Attainability of a stationary Navier-Stokes flow around a rigid body rotating from rest

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
高橋知希 (Tomoki TAKAHASHI)

概要

本講演では回転運動する剛体周りで，非圧縮粘性流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = \Delta u - \nabla p, \quad \nabla \cdot u = 0$$

を取り扱う．特に剛体の運動は徐々に回転角速度を上げて，ある時刻以降は等角速度運動することを仮定する．このときの流体の運動は時間無限大で Galdi [3] により得られた定常流に収束することを報告する．

1 導入

偏微分方程式は自然現象を記述するものが多く，その影響は工学や医学など多岐にわたる．偏微分方程式の一つに流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式がある．Navier-Stokes 方程式をさまざまな物理状況のもとで考えることによって，これまで多くの数学的な発展がなされてきた．例えば海の流れや血管の中の血の流れなど自然現象と密接に関係していることからも，このような研究の方向性は自然であると考える．本講演では，回転運動する剛体周りで Navier-Stokes 方程式を扱い，流体の運動の長時間挙動を考察する．特に，3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内のコンパクトな剛体（境界は滑らか）とその外部を占める非圧縮粘性流の両方が静止しているとし，剛体は徐々に回転角速度を上げて，ある時刻以降は等角速度運動することを仮定する．このような問題は Starting problem と呼ばれ，発端は 1965 年に Finn [2] により提唱された Finn の Starting problem である．ここで Finn の Starting problem とは上記の問題を並進運動に置き換えたものを指し，特に時間無限大で physically reasonable solution と呼ばれる定常流（時間によらない流れ）に収束することが予想されていた．Finn の Starting problem については Heywood [6] が最初に取り扱った後，Galdi–Heywood–Shibata [4] により解決された．一方で回転運動の場合の Starting problem は Hishida [7] で定常流に収束することが予想されている．そこで，本講演では回転運動の場合の Starting problem を扱い，Galdi [3] で得られている定常流に収束することを示す．

数学的定式化を行う．上記に述べた剛体の運動は回転角速度 $\psi(t)\omega_0$ によって表される．ここで $\psi(t)$ は

$$\psi \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}), \quad |\psi(t)| \leq 1 \ \text{ for } t \in \mathbb{R}, \ \ \psi(t) = 0 \ \text{ for } t \leq 0, \ \ \psi(t) = 1 \ \text{ for } t \geq 1 \tag{1.1}$$

を満たす $\mathbb{R}$ 上の関数であり，a をある実数として $\omega_0 = (0, 0, a)$ である．剛体の外部を占める流体の

運動は剛体に密着させた座標系において次の方程式に従う：

$$
\begin{aligned}
\partial_t u + u\cdot\nabla u &= \Delta u - \psi(t)\omega_0\times u + (\psi(t)\omega_0\times x)\cdot\nabla u - \nabla p && x\in D,\ t>0,\\
\nabla\cdot u &= 0 && x\in D, t\ge 0,\\
u|_{\partial D} &= \psi(t)\omega_0\times x && t\ge 0,\\
u &\to 0 && \text{as } |x|\to\infty,\\
u(x,0) &= 0 && x\in D.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

ここで，$x=(x_1,x_2,x_3)^T$ と t をそれぞれ位置と時刻とし，D は外部領域である．第一式が運動量保存則，第二式が（非圧縮粘性流体に対する）質量保存則を表す．また，第三式は滑りなし条件と呼ばれている．この条件は，粘性流体は境界に密着するという性質を反映させている．未知関数はベクトル値関数 $u=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t))$ とスカラー値関数 $p=p(x,t)$ で，それぞれ流体の速度，圧力を表す．また，$\nabla\cdot u=\operatorname{div} u=\partial_{x_1}u_1+\partial_{x_2}u_2+\partial_{x_3}u_3$ であり，作用素 $\Delta=\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2+\partial_{x_3}^2$，$u\cdot\nabla=u_1\partial_{x_1}+u_2\partial_{x_2}+u_3\partial_{x_3}$ を用いて，$\Delta u=(\Delta u_1,\Delta u_2,\Delta u_3)$，$(u\cdot\nabla)u=((u\cdot\nabla)u_1,(u\cdot\nabla)u_2,(u\cdot\nabla)u_3)$ である．第一式に現れる $(\psi(t)\omega_0\times x)\cdot\nabla u$ は外部領域で非有界な係数を伴う項であり，この項をいかに取り扱うかがポイントである．並進運動の場合には出てこず，回転運動特有であると言える．時刻が十分経過（$t\ge 1$）したとき，方程式 (1.2) の定常問題は

$$
\begin{aligned}
&u_s\cdot\nabla u_s=\Delta u_s-\omega_0\times u_s+(\omega_0\times x)\cdot\nabla u_s-\nabla p_s \quad x\in D,\\
&\nabla\cdot u_s=0 \quad x\in D,\quad u_s|_{\partial D}=\omega_0\times x,\quad u_s\to 0 \quad \text{as } |x|\to\infty
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

