

特異点の個数が少ないトーリック log del Pezzo 曲面の分類

大阪大学大学院理学研究科数学専攻
須山雄介 (Yusuke SUYAMA) *

概要

トーリック幾何学は 1970 年代に Demazure, Mumford, 三宅-小田らによって基礎づけが行われた, トーリック多様体とよばれる特別な代数多様体の諸性質を, 扇とよばれる組合せ論的な対象の性質で記述する理論である. これにより, 具体的な代数多様体を数多く構成することができ, 様々な理論のテストケースによく使われる. 本稿では, トーリック多様体の性質と扇の性質の対応を中心に, トーリック幾何について概説し, 最後に主結果を紹介する. トーリック幾何の標準的な教科書としては [9, 6, 4] がある.

1 トーリック多様体と扇

定義 1.1. n 次元トーリック多様体とは, \mathbb{C} 上の正規¹代数多様体 X であって, 代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ を稠密な Zariski 開集合として含み, $(\mathbb{C}^*)^n$ の自分自身への自然な作用 $(t_1, \dots, t_n) \cdot (z_1, \dots, z_n) = (t_1 z_1, \dots, t_n z_n)$ を X 全体への作用に拡張するものである. トーリック多様体 X というと, 空間だけでなく作用も込めて考えている. 2 つのトーリック多様体の間の射 $f: X \rightarrow X'$ は, それぞれが含む代数的トーラスの間の準同型 $f': (\mathbb{C}^*)^{\dim X} \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{\dim X'}$ を誘導し, それに関し同変であるとき, すなわち, 任意の $t \in (\mathbb{C}^*)^{\dim X}$ と $x \in X$ に対し, $f(tx) = f'(t)f(x)$ が成り立つときトーリック射であるといい, 2 つのトーリック多様体は, それらの間の同型なトーリック射が存在するとき同型であるという.

例 1.2. 代数的トーラス自身 $(\mathbb{C}^*)^n$, アフィン空間 \mathbb{C}^n , 射影空間 \mathbb{P}^n は, いずれも適当に $(\mathbb{C}^*)^n$ の作用を定めることにより n 次元トーリック多様体になる.

トーリック多様体は, 扇とよばれる多面錐の有限集合から構成することができ, 多くの議論を扇の側で進めることができる.

定義 1.3. (1) \mathbb{R}^n の有理強凸多面錐²とは, \mathbb{Z}^n の有限個のベクトル v_1, \dots, v_r で生成される多

* 本研究は科研費 (課題番号:18J00022) の助成を受けたものである.

¹ すべてのトーリック多様体は, 後述するように扇から構成することができるので, 知らなくてもあまり気にする必要はない. ただし, 最近は正規性を仮定しないことも多いようである.

² 本当は格子 $N \cong \mathbb{Z}^n$ に対し, $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 内で定義される. σ はそのまま N を取り替えたり, N に単なる \mathbb{Z}^n 以上の解釈をもたせたりすることがあるためであるが, 本稿ではそのようなことは行わないので, 単に \mathbb{R}^n 内で定義す

面錐 $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_r$ であって、 \mathbb{R}^n の 0 でないいかなる線形部分空間も含まないものである。

- (2) \mathbb{R}^n の有理強凸多面錐 σ に対し、 $\sigma^\vee = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \text{任意の } v \in \sigma \text{ に対し } \langle u, v \rangle \geq 0\}$ を σ の双対とよぶ^{*3}。これは必ずしも強凸にはならない。
- (3) \mathbb{R}^n の有理強凸多面錐 σ の面とは、 $u \in \sigma^\vee$ を用いて $\{v \in \sigma \mid \langle u, v \rangle = 0\}$ と表せるものである。特に、 $\{0\}$ と σ はともに σ の面である。
- (4) \mathbb{R}^n の扇とは、 \mathbb{R}^n の有理強凸多面錐からなる空でない有限集合 Δ で次を満たすものである。
 - (i) $\sigma \in \Delta$ ならば、 σ の各面もまた Δ に属する。特に、 $\{0\}$ は Δ の元である。
 - (ii) $\sigma, \tau \in \Delta$ ならば、 $\sigma \cap \tau$ はそれぞれの面である。

\mathbb{R}^n の扇 Δ からトーリック多様体 $X(\Delta)$ ^{*4}を構成する。まず、各有理強凸多面錐 $\sigma \in \Delta$ からアフィン代数多様体 U_σ を構成する。 $\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n$ は和に関し可換モノイドになり、モノイド環 $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n]$ は \mathbb{C} 上有限生成な整域になる。したがって $\text{Spec} \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n]$ はアフィン代数多様体^{*5}になるので、これを U_σ とおく。

