Finite β -expansion and odometer

大阪市立大学大学院 理学研究科 数物系専攻
高溝 史周 (Fumichika Takamizo)

概要

$\beta > 1$ を非整数とする. 変換 $T : x \mapsto \{\beta x\}$ によって各 $x \in [0, 1]$ の β -展開 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^{-n}$ が得られ, これをアルファベットの列として $d_\beta(x) = c_1 c_2 \dots$ と表す. 集合 M を記号空間 $\{0, 1, \dots, \lfloor \beta \rfloor\}^{\mathbb{N}}$ 上に自然に導入される距離による $d_\beta([0, 1])$ の閉包とすると, M 上にオドメーターが定義できる. このオドメーターの持つ性質によって有限性条件を満たす β を特徴づけることが出来る. ここに, β が有限性条件を満たすとは, $\mathbb{Z}[1/\beta] \cap [0, 1]$ の各要素が有限 β -展開を持つときに言う. 今回の講演では M 上のオドメーターと有限性条件に関する諸結果について紹介する.

1 導入

$\beta > 1$ を非整数とする. $x \in [0, 1]$ に対し $Tx := \{\beta x\} = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor$ と定義する. ここに $\{y\}$ は y の小数部分, $\lfloor y \rfloor$ は y の整数部分である. この T を β -変換と呼ぶ. このとき, 各 $x \in [0, 1]$ に対し β -変換を繰り返し行うことによって,

$$x \xrightarrow{c_1} Tx \xrightarrow{c_2} \dots \xrightarrow{c_n} T^n x \xrightarrow{c_{n+1}} \dots, \quad \text{where } c_n = \lfloor \beta T^{n-1} x \rfloor$$

が得られ, このアルゴリズムによって x の β -展開

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^{-n} = c_1 \beta^{-1} + c_2 \beta^{-2} + \dots + c_n \beta^{-n} + \dots$$

を得る. 特に digit の列に注目して, $d_\beta(x) = c_1 c_2 \dots$ と表す. $d_\beta(x) = c_1 c_2 \dots$ において, $n > N$ に対し $c_n = 0$ かつ $c_N > 0$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在するとき, $d_\beta(x) = c_1 c_2 \dots c_n$ と書き, $(c_n)_{n \geq 1}$ は有限列であるという. 有限でないとき, $(c_n)_{n \geq 1}$ は無限列であるという. 各 $x \in [0, 1]$ に対し $d_\beta(x)$ は一意的に定まり, また $d_\beta(x)$ は digit が $\mathbb{A} = \{0, 1, \dots, \lfloor \beta \rfloor\}$ であるような x の展開の中で辞書式順序において最大になることが知られている. $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ 上のシフト $\sigma : (c_n)_{n \geq 1} \mapsto (c_{n+1})_{n \geq 1}$ を考えると, $\sigma(d_\beta([0, 1])) = d_\beta([0, 1])$ が成り立つ. また $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ 上に距離 ρ を

$$\rho(c_1 c_2 \dots, c'_1 c'_2 \dots) = (\inf\{n \in \mathbb{N} \mid c_n \neq c'_n\})^{-1}$$

で定義すると, シフト σ は連続写像となる. $x \in [0, 1]$ に対し,

$$d_\beta^*(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} d_\beta(x - \varepsilon)$$

と定義する. 一般に $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ 上の列が $d_\beta([0, 1])$ に含まれるか否かを判定することが出来る.

Theorem 1.1 (W.Parry [10], Sh.Ito and Y.Takahashi [9]). $(c_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}} \in d_\beta([0, 1])$ とする必要十分条件は, すべての $p \in \mathbb{N}$ に対し $c_p c_{p+1} c_{p+2} \dots <_{\text{lex}} d_\beta^*(1)$ が成り立つことである.

集合 M を $d_\beta([0, 1])$ の距離 ρ による閉包とする. このとき, $\sigma(M) = M$ が成り立つ. さらに次が成り立つことが分かる.

Remark 1.1.