である．定常問題 (1.3) については，$|a|$ が十分小さい時，Galdi [3] によってスケール臨界な各点評価

$$
|u_s(x)|\le\frac{C|a|}{|x|},\quad |\nabla u_s(x)|+|p_s(x)|\le\frac{C|a|}{|x|^2}
\tag{1.4}
$$

を伴う滑らかな一意解が得られている．各点評価 (1.4) のもとではルベーグ空間を用いた議論が困難であるため，ルベーグ空間よりも広い弱ルベーグ空間を用いて議論を行う．弱ルベーグ空間については 3 節で簡潔に触れる．並進運動の場合（Finn の Starting problem）には定常解の可積分性が良かったため，ルベーグ空間で議論が出来たことに注意しておく．本講演では，定常解 u_s に収束する (1.2) の解 u の存在を示すだけでなく，どの意味（ノルム）で，どの程度のオーダーで収束するのかを明らかにしたい．

2　主定理

本講演の主定理は以下である．

Theorem 2.1. 条件 (1.1) を満たす ψ をとり，$\alpha=\max\limits_{t\in\mathbb{R}}|\psi'(t)|$ とおく．

1. ある定数 $\delta>0$ が存在して，$(\alpha+1)|a|\le\delta$ ならば (1.2) は以下の性質を満たす一意解 u をもつ：

$$
\begin{aligned}
&u\in BC_{w^*}([0,\infty);L^{3,\infty}_\sigma)\cap C_{w^*}((0,\infty);L^\infty),\\
&u\in C((0,\infty);L^r_\sigma),\ \nabla u\in C_w((0,\infty);L^r)\quad \forall r\in(3,\infty)
\end{aligned}
$$

であって，初期条件を

$$\|u(t)\|_{L^{3,\infty}} \to 0 \quad \text{as } t \to 0$$

の意味で満たす．ここで，$BC_{w^*}(I;X)$ は X に値をとる有界かつ弱$*$連続な関数全体である．

2. 任意の $q \in (6,\infty)$ に対してある定数 $\widetilde{\delta}(q) \in (0,\delta]$ が存在して，$(\alpha+1)|a| \le \widetilde{\delta}$ ならば，上記で得た一意解 u の時間無限大での挙動について以下が成り立つ．

$$\|u(t)-u_s\|_{L^r} = O(t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2r}}) \quad \text{as } t \to \infty, \quad \forall r \in (3,q), \tag{2.1}$$

$$\|u(t)-u_s\|_{L^{q,\infty}} = O(t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2q}}) \quad \text{as } t \to \infty, \tag{2.2}$$

$$\|u(t)-u_s\|_{L^r} = O(t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2q}}) \quad \text{as } t \to \infty, \quad \forall r \in (q,\infty]. \tag{2.3}$$

ただし，$L^r(D)$ は r 乗可積分な関数全体，$L^r_\sigma(D)$ はソレノイダル（$\operatorname{div} u = 0$）な L^r 空間．また，$L^{q,\infty}(D)$ は弱 L^q 空間であり，$L^{q,\infty}_\sigma(D)$ はソレノイダルな弱 L^q 空間を表す．

減衰の度合い (2.1)–(2.3) についていくつか注意を述べる．まず，(2.1) は L^3-L^r 評価の観点から Optimal と言える．L^q-L^r 評価については次節で触れる．一方で (2.3) は Optimal でなく，$O(t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2r}})$ で減衰するか分かっていない．また L^q ノルムでの減衰については，Optimal ではないが，$O(t^{-1/2+3/2q}\log t)$ で減衰するという結果は得られた．