- 例 1.4.** (1) \mathbb{R}^2 において $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}(2e_1 - e_2) + \mathbb{R}_{\geq 0}e_2$ とすると、 $\sigma^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}(e_1 + 2e_2)$ だから (図 1), $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^2] \cong \mathbb{C}[x_1, x_1x_2, x_1x_2^2] \cong \mathbb{C}[u, v, w]/(uw - v^2)$ となる。したがって、アフィン代数多様体 U_σ は \mathbb{C}^3 内の $uw - v^2 = 0$ で定まる曲面である。
- (2) $0 \leq k \leq n$ に対し、 $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}e_k \subset \mathbb{R}^n$ とすると、 $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n] \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_k, x_{k+1}^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ だから $U_\sigma = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}$ となる。特に、 $\{0\}, \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}e_n$ に対応するアフィン代数多様体はそれぞれ $(\mathbb{C}^*)^n, \mathbb{C}^n$ である。

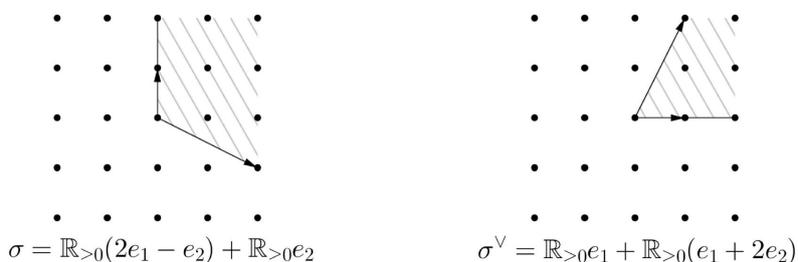


図 1 有理強凸多面錐 $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}(2e_1 - e_2) + \mathbb{R}_{\geq 0}e_2$ とその双対 σ^\vee 。

次に U_σ たちを貼り合わせる。 τ が σ の面ならば、包含写像 $\tau \rightarrow \sigma$ はモノイドの準同型 $\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n \rightarrow \tau^\vee \cap \mathbb{Z}^n$ を定め、更にこれが定める射 $U_\tau = \text{Spec} \mathbb{C}[\tau^\vee \cap \mathbb{Z}^n] \rightarrow \text{Spec} \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n] = U_\sigma$ は開埋め込みになる。これにより U_τ を U_σ の開集合と同一視し、 U_σ たちを貼り合わせてできる代数多様体が求めるトーリック多様体 $X(\Delta)$ である^{*6}。特に、扇 Δ がある多面錐 σ とその面だけか

ることにする。

^{*3} 本当は σ^\vee は双対空間 $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の部分集合である。

^{*4} 扇を Σ で表し、それに伴うトーリック多様体を X_Σ や $X(\Sigma)$ で表すことも多い。

^{*5} Spec を知らない読者は $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n]$ を $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_r]/(f_1, \dots, f_s)$ と表し、 $\text{Spec} \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n]$ を \mathbb{C}^r の中の f_1, \dots, f_s の共通零点の集合だと思えばよい。

^{*6} 以上の構成法では特に \mathbb{C} である必要はなく、一般の体や環でもスキームとしてのトーリック多様体を構成することが

らなるならば、 $X(\Delta) = U_\sigma$ である。

例 1.5. (1) $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ の扇 Δ を $\Delta = \{0, \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}\}$ で定めると、 $U_{\{0\}} \cong \mathbb{C}^*$, $U_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \cong U_{\mathbb{R}_{\leq 0}} \cong \mathbb{C}$ である。包含写像 $\{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}$ はそれぞれ $\mathbb{C}[z] \hookrightarrow \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, $\mathbb{C}[z^{-1}] \hookrightarrow \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ を定める。したがって、2 枚の \mathbb{C} が \mathbb{C}^* で $z \mapsto z^{-1}$ により貼り合わさるので、 $X(\Delta) = \mathbb{P}^1$ である。

(2) \mathbb{R}^2 の扇 Δ を

$$\Delta = \{0, \mathbb{R}_{\geq 0}e_1, \mathbb{R}_{\geq 0}e_2, \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_1 - e_2), \\ \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}e_2, \mathbb{R}_{\geq 0}e_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_1 - e_2), \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_1 - e_2) + \mathbb{R}_{\geq 0}e_1\}$$

