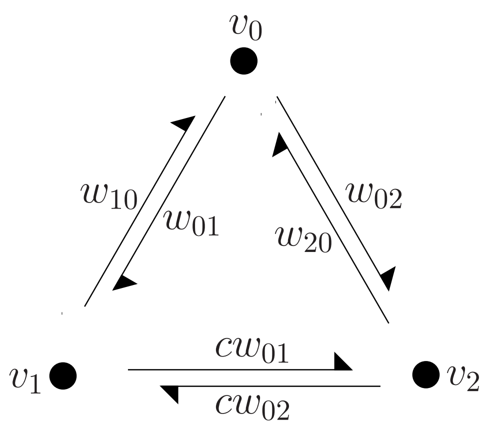

図 4

注意 3.3. (3.4) 式の右辺を c の関数とみて $\varphi(c)$ とすると,

$$\lim_{c \to \infty} \varphi(c) = -(w_{01} + w_{02})\nu + \frac{3}{4} \cdot \frac{w_{01}w_{10} + w_{02}w_{20}}{w_{01} + w_{02}} \tag{3.6}$$

が成り立つ. このことは, 図 4 のグラフが, 曲率次元条件の観点から, $c \to \infty$ の時に図 5 のグラフに収束するべきだということを示唆している.

最後に, 命題 1.1 の証明に用いる補題を, 二つ述べる. 以降, $G_1, G_2, \ldots, G_\infty$ は, 命題 1.1 における重み付き有限有向グラフとする.

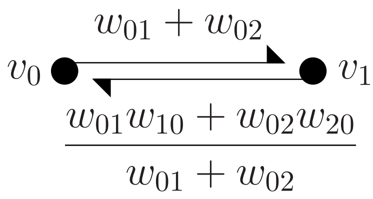

図 5

補題 3.4. ある $i,j\in\{m+1,m+2,\dots,m+l\}$ が存在して,

$$\lim_{h\to\infty}\frac{w_{0i}w_{ij,h}}{w_{0j}w_{ji,h}}\neq 1 \tag{3.7}$$

が成り立つとする．この時,

$$\bigcap_{h=0}^{\infty}\{(N,K)\ ;\ G_h\text{が}\ v_0\text{において CD}(N,K)\text{ 条件を満たす}\ \}=\emptyset \tag{3.8}$$

が成り立つ．

補題 3.5. ある $i,j\in\{m+1,m+2,\dots,m+l\}$ が存在して,

$$w_{i0}\neq w_{j0} \tag{3.9}$$

が成り立つとする．この時,

$$\bigcap_{h=0}^{\infty}\{(N,K)\ ;\ G_h\text{が}\ v_i\text{において CD}(N,K)\text{ 条件を満たす}\ \}=\emptyset \tag{3.10}$$

が成り立つ．

参考文献

[1] D. Bakry and M. Émery, *Diffusions hypercontractives* (French) [Hypercontractive diffusions], Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, 177-206, Lecture Notes in Math., **1123**, Springer, Berlin, 1985.

[2] F. Bauer, *Normalized graph Laplacians for directed graphs*, Linear Algebla Appl. **436** (2012), no. 11, 4193-4222.

[3] F. Bauer, P. Horn, Y. Lin, G. Lippner, D. Mangoubi and S.-T. Yau, *Li-Yau inequality on graphs*, J. Differential Geom. **99** (2015), no. 3, 359-405.

[4] 熊谷隆, 確率論, 共立出版 (2003).

[5] Y. Lin, L. Lu and S.-T. Yau, *Ricci curvature of graphs*, Tohoku Math. J. (2) **63** (2011), no. 4, 605-627.

[6] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 3, 903-991.

[7] L. Lovász, *Large networks and graph limits*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 60. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[8] L. Lovász and B. Szegedy, *Limits of dense graph sequences*, J. Combin. Theory Ser. B **96** (2006), no. 6, 933-957.

[9] 酒井隆, リーマン幾何学, 第 5 版, 裳華房 (2004).

[10] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I. and II.*, Acta Math. **196** (2006), no.1, 65-177.

[11] 砂田利一, 分割の幾何学, 日本評論社 (2000).

[12] 浦川肇, スペクトル幾何, 共立出版 (2015).