次節以降，非専門の方を念頭に証明のアイデアをつかんでもらうため，$\mathbb{R}^3$ 上の熱方程式を中心に述べる．

3　L^q-L^r 評価とローレンツ空間

積分方程式を解くことによって主定理を得るが，重要な役割を果たすのが線形方程式の解の評価 (L^q-L^r 評価) である．ここでは簡単のため全空間 $\mathbb{R}^3$ 上の熱方程式を取り扱い，L^q-L^r 評価について述べる．また本研究はローレンツ空間を用いて議論する必要があるため，ローレンツ空間についても簡単に触れ，ローレンツ空間に対する L^q-L^r 評価についても言及する．

熱方程式の初期値問題

$$\partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t) \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \quad u(0,x) = a(x) \tag{3.1}$$

を考える．ただし初期値 $a \in L^q(\mathbb{R}^3)$ とする．以後，定義域 $\mathbb{R}^3$ は省略して書く．熱方程式 (3.1) の解は次の形で書ける．

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} a(y)\, dy. \tag{3.2}$$

熱方程式 (3.1) の解を $e^{t\Delta}a$ と書くことが多い．例えば (3.1) で Δ を 3×3 行列 A とするとき，A の定義域は $\mathbb{R}^3$ であり u は行列の指数関数で書ける．今回は Δ の定義域としてルベーグ空間を想定しており，関数 u を時刻 t からルベーグ空間 L^q に値をとる関数と見ている．いわば無限次元への拡張であり，作用素の半群と呼ばれている．この表記の元，畳み込みに対するヤングの不等式を用いれ

ば，次の L^q-L^r 評価が従う．

$$\|e^{t\Delta}a\|_{L^r} \le Ct^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|a\|_{L^q} \quad \text{for } 1 \le q \le r \le \infty,\ t>0, \tag{3.3}$$

$$\|\nabla e^{t\Delta}a\|_{L^r} \le Ct^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\|a\|_{L^q} \quad \text{for } 1 \le q \le r \le \infty,\ t>0. \tag{3.4}$$

ここで定数 $C>0$ は q,r に依存するが，a,t には依存しない．熱方程式の解は時間が経過すると滑らかになるという性質（解の平滑化効果）に伴う，$t=0$ 近傍での特異性の度合いと，$t\to\infty$ での解の減衰度合いの両方を表している．

さらにローレンツ空間に対する同様の評価を導出したいため，ローレンツ空間を定義する．ローレンツ空間は二つのパラメーター $1 \le q < \infty, 1 \le \rho \le \infty$ を用いて $L^{q,\rho}$ と書かれることが多い．ここで，第二のパラメーター ρ が大きくなるほど空間としては大きくなり，$L^{q,q}$ は通常のルベーグ空間 L^q と一致する．$L^{q,\infty}$ は弱ルベーグ空間と呼ばれ，C_0^∞（コンパクト台をもつ C^∞ 級関数全体）が稠密でないことが知られている．また，ルベーグ空間での双対関係 $(L^q)^* = L^{q^*}$ が $1 \le q < \infty, 1/q+1/q^*=1$ で成り立つように，ローレンツ空間でも双対関係 $(L^{q,\rho})^* = L^{q^*,\rho^*}$ が $1 \le q < \infty, 1 \le \rho < \infty$ のとき成り立つ．

ローレンツ空間は補間理論によっても特徴付けられる．補間理論については [1] を参照．ここでは，補間理論で有用なリースソリンの補間定理について簡単に述べる．四つのパラメーター $q_1,q_2,r_1,r_2 \in [1,\infty]$ を $q_1 \le q_2, r_1 \le r_2$ とする．作用素 $T: L^{q_1}+L^{q_2} \to L^{r_1}+L^{r_2}$ は $L^{q_i} \to L^{r_i}$ $(i=1,2)$ と見たとき有界線形作用素なものとし，それぞれの作用素ノルムを M_i とおく．このとき T は $L^{q_3} \to L^{r_3}$ への有界線形作用素であり，次の不等式を満たす．

$$\|Ta\|_{L^{r_3}} \le M_1^{1-\theta}M_2^{\theta}\|a\|_{L^{q_3}}.$$

ここで q_3, r_3, θ は以下を満たすものとする．

$$\frac{1}{q_3} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}, \quad \frac{1}{r_3} = \frac{1-\theta}{r_1} + \frac{\theta}{r_2}.$$