で定めると (図 2), 3 個の 2 次元多面錐に対応するアフィン代数多様体はいずれも \mathbb{C}^2 であり、それらが貼り合わさって $X(\Delta) = \mathbb{P}^2$ となる。より一般に、各 $1 \leq k \leq n$ に対し

$$\sigma_k = \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \cdots + \widehat{\mathbb{R}_{\geq 0}e_k} + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}e_n + \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_1 - \cdots - e_n)$$

とおき、 $\sigma_{n+1} = \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}e_n$ とおくと、 $\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}$ およびそれらの面からなる扇に対応するトーリック多様体は \mathbb{P}^n である。

(3) 非負整数 a に対し、 \mathbb{R}^2 の扇 Δ を

$$\mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}e_2, \mathbb{R}_{\geq 0}e_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_1 + ae_2), \\ \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_1 + ae_2) + \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_2), \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_2) + \mathbb{R}_{\geq 0}e_1$$

とそれらの面全体とすると (図 2), 伴うトーリック多様体 $X(\Delta)$ は次数 a の Hirzebruch 曲面 $F_a = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ である。

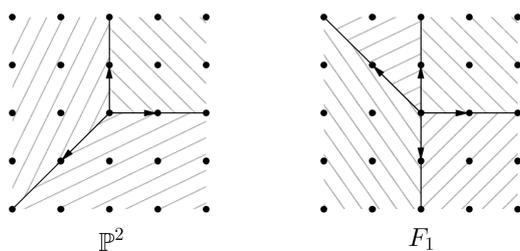


図 2 射影空間 \mathbb{P}^2 , Hirzebruch 曲面 F_1 に対応する扇.

モノイド環 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ において、 $e_i \in \mathbb{Z}^n$ に対応する元を x_i で表すことにすると、 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n] = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ となる。準同型 $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n] \rightarrow \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n]$ を、 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n] \rightarrow \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$, $x_i \mapsto x_i \otimes x_i$ の制限として定めることにより作用 $(\mathbb{C}^n)^* \times U_\sigma \rightarrow U_\sigma$ が定まる。これらが貼り合わさって $X(\Delta)$ への作用になる。

例 1.6. $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ の扇は次の 4 種類で尽きる。

できる。しかし、体によりトーリック多様体の性質にどのくらい差が出るのかということあまり調べられていないようであり、また、本稿ではトーリック多様体の位相的性質にも触れるため、 \mathbb{C} に限って話を進める。

- (1) $\Delta = \{0\}, X(\Delta) = \mathbb{C}^*$.
- (2) $\Delta = \{0, \mathbb{R}_{\geq 0}\}, X(\Delta) = \mathbb{C}$. 作用は $(t, z) \mapsto tz$.
- (3) $\Delta = \{0, \mathbb{R}_{\leq 0}\}, X(\Delta) = \mathbb{C}$. 作用は $(t, z) \mapsto t^{-1}z$.
- (4) $\Delta = \{0, \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}\}, X(\Delta) = \mathbb{P}^1$.

\mathbb{R}^n の扇 Δ から $\mathbb{R}^{n'}$ の扇 Δ' への射とは、準同型 $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^{n'}$ であって、 f が誘導する線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$ が次の条件を満たすようなものである：任意の $\sigma \in \Delta$ に対し、 $\sigma' \in \Delta'$ で $f(\sigma) \subset \sigma'$ を満たすものが存在する。これにより扇は圏をなす。

定理 1.7. 上述の構成法は、扇の圏からトーリック多様体の圏への圏同値を定める。特に、 n 次元トーリック多様体の同型類と、 \mathbb{R}^n の扇の同型類は 1 対 1 に対応する。

注意 1.8. トーリック多様体というと、空間だけでなく作用も込めて考えているが、2 つのトーリック多様体が単に代数多様体として同型であることと、トーリック多様体として同型であることは同値であることが知られている ([1]*7)。そういう訳で、回り回って代数的トーラスの作用にはあまり頓着しないのが普通である。扇 Δ の同型類が決まれば、単なる代数多様体としてならトーリック多様体 $X(\Delta)$ が定まる。ユニモジュラー行列で扇を動かしても、伴うトーリック多様体は作用が変わるだけなので、ユニモジュラー行列で移り合う扇は同じものと考えられる。