- (i) $d_\beta^*(1) \in M$.
- (ii) $d_\beta(x) = c_1 c_2 \cdots c_n$ かつ $c_n > 0$ のとき, $d_\beta^*(x) = c_1 c_2 \cdots c_{n-1} (c_n - 1) d_\beta^*(1)$.
- (iii) $d_\beta(x)$ が無限列ならば, $d_\beta^*(x) = d_\beta(x)$.
- (iv) $x = \nu(d_\beta^*(x))$.
- (v) $x \in [0, 1)$ に対し,

$$\{(c_n)_{n \geq 1} \in M \mid d_\beta^*(x) <_{lex} (c_n)_{n \geq 1} <_{lex} d_\beta(x)\} = \emptyset.$$

ここに $<_{lex}$ は辞書式順序における順序を表す

この Remark により, 集合 M は,

$$M = \{d_\beta(x) \mid x \in [0, 1)\} \cup \{d_\beta^*(x) \mid x \in [0, 1]\}$$

で与えられることが分かる. $M - d_\beta([0, 1])$ の要素を cofinite と呼ぶ. 定義より, cofinite 列は末尾が $d_\beta^*(1)$ と一致する無限列である.

次に $\beta > 1$ が d 次の代数的整数であるとする. $\text{Fin}(\beta)$ を $d_\beta(x)$ が有限であるような $x \in [0, 1)$ の全体とする. 明らかに $\text{Fin}(\beta) \subset \mathbb{Z}[1/\beta] \cap [0, 1)$ が成り立つ. C.Frougny は逆の包含関係

$$\text{Fin}(\beta) \supset \mathbb{Z}[1/\beta] \cap [0, 1) \tag{F}$$

が成り立つかどうかを問題とした ([6]). この性質を有限性条件 (F) という. 一般に β が (F) を満たすなら, β が Pisot 数となることが知られている. ここに代数的整数 $\beta > 1$ が Pisot 数であるとは, β のすべての共役根の絶対値が 1 未満であるときに言う. (F) を満たす $\beta > 1$ についてはいくつか知られており, 最小多項式が

$$x^d - \sum_{n=0}^{d-1} a_n x^n, \quad a_{d-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0$$

であるものを Frougny-Solomyak 型,

$$x^d - \sum_{n=0}^{d-1} a_n x^n, \quad a_{d-1} > \sum_{n=0}^{d-2} a_n, \quad a_n \geq 0$$

であるものを Hollander 型といい, これらは (F) を満たす. また S.Akiyama により, 3 次の Pisot 単数で (F) を満たすものは,

$$(A2) \quad b = -1, \quad a \geq 2$$

$$(H) \quad b = 0, \quad a \geq 1$$

$$(FS) \quad 1 \leq b \leq a$$

$$(A1) \quad b = a + 1, \quad a \geq 0$$

に限られることが示された ([1]). また 3 次の Pisot 数 β に対しては $d_\beta(1)$ の形が分かっている. このことは F.Bassino によって示された ([4]).

2 オドメーターの定義と性質

$|c_1|\beta^{-1} + |c_2|\beta^{-2} + \dots < \infty$ を満たす $(c_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ に対し, $\nu: \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\nu((c_n)_{n \geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^{-n}$$

と定義し, ν_e を

$$\nu_e(c) = \exp(2\pi i \nu(c))$$

と定める. ここに i は虚数単位である. ν, ν_e は共に連続写像であり, また M 上高々 2-to-1 である. 任意に $c = (c_n)_{n \geq 1}$ を与える. このとき, 任意の $\gamma \in \mathbb{R}$ に対し, ρ における極限

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_{\beta} \left(\left\{ \gamma + \sum_{n=1}^m c_n \beta^{-n} \right\} \right)$$

が存在する. これを $H_{\gamma}(c)$ と書き, M 上の γ に関するオドメーターと呼ぶ. オドメーターが持つ自然な性質として次が挙げられる.

Proposition 2.1. 次が成り立つ.

- (i) $\nu_e \circ H_{\gamma} = R_{\gamma} \circ \nu_e$. ここに $R_{\gamma}(z) = z \cdot \exp(2\pi i \gamma)$ である.
- (ii) c が有限列ならば, $H_{\gamma}(c)$ は cofinite でない.
- (iii) c が無限列ならば, $H_{\gamma}(c)$ も無限列である.

M 上のオドメーター H_{γ} の連続性は全射性や $H_{-\gamma}$ の単射性によって特徴づけることが出来る.

Theorem 2.2. 次は同値である.

- (1) H_{γ} が連続
- (2) $H_{-\gamma}$ が単射
- (3) c が有限なら $H_{-\gamma}(c)$ も有限
- (4) $H_{\gamma}(M)$ は M のすべての有限列を含む
- (5) H_{γ} は全射
- (6) $H_{\gamma}(d_{\beta}([0, 1])) \subset d_{\beta}([0, 1])$

またオドメーターによって有限性条件 (F) を特徴づけることが出来る.