実は上記と同様の議論をローレンツ空間でもできる．このような補間理論の考え方を L^q-L^r 評価 (3.3),(3.4) に用いると次の $L^{q,\rho}$-$L^{r,\rho}$ 評価が成り立つ．

$$\|e^{t\Delta}a\|_{L^{r,\rho}} \le Ct^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|a\|_{L^{q,\rho}} \quad \text{for } 1 \le q \le r \le \infty, 1 \le \rho \le \infty,\ t>0, \tag{3.5}$$

$$\|\nabla e^{t\Delta}a\|_{L^{r,\rho}} \le Ct^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\|a\|_{L^{q,\rho}} \quad \text{for } 1 \le q \le r \le \infty,\ 1 \le \rho \le \infty, t>0. \tag{3.6}$$

ここで定数 $C>0$ は q,r,ρ に依存するが，a,t には依存しない．さらにパラメーター q,r を $1<q<r<\infty$ かつ $1/q-1/r=1/3$ を満たすものとする．劣線形作用素 $a \to \|\nabla e^{t\Delta}a\|_{L^{r,1}}$ に対して補間理論を用いると次の評価を得る．

$$\int_0^\infty \|\nabla e^{t\Delta}a\|_{L^{r,1}}\,dt \le C\|a\|_{L^{q,1}}. \tag{3.7}$$

上記の評価 (3.7) は Yamazaki [14] で得られた最も重要な評価であり，方程式を解く上で大事な役割を果たす（次節でその一端を見る）．パラメーター q,r の条件から $-3/2(1/q-1/r)=-1$ となるため，単純に (3.4) を適用しても得られない評価である．

いくつか注意を述べる．上記では L^q-L^r 評価の導出の際に熱方程式の解が (3.2) で書けることを用いており，本講演で取り扱う外部領域など一般の領域では適用できない．外部領域 Ω の場合，次のような局所減衰評価を導くことが本質的である．

$$\|e^{t\Delta}a\|_{W^{2,q}(\Omega_R)} \le Ct^{-\frac{3}{2}}\|a\|_{L^q(\Omega)}. \tag{3.8}$$

ここで $R>0$ を十分大きいものとして，$\Omega_R=\Omega\cap\{x\in\mathbb{R}^3|\,|x|\le R\}$，$1<q<\infty, t>1, a\in L^q(\Omega_R)$，$W^{2,q}$ はソボレフ空間で，超関数の意味での二階の微分までが q 乗可積分な関数全体を表す．この考え方は Iwashita [11] による．Finn の Starting problem は，Kobayashi–Shibata [13] により，並進運動の場合に対応する半群の L^q-L^r 評価が導出されたことで解かれた．回転運動の場合にも，対応する半群の L^q-L^r 評価が Hishida–Shibata [10] で導出されているが，本講演の問題では回転運動特有の項 $(\omega_0\times x)\cdot\nabla v$ を扱う影響により，半群で議論するのは困難である．そこで半群ではなく発展作用素を用いて議論を行う．ここで一般に，発展作用素 $\{T(t,s)\}_{t\ge s\ge 0}$ とは線形方程式の初期値問題

$$\frac{du}{dt}(t)=A(t)u(t),\quad \text{in } (s,\infty),\quad u(\cdot,s)=f$$

の解作用素である．作用素 $A(t)$ が時間に依存せず常に $A(t)\equiv A$ であれば，$T(t,s)$ は半群 $e^{(t-s)A}$ と一致する．本研究で用いる発展作用素の存在（線形方程式の解の一意存在）については Hansel–Rhandi [5] が示した．外部領域における発展作用素の L^q-L^r 評価は Hishida [8, 9] により得ている．半群の場合にはレゾルベントの詳細な解析をすることによって (3.8) を得ていたが，発展作用素の場合には異なるアイデアが必要である．発展作用素の共役作用素と，あるエネルギー関係式も用いてパラメーター r が真に無限より小さいときに L^q-L^r 評価を導出し ([8])，その評価を用いて (3.8) を得て，望ましい L^q-L^r 評価が導出されている ([9])．回転の場合に対応する半群の性質から，発展作用素の時間一階微分の評価を得ることも重要であることに注意しておく．また，外部領域の場合には，通常の熱方程式の場合でも (3.4) の q,r の取りうる範囲が 3 以下に制限されることが知られている．

4 証明の概略

ここでは次の方程式を考え，解のオーダー評価 (2.1)–(2.3) を見る．

$$(v(t),\varphi)=\int_0^t(v(\tau)\otimes v(\tau)+v(\tau)\otimes w,\nabla e^{-\tau\Delta}\varphi)\,d\tau\quad \forall\varphi\in(C_0^\infty(\mathbb{R}^3))^3. \tag{4.1}$$