2 多面錐と閉部分多様体の対応

\mathbb{R}^n の扇 Δ と $0 \leq r \leq n$ に対し、 Δ の r 次元多面錐全体を $\Delta(r)$ で表す。トーリック多様体 $X(\Delta)$ の閉部分多様体 V の中ではトーラス不変なもの、すなわち $(\mathbb{C}^*)^n V = V$ となるものが重要である。具体的な構成法は省略するが、次の 1 対 1 対応が存在する。

定理 2.1. Δ を \mathbb{R}^n の扇とする。各 $0 \leq r \leq n$ に対し、 Δ の r 次元多面錐と $X(\Delta)$ の $n-r$ 次元トーラス不変閉部分多様体は 1 対 1 に対応する*8。特に、1 次元多面錐はトーラス不変な素因子と、 $n-1$ 次元多面錐はトーラス不変な曲線と 1 対 1 に対応する。

Δ の r 次元多面錐 σ に対応する $X(\Delta)$ の $n-r$ 次元トーラス不変閉部分多様体を $V(\sigma)$ で表す。 \mathbb{Z}^n の 0 でないベクトルで、成分の最大公約数が 1 であるものを原始ベクトルとよぶ。 Δ の 1 次元多面錐 τ に対し、それを生成する原始ベクトル v がただ 1 つ存在する。そこで、 $\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}v \in \Delta(1)$ に対応するトーラス不変因子 $V(\tau) = V(\mathbb{R}_{\geq 0}v)$ を、単に v に対応するトーラス不変因子とよぶ。

- 例 2.2.** (1) 射影空間 \mathbb{P}^n に対応する扇は $n+1$ 個の 1 次元多面錐をもつが、それらは $0 \leq i \leq n$ に対する超平面 $\{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i = 0\}$ と 1 対 1 に対応している。
- (2) 例 1.5 (3) において、 $\mathbb{R}_{\geq 0}e_1$ に対応する因子は $F_a \rightarrow \mathbb{P}^1$ のファイバー、 $\mathbb{R}_{\geq 0}e_2$ に対応する因子は自己交点数が $-a$ の曲線である。

*7 この結果は比較的新しく、専門家でも知らないことがあるようである。

8 Δ の r 次元多面錐と $X(\Delta)$ の $n-r$ 次元の $(\mathbb{C}^)^n$ -軌道の間にも 1 対 1 対応が存在し、 $V(\sigma)$ は σ に対応する軌道の閉包である。

3 トーリック多様体と扇の関係

トーリック多様体 $X(\Delta)$ の数多くの性質を、扇 Δ の言葉で記述することができる。

定義 3.1. Δ を \mathbb{R}^n の扇とする。 $\sigma \in \Delta$ に対し、 σ の 1 次元の面を生成する原始ベクトル全体を v_1, \dots, v_k とする。

- (1) Δ が非特異であるとは、各 $\sigma \in \Delta$ に対し、 v_1, \dots, v_k が \mathbb{Z}^n の基底に延長できることである。1 次元以下の多面錐に対してはチェックが不要であることに注意する。
- (2) Δ が単体的であるとは、各 $\sigma \in \Delta$ に対し、 v_1, \dots, v_k が \mathbb{R}^n の基底に延長できることである。
- (3) Δ が末端的であるとは、各 $\sigma \in \Delta$ に対し、 $u \in (\mathbb{Z}^n)^*$ と正整数 j が存在して、 $\langle u, v_1 \rangle = \dots = \langle u, v_k \rangle = j$ かつ任意の $v \in (\sigma \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \{0, v_1, \dots, v_k\}$ に対し $\langle u, v \rangle > j$ となることである。
- (4) Δ が標準的であるとは、各 $\sigma \in \Delta$ に対し、 $u \in (\mathbb{Z}^n)^*$ と正整数 j が存在して、 $\langle u, v_1 \rangle = \dots = \langle u, v_k \rangle = j$ かつ任意の $v \in (\sigma \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \{0\}$ に対し $\langle u, v \rangle \geq j$ となることである。
- (5) Δ が完備であるとは $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = \mathbb{R}^n$ となることである。

定理 3.2. Δ を \mathbb{R}^n の扇とする。

- (1) $X(\Delta)$ が非特異であることと、 Δ が非特異であることは同値である。
- (2) $X(\Delta)$ が \mathbb{Q} -分解的^{*9}であることと、 Δ が単体的であることは同値である。
- (3) $X(\Delta)$ がたかだか末端特異点のみをもつことと、 Δ が末端的であることは同値である。
- (4) $X(\Delta)$ がたかだか標準特異点のみをもつことと、 Δ が標準的であることは同値である。
- (5) $X(\Delta)$ が完備^{*10}であることと、 Δ が完備であることは同値である。