Theorem 2.3. 代数的整数 β が (F) を満たすことの必要十分条件は, $H_{\beta-1}$ と $H_{-\beta-1}$ が単射となることである.

先の定理と合わせると次を得る.

Corollary 2.4. 代数的整数 β が (F) を満たすことの必要十分条件は, $H_{\beta-1}$ が全単射となることである.

3 オドメーターのオートマトンによる計算

以降, $\beta > 1$ は 3 次の代数的整数とし, その最小多項式を

$$x^3 - ax^2 - bx - c$$

とする. また $\alpha = \beta^{-1}$ とし, $H_{\pm\beta^{-1}}$ を $H_{\pm\alpha}$ と表す. M_3 を M に属する語の 3 文字の prefix の全体とする. 行列 U, L をそれぞれ

$$U = \begin{pmatrix} c & O & \\ b & c & \\ a & b & c \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ & -1 & a \\ O & & -1 \end{pmatrix}$$

とおき,

$$\mu(l_1.l_2.l_3) = (l_1, l_2, l_3)U \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix}$$

と定義する. 出力付きオートマトン, すなわち, トランスデューサー $\mathcal{A}_{\pm} = (Q, E, I_{\pm}, Q)$ を次で定義する: $I_{\pm}$ は初期状態の集合で

$$I_{\pm} = \pm\{(c^{-1}, 0, -1), (c^{-1}, 0, 0)\},$$

Q は状態集合で

$$Q = I_+ \cup I_- \cup \{\ell = (l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid |\mu(\ell)| < 1\},$$

E は edge の全体で

$$E = \left\{ \ell_0 \xrightarrow{\mathbf{w}/\mathbf{v}} \ell_1 \left| \begin{array}{l} \ell_n = (l_{3n+1}, l_{3n+2}, l_{3n+3}) \quad (n = 0, 1) \\ (l_j, l_{j+1}, l_{j+2}) \in Q \quad (j = 1, 2, 3) \\ \mathbf{w} = w_1w_2w_3 \in M_3, \mathbf{v} = v_1v_2v_3 \in M_3 \\ (v_1, v_2, v_3) = (w_1, w_2, w_3) + \ell_0U + \ell_1L \end{array} \right. \right\}$$

である. 定義から, $\ell \in I_+$ と $\mu(\ell) \in \{\alpha, \alpha - 1\}$ は同値である. また edge の集合における状態 ℓ_1 は, 状態 ℓ_0 に語 $\mathbf{w}$ を入力したとき, $\mathbf{v}$ が出力されるためのキャリーを表している. よって, $\mathcal{A}_+$ は H_{α} の, $\mathcal{A}_-$ は $H_{-\alpha}$ の計算過程を表している. また μ の定義から $\mu(0, 0, k) = k$ が成り立つ. したがって, 各状態 $\ell = (l_1, l_2, l_3)$ について, l_1, l_2 が与えられたとき l_3 の取り方は 2 通りである. 以降, 初期状態の集合 $I_{\pm}$ は I で表す.

Definition 3.1. E の無限 path $(\ell_n \xrightarrow{\mathbf{w}_n/\mathbf{v}_n} \ell_{n+1})_{n \geq 0}$ が normal path であるとは, $(\mathbf{w}_n)_{n \geq 0}$ と $(\mathbf{v}_n)_{n \geq 0}$ の両方が M に属するときという.

Theorem 3.2. 任意の $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2 \cdots \in M$ に対し, $\ell_0 \in I$ を満たす normal path $(\ell_n \xrightarrow{\mathbf{w}_n/\mathbf{v}_n} \ell_{n+1})_{n \geq 0}$ が存在する.

次はトランスデューサーで出力される結果 $\mathbf{v} \in M$ が自然に有する性質である.

Proposition 3.3. $(\ell_n \xrightarrow{\mathbf{w}_n/\mathbf{v}_n} \ell_{n+1})_{n \geq 0}$ を normal path とする. このとき, $(\mathbf{w}_n)_{n \geq 0}$ が有限ならば, $(\mathbf{v}_n)_{n \geq 0}$ は cofinite でない.