ただし $(C_0^\infty(\mathbb{R}^3))^3$ はコンパクト台をもつ C^∞ 級ベクトル値関数全体を表し，一般に $a=(a_1,a_2,a_3), b=(b_1,b_2,b_3)$ として $a\otimes b=(a_ib_j)_{i,j=1,2,3}$ とし，さらに $w\in(L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3))^3$ を仮定する．以後，関数空間についてはスカラー値とベクトル値を区別せずに書く．方程式 (4.1) は次のようにして導かれる．未知関数の変換

$$u(x,t)=v(x,t)+\psi(t)u_s,\quad p(x,t)=\phi(x,t)+\psi(t)p_s$$

を行い，(1.2) に代入すると摂動 v,ϕ は次の方程式を満たす．

$$\begin{aligned}&\partial_t v=\Delta v+\psi(t)(\omega_0\times x)\cdot\nabla v-\psi(t)\omega_0\times v+(Gv)(x,t)+H(x,t)-\nabla\phi,\\ &\nabla\cdot v=0\quad x\in D, t\ge 0,\quad v\to 0\ \text{ as } |x|\to\infty,\quad v|_{\partial D}=0,\quad v(x,0)=0.\end{aligned} \tag{4.2}$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
&(Gv)(x,t) = -v\cdot\nabla v - \psi(t)v\cdot\nabla u_s - \psi(t)u_s\cdot\nabla v,\\
&H(x,t) = \psi(t)(\psi(t)-1)\{-u_s\cdot\nabla u_s + \omega_0\times u_s + (\omega_0\times x)\cdot\nabla u_s\} - \psi'(t)u_s.
\end{aligned}
$$

方程式 (1.2) を扱う代わりに (4.2) を扱い，解 v の減衰を見れば良いことに注意する．方程式 (4.2) の形が複雑であるため，簡単に (4.1) を考える．前節の準備のもと，縮小写像の原理により (4.1) を解くことができる．実際，ヘルダーの不等式から

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^t (v(\tau)\otimes v(\tau), \nabla e^{-t\Delta}\varphi)\right| &\le \int_0^t \|v(\tau)\|_{L^{3,\infty}}\|v(\tau)\|_{L^{3,\infty}}\|\nabla e^{-\tau\Delta}\varphi\|_{L^{3,1}}\,d\tau\\
&\le \left(\sup_{0\le\tau<\infty}\|v(\tau)\|_{L^{3,\infty}}\right)^2\int_0^t \|\nabla e^{-\tau\Delta}\varphi\|_{L^{3,1}}\,d\tau\\
&\le \left(\sup_{0\le\tau<\infty}\|v(\tau)\|_{L^{3,\infty}}\right)^2 C\|\varphi\|_{L^{\frac{3}{2},1}}
\end{aligned}
$$

がしたがう．ここで，第三不等式で (3.7) を用いた．w を含む項も同様に扱うことができる．簡単のため $\|v\|_X = \sup_{0\le\tau<\infty}\|v(\tau)\|_{L^{3,\infty}}$ とおき，(4.1) の右辺を $(\Phi v)(t)(\varphi)$ と定義すれば，ローレンツ空間の双対性から $(\Phi v)(t)\in L^{3,\infty}$ であって，$\|\Phi v\|_X \le C\|v\|_X^2 + \|w\|_{L^{3,\infty}}\|v\|_X$ が得られた．同様に $\|\Phi u - \Phi v\|_X \le C(\|u\|_X + \|v\|_X)\|u-v\|_X$ が成り立つ．このような議論から，$\|w\|_{L^{3,\infty}}$ と $\varepsilon>0$ が十分小さいものとして

$$
X_\varepsilon = \{v\in BC([0,\infty);L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)) \,|\, \|v\|_X \le \varepsilon\}
$$

と定義すれば，$\Phi: X_\varepsilon \to X_\varepsilon$ は well-defined かつ縮小写像であることが分かる．ただし，$BC(I;Y)$ は Y に値をとる有界かつ連続な関数全体である．したがって (4.1) の解を得た．解が存在することは分かったが，解の減衰については得られていない．実は $q\in(3,\infty)$ をとり，$L^{q,\infty}$ で同様の議論をすれば，$t^{1/2-3/(2q)}v(t)\in BC((0,\infty);L^{q,\infty})$ を満たすことが分かり，さらに補間により (2.1) を得る．