明らかに、扇は非特異ならば単体的かつ末端的であり、末端的ならば標準的である。

注意 3.3. (1) \mathbb{R}^n の単体的な扇は、 $n - 1$ 次元球面の三角形分割の各頂点に原始ベクトルを書いて表すと便利であり、これにより 4 次元以下の \mathbb{Q} -分解的なトーリック多様体は図に描いて扱うことができる^{*11}。ただしこの対応は全射ではない。原始ベクトルの割り当て方によっては、多面錐がオーバーラップする場合があるからである。

- (2) 多面錐 σ からアフィントーリック多様体 U_σ を構成する過程では反変関手を 2 度施しており、二度手間に見えるが、このように構成することにより、定理 3.2 (5) のように、トーリック多様体と扇の対応が見やすくなるのである。

定理 3.4. Δ が \mathbb{R}^n の単体的で完備な扇ならば、伴う \mathbb{Q} -分解的で完備なトーリック多様体 $X(\Delta)$ のピカル数 $\rho(X(\Delta))$ ^{*12}は $|\Delta(1)| - n$ に一致する。

^{*9} トーリック多様体の場合、orbifold であることと同値である。

^{*10} 伴う複素解析空間がコンパクトであることと同値である。

^{*11} そこで、 $n - 1$ 次元球面の任意の三角形分割は、 \mathbb{R}^n の非特異で完備な扇から得られるかという問題が考えられる。これは $n \leq 2$ では正しく、 $n \geq 4$ では反例があるが、 $n = 3$ では不明である。これに関して、著者は 2 次元球面の 18 頂点以下のすべての三角形分割 (11 億種類以上ある) が非特異で完備な扇から得られることを示した ([12])。

^{*12} 完備トーリック多様体の場合、 $H^2(X(\Delta); \mathbb{Z})$ の階数に一致する。

例 3.5. 例 1.5 (2) の扇は非特異で完備であり, 対応するトーリック多様体 \mathbb{P}^2 は確かに非特異で完備である. $|\Delta(1)| - n = 3 - 2 = 1$ であり, \mathbb{P}^2 のピカル数は確かに 1 である. ピカル数が 1 の非特異完備トーリック多様体は射影空間しかないことが容易にわかる.

トーリック多様体が射影的であるための条件は比較的複雑で^{*13}, 次のようになる.

命題 3.6. Δ を \mathbb{R}^n の完備な扇とする. 伴うトーリック多様体 $X(\Delta)$ が射影的であるための必要十分条件は, 連続写像 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ で次を満たすものが存在することである.

- (1) 格子点では整数値をとる: $\varphi(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}$.
- (2) 各 $\sigma \in \Delta$ に対し, 制限 $\varphi|_{\sigma}: \sigma \rightarrow \mathbb{R}$ は線形である: 任意の $v, v' \in \sigma$ と $c \geq 0$ に対し, $\varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v'), \varphi(cv) = c\varphi(v)$ が成り立つ.
- (3) Δ に関し狭義に上に凸である: 任意の $v, v' \in \mathbb{R}^n$ に対し $\varphi(v + v') \geq \varphi(v) + \varphi(v')$ であり, Δ は φ が (1), (2) を満たすような扇の中で最も粗い.

非特異でピカル数が 3 以下の完備トーリック多様体や, \mathbb{Q} -分解的でピカル数が 2 以下の完備トーリック多様体は射影的であることが知られているが, 扇が具体的に与えられたときに, 対応するトーリック多様体が射影的かどうかを判定するのは一般には容易ではない.

本稿の主結果に直接関係はないが, トーリック多様体のトポロジーも重要なので一通り触れておく. 本節の残りでは, Δ を \mathbb{R}^n の非特異で完備な扇とし, 複素多様体としてのトーリック多様体を再び $X(\Delta)$ で表す.

定理 3.7. $X(\Delta)$ のオイラー標数は $|\Delta(n)|$ に一致する.

定理 3.8. Δ の 1 次元多面錐を生成する原始ベクトル全体を v_1, \dots, v_m とすると,

$$H^*(X(\Delta); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[D_1, \dots, D_m]/(I + J),$$

$$I = (D_{i_1} \cdots D_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m, v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \text{ は } \Delta \text{ の多面錐を生成しない}),$$

$$J = \left(\sum_{i=1}^m \langle u, v_i \rangle D_i \mid u \in (\mathbb{Z}^n)^* \right)$$

となる^{*14}. ただし, 1 次元多面錐 $\mathbb{R}_{\geq 0}v_i$ に対応するトーラス不変因子 $D_i = V(\mathbb{R}_{\geq 0}v_i)$ のポアンカレ双対を再び $D_i \in H^2(X(\Delta); \mathbb{Z})$ で表している.