これはオドメーターが有する性質でもある。しかし、トランスデューサーにおいては、入力語 $w \in M$ が無限列であっても出力語 $v \in M$ が無限列になるとは限らない。したがって、任意の入力語 $w \in M$ に対する normal path は高々 2 つ存在する。しかし、各状態が有限 β -展開を持つ場合、次が成り立つ。

Proposition 3.4. 任意の $l \in Q$ に対し、 $|\mu(l)| \in \text{Fin}(\beta)$ が成り立つとする。このとき、入力語 $w \in M$ が有限列であることと出力語 $v \in M$ が有限列であることは同値である。

この Proposition の Corollary として次を得る。

Corollary 3.5. 任意の $l \in Q$ に対し、 $|\mu(l)| \in \text{Fin}(\beta)$ が成り立つとする。このとき、任意の入力語 $w \in M$ に対する normal path は一意的に決まる。

したがって、すべての $l \in Q$ に対し、 $|\mu(l)| \in \text{Fin}(\beta)$ が成り立つとき、出力語はオドメーターと一致し、特にそのような β は (F) を満たす。しかし、一般には状態集合 Q が有限集合とは限らないため、各状態 $l \in Q$ に対し $|\mu(l)|$ が有限 β -展開を持つかどうかを確認することは難しい。一般に β が Pisot 数の場合には状態集合が有限集合になることが示されるが、状態集合 Q を具体的に特定できてはいない。以下では、状態集合を具体的に求めるための一つの方法を述べる。ただし、 $\lambda(\eta, \theta) = \eta\alpha + \theta(b\alpha + \alpha^2)$ とする。

Lemma 3.6. $(l_n \xrightarrow{w_n/v_n} l_{n+1})_{n \geq 0}$ は $l_0 \in I$ を満たす normal path とする。ただし、

$$w_n = w_{3n+1}w_{3n+2}w_{3n+3}$$

$$v_n = v_{3n+1}v_{3n+2}v_{3n+3}$$

$$l = (l_{3n+1}, l_{3n+2}, l_{3n+3})$$

とする。このとき、 $n \geq 0$ に対し $y = x + \mu(l_{n+1}, l_{n+2}, l_{n+3})$ かつ $Ty = Tx + \mu(l_{n+2}, l_{n+3}, l_{n+4})$ を満たす $x, y \in [0, 1)$ が存在する。したがって、 $l_{n+4} = -[\lambda(l_{n+2}, l_{n+3}) + Tx]$ が成り立つ。

この Lemma により normal path $(l_n \xrightarrow{w_n/v_n} l_{n+1})_{n \geq 0}$ においては、各 $n \geq 0$ に対し、

$$l_{n+4} \in \{-[\lambda(l_{n+2}, l_{n+3}) + Tx] \mid x \in [0, 1) \text{ with } 0 \leq x + \mu(l_{n+1}, l_{n+2}, l_{n+3}) < 1\}$$

が成り立つことが分かる。

Theorem 3.7. $r \in \mathbb{N}$ とし、 $(l_n \xrightarrow{w_n/v_n} l_{n+1})_{n \geq 0}$ は $l_0 \in I$ を満たす normal path とする。もし

$$\max \left\{ \left| [\lambda(\eta, \theta) + Tx] \right| \mid \begin{array}{l} \eta, \theta \in \mathbb{Z} \cap [-r, r], x \in [0, 1), \\ (\zeta, \eta, \theta) \in Q, x + \mu(\zeta, \eta, \theta) \in [0, 1) \text{ for some } \zeta \in \mathbb{Z} \cap [-r, r] \end{array} \right\} \leq r$$

が成り立つなら、すべての $n \geq 0$ に対し、 $l_n \in (\mathbb{Z} \cap [-r, r])^3$ が成り立つ。

特に $\eta, \theta \in \mathbb{Z} \cap [-r, r]$ に対し $|\lambda(\eta, \theta)| < r$ なら、normal path $(l_n \xrightarrow{w_n/v_n} l_{n+1})_{n \geq 0}$ において、すべての $n \geq 0$ に対し $l_n \in (\mathbb{Z} \cap [-r, r])^3$ が成り立つ。

4 主結果

$\beta = \alpha^{-1}$ は 3 次の代数的整数とし, その最小多項式を $x^3 - ax^2 - bx - c$ とする.