次に $r\in(q,\infty]$ について考えるが，L^∞ について得られれば $L^{q,\infty}$ との補間により得られるため，L^∞ についてのみ扱う．L^∞ 減衰については Koba [12] が初めて定常解がスケール臨界 $O(1/|x|)$ のとき導出した．ここでは，半群の L^1-L^r 評価を用いることで L^∞ 減衰を導く．なお，本研究の証明は [12] を簡略化している．以後さらに $w\in L^q$ を仮定する．$t>2$ として積分区間を次のように分ける．

$$
\int_0^t |(v(\tau)\otimes w, \nabla e^{-\tau\Delta}\varphi)|\,d\tau = \int_0^{\frac{t}{2}} + \int_{\frac{t}{2}}^{t-1} + \int_{t-1}^t
$$

$t-1$ から t の項は次のように評価する．

$$
\begin{aligned}
\int_{t-1}^t &\le \|u_s\|_q\left(\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}}\|v(\tau)\|_{q,\infty}\right)\int_{t-1}^t \tau^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2q}}\|\nabla e^{-\tau\Delta}\varphi\|_{(1-\frac{2}{q})^{-1},1}\,d\tau\\
&\le C(t-1)^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2q}}\int_{t-1}^t (t-\tau)^{-\frac{3}{q}-\frac{1}{2}}\,d\tau = Ct^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2q}}\|\varphi\|_1
\end{aligned}
$$

ここで第二不等式で L^1-L^r 評価を用いた．0 から $t/2$ の項は $w, v(t)\in L^{3,\infty}$ であることと，L^1-L^r 評価を用いて同様の議論をすれば $O(t^{-1/2})$ が分かる．また，$t/2$ から $t-1$ の項は $w\in L^{3,\infty}, v(t)\in$

$L^{q,\infty}$ を用いて $O(t^{-1/2+3/(2q)})$ を得る．同様に $v(\tau)\otimes v(\tau)$ の項も議論できるので L^∞ 減衰を得る．

参考文献

[1] J. Bergh and J. Löfström, Interpolation Spaces, Springer, Berlin, 1976.

[2] R. Finn, Stationary solutions of the Navier-Stokes equations, Proc, Symp. Appl. Math. **17** (1965), 121–153.

[3] G.P. Galdi, Steady flow of a Navier-Stokes fluid around a rotating obstacle, J. Elast. **71** (2003), 1–31.

[4] G.P. Galdi, J.G. Heywood and Y. Shibata, On the global existence and convergence to steady state of Navier-Stokes flow past an obstacle that is started from rest, Arch. Rational Mech. Anal. **138** (1997), 307–318.

[5] T. Hansel and A. Rhandi, The Oseen-Navier-Stokes flow in the exterior of a rotating obstacle: the non-autonomous case, J. Reine Angew. Math. **694** (2014), 1–26.

[6] J.G. Heywood, The exterior nonstationary problem for the Navier-Stokes equations, Acta Math. **129** (1972), 11–34

[7] T. Hishida, Mathematical analysis of the equations for incompressible viscous fluid around a rotating obstacle, Sugaku Expositions **26** (2013), 149–179.

[8] T. Hishida, Large time behavior of a generalized Oseen evolution operator, with applications to the Navier-Stokes flow past a rotating obstacle, Math. Ann. **372** (2018), 915–949.

[9] T. Hishida, Decay estimates of gradient of a generalized Oseen evolution operator arising from time-dependent rigid motions in exterior domains (2019), arxiv:1908.04080.

[10] T. Hishida and Y. Shibata, L_p-L_q estimate of the Stokes operator and Navier-Stokes flows in the exterior of a rotating obstacle, Arch. Rational Mech. Anal. **193** (2009), 339–421.

[11] H.Iwashita, L_q-L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problem in L_q spaces. Math. Ann. **285** (1989), 265–288.

[12] H. Koba, On $L^{3,\infty}$-stability of the Navier-Stokes system in exterior domains, J. Differential Equations **262** (2017), 2618–2683.

[13] T. Kobayashi and Y. Shibata, On the Oseen equation in the three dimensional exterior domains, Math. Ann. **310** (1998), 1–45.

[14] M. Yamazaki, The Navier-Stokes equations in the weak-L^n space with time-dependent external force, Math. Ann. **317** (2000), 635–675.