例 3.9. 射影空間 \mathbb{P}^n の扇では, $m = n + 1, I = (D_1 \cdots D_{n+1}), J = (D_1 - D_{n+1}, \dots, D_n - D_{n+1})$ だから $\mathbb{Z}[D_1, \dots, D_m]/(I + J) \cong \mathbb{Z}[D_{n+1}]/(D_{n+1}^{n+1})$ となる.

トーリック多様体の基本群は次のようになる. ただし, n 次元多面錐が 1 個でもあれば自明になり, 特に完備トーリック多様体は単連結になってしまう.

定理 3.10. N' を $(\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma) \cap \mathbb{Z}^n$ で生成される \mathbb{Z}^n の部分群とすると, $\pi_1(X(\Delta)) \cong \mathbb{Z}^n/N'$.

^{*13} $M_{\mathbb{R}}$ 内の整凸多面体と偏極トーリック多様体の 1 対 1 対応というものもあり, 整凸多面体から得られる扇とえばよりすっきりする.

^{*14} $X(\Delta)$ が \mathbb{Q} -分解的な場合も, 係数を \mathbb{Q} に置き換えることで同様の定理が成り立つ.

以上の結果とは対照的に、2つの非特異完備トーリック多様体が微分同相であるための必要十分条件は、一般には不明である。これに関して、「2つの非特異完備トーリック多様体は、それらのコホモロジー環が同型ならば微分同相か」という問題があり、コホモロジー剛性問題とよばれている。これは2次元以下では正しいが、3次元以上では部分的な肯定的結果がいくつか知られているだけで、特にこれまでのところ反例は知られていない。詳しくは [3]^{*15}を参照されたい。

注意 3.11. 非特異完備トーリック多様体に関しては、様々なトポロジー版が考えられている。たとえば、Davis–Januszkiewicz が導入した擬トーリック多様体は、 $(S^1)^n$ の可微分な作用をもつ実 $2n$ 次元の可微分閉多様体 X であって、局所的に $(S^1)^n$ の忠実な複素 n 次元表現と弱同変同相で、軌道空間 $X/(S^1)^n$ が単純な凸多面体となるものである。非特異完備トーリック多様体は、射影的または $n \leq 3$ ならば擬トーリック多様体である^{*16}。擬トーリック多様体も組合せ論的な対象との1対1対応が存在し、コホモロジー環など、非特異完備トーリック多様体と類似の結果が成り立つ。トーリック多様体のトポロジー版について、詳しくは [2] を参照されたい。

4 トーリック Fano 多様体

前節で述べたように、トーリック多様体の大方の代数幾何学的性質・位相幾何学的性質は扇の言葉に翻訳されている。しかし、トーリック Fano 多様体は、Fano 多面体とよばれる整凸多面体との1対1対応があり、整凸多面体論との関係もあって現在でも研究が進められている。

定義 4.1. たかだか対数的末端特異点のみをもつ正規射影代数多様体 X は、反標準因子 $-K_X$ が豊富な \mathbb{Q} -Cartier 因子であるとき **Fano** であるという。

\mathbb{Z}^n の有限部分集合の \mathbb{R}^n における凸包を整凸多面体とよび、原点を内点として含み、すべての頂点が原始ベクトルであるような整凸多面体を **Fano 多面体**^{*17}とよぶ。2つの Fano 多面体 $Q, Q' \subset \mathbb{R}^n$ は、 $n \times n$ のユニモジュラー行列で移り合うとき同値であるといい、 $Q \cong Q'$ で表す。 $X(\Delta)$ をトーリック Fano 多様体とすると、 Δ の1次元多面錐を生成する原始ベクトル全体の凸包をとることで Fano 多面体が得られ、この対応により、 n 次元トーリック Fano 多様体の同型類と、 \mathbb{R}^n の n 次元 Fano 多面体の同値類は1対1に対応する^{*18}。

例 4.2. 例 1.5 (3) の Hirzebruch 曲面 F_a が Fano になるための必要十分条件は $a \leq 1$ である。 $a \leq 1$ ならば凸包 $\text{conv}\{e_1, e_2, -e_1 + ae_2, -e_2\}$ は頂点を4個もつ Fano 多角形になるが、 $a \geq 2$ の

^