Theorem 4.1. $c = 1$ かつ a, b が次のいずれかを満たすとする.

$$(A2) \quad b = -1, a \geq 2$$

$$(H) \quad b = 0, a \geq 1$$

$$(FS) \quad 1 \leq b \leq a$$

$$(A1) \quad b = a + 1, a \geq 0$$

このとき, $\#Q_* < \infty$ を満たす状態集合 $Q_* \subset Q$ であって, トランスデューサー (Q_*, E, I, Q_*) がオドメーターを計算し, かつ任意の $l \in Q_*$ に対し $|\mu(l)|$ が有限 β -展開を持つようなものが存在する.

これにより, オートマトン理論の側面から S.Akiyama の定理の別証明を得た. さらに, この定理は $c \geq 1$ の場合に拡張させることができる.

Theorem 4.2. a, b, c が次のいずれかを満たすとする.

$$(FS) \quad c \leq b \leq a$$

$$(A2)' \quad -a < b < 0, c - b \leq a$$

$$(H-1) \quad 0 \leq b \leq a, c + b \geq a, c = b + 1$$

$$(H-2) \quad 0 \leq b \leq a, c + b < a, c > b$$

$$(A1-1) \quad b > a, 2b = 2a + c + 1, 2c = b + 1$$

$$(A1-2) \quad b > a, 2b = 2a + c + 1, 2c \leq a + 1$$

このとき, $\#Q_* < \infty$ を満たす状態集合 $Q_* \subset Q$ であって, トランスデューサー (Q_*, E, I, Q_*) がオドメーターを計算し, かつ任意の $l \in Q_*$ に対し $|\mu(l)|$ が有限 β -展開を持つようなものが存在する.

表 1 から表 6 は (FS), (A2)', (H-1), (H-2), (A1-1) 及び (A1-2) の状態集合である. ただし, $(l_1, l_2, l_3) \in Q$ とし, (A1-1) と (A1-2) は他と比べて状態集合が多くなるため, $Q' \sqcup (-Q') = Q_*$ を満たす Q_* の部分集合 Q' のみを記載する.

5 Theorem 4.2 の証明の概要

主張の Q_* を次のように定義する: (a, b, c) が (FS), (A2)', (H-1), (H-2) のいずれかの場合,

$$Q_* = I_+ \cup I_- \cup \left\{ (l_1, l_2, l_3) \in Q \cap (\mathbb{Z} \cap [-1, 1])^3 \mid \begin{array}{l} \text{ある } l_0 \in \mathbb{Z} \cap [-1, 1] \text{ が存在して,} \\ |\mu(l_0, l_1, l_2)| < 1 \text{ を満たす.} \end{array} \right\}$$

(a, b, c) が (A1-1) または (A1-2) の場合,

$$Q_* = I_+ \cup I_- \cup \left\{ (l_1, l_2, l_3) \in Q \cap (\mathbb{Z} \cap [-2, 2])^3 \mid \begin{array}{l} \text{ある } l_0 \in \mathbb{Z} \cap [-2, 2] \text{ が存在して,} \\ |\mu(l_0, l_1, l_2)| < 1 \text{ を満たす.} \end{array} \right\}$$

このとき, 次の 2 つの命題が得られる.

表 1: (FS) 型 (ただし, $\bar{1} = -1$)

l_1	0	0	0	1	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$
l_2	0	1	$\bar{1}$	0	$\bar{1}$	0	1
l_3	0	$\bar{1}$ or 0	0 or 1	$\bar{1}$ or 0	0 or 1	0 or 1	$\bar{1}$ or 0

表 2: (A2)' 型 (ただし, $\bar{1} = -1$)

l_1	0	0	0	1	1	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
l_2	0	1	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$
l_3	0	0 or 1	$\bar{1}$ or 0	$\bar{1}$ or 0	$\bar{1}$ or 0	$\bar{1}$ or 0	0 or 1	0 or 1	0 or 1

表 3: (H-1) 型 (ただし, $\bar{1} = -1$)

l_1	0	0	0	1	1	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
l_2	0	1	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$
l_3	0	$\bar{1}$ or 0	0 or 1	$\bar{1}$ or 0	$\bar{1}$	$\bar{1}$ or 0	0 or 1	0 or 1	1

表 4: (H-2) 型 (ただし, $\bar{1} = -1$)

l_1	0	0	0	1	1	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
l_2	0	1	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$
l_3	0	$\bar{1}$ or 0	0 or 1	$\bar{1}$ or 0	$\bar{1}$ or 0	$\bar{1}$ or 0	0 or 1	0 or 1	0 or 1

表 5: (A1-1) 型 (ただし, $\bar{1} = -1, \bar{2} = -2$)

l_1	0	0	1	1	1	1	2	2
l_2	0	1	0	1	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
l_3	0	$\bar{2}$ or $\bar{1}$	$\bar{1}$ or 0	$\bar{2}$ or $\bar{1}$	0 or 1	1 or 2	$\bar{1}$ or 0	1 or 2

表 6: (A1-2) 型 (ただし, $\bar{1} = -1, \bar{2} = -2$)

l_1	0	0	1	1	1	2	2
l_2	0	1	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
l_3	0	$\bar{2}$ or $\bar{1}$	$\bar{1}$ or 0	0 or 1	1 or 2	0 or 1	1 or 2

Proposition 5.1. $(l_1, l_2, l_3) \in Q_*$ とする.

(1) (a, b, c) が (FS) を満たすなら次を満たす.

(i) $l_2 > 0$ のとき $l_3 \leq 0$

(ii) $l_2 < 0$ のとき $l_3 \geq 0$

(2) (a, b, c) が (A1-2) を満たすなら次を満たす.

(i) $l_2 > 0$ のとき $l_3 \leq 0$

(iii) $l_2 = 0$ のとき $|l_3| < 1$

(ii) $l_2 < 0$ のとき $l_3 \geq 0$

(iv) $l_3 = 0$ のとき $|l_2| < 1$

Proposition 5.2. $(l_1, l_2, l_3) \in Q_*$ とする.

(i) (a, b, c) が (H-1) を満たすなら, 次が成り立つ.

$$\max \left\{ \left| [\lambda(\eta, \theta) + Tx] \right| \left| \begin{array}{l} \eta, \theta \in \mathbb{Z} \cap [-1, 1], x \in [0, 1), \\ (\zeta, \eta, \theta) \in Q_*, x + \mu(\zeta, \eta, \theta) \in [0, 1) \text{ for some } \zeta \in \mathbb{Z} \cap [-1, 1] \end{array} \right. \right\} \leq 1$$

(ii) (a, b, c) が (A1-1) を満たすなら, 次が成り立つ.

$$\max \left\{ \left| \lfloor \lambda(\eta, \theta) + Tx \rfloor \right| \begin{array}{l} \eta, \theta \in \mathbb{Z} \cap [-2, 2], x \in [0, 1), \\ (\zeta, \eta, \theta) \in Q_*, x + \mu(\zeta, \eta, \theta) \in [0, 1) \text{ for some } \zeta \in \mathbb{Z} \cap [-2, 2] \end{array} \right\} \leq 2$$

これらの命題によって各々の Q_* を決定することができる. ただし, (H-2) 型及び (A2)' 型については考えられるすべてのキャリーが現れる.

参考文献

- [1] S.Akiyama, Cubic Pisot units with finite beta expansions, in 'Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis', ed. F.Halter-Koch and R.F.Tichy, de Gruyter 2000.
- [2] S.Akiyama, Pisot numbers and greedy algorithm, in 'Number Theory, Diophantine, Computational and Algebraic Aspects', ed. K.Györy, A.Pethö and V.T.Sós, de Gruyter 1998.
- [3] S.Akiyama, Pisot number system and its dual tiling, NATO Security Sci Series D: Information and Communication Security. vol 7, 1(2006), 133-154.
- [4] F.Bassino, Beta-expansions for cubic Pisot numbers, in LATIN '02, 2286 in LNCS, Springer, (2002), 141-152.
- [5] D.Berend and C.Frougny, Computability by Finite Automata and Pisot Bases, Mathematical systems theory. vol27, 5(1994), 275-282.
- [6] C.Frougny, Finite beta-expansions, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 12(1992), 713-723.
- [7] C.Frougny, Non-standard number representation : computer arithmetic, beta-numberation and quasicrystals, NATO Security Sci Series D: Information and Communication Security. vol 7, 1(2006), 155-169.
- [8] C.Frougny, Representations of Numbers and Finite Automata, Math. Systems Theory. vol25, 5(1992), 37-60.
- [9] Sh.Ito and Y.Takahashi, Markov subshifts and realization of β -expansions, J. Math. Soc. Japan, vol26, Number 1(1974), 33-55.
- [10] W.Parry, On the β -expansion of real numbers, Acta Math Hung, 11(1960), 401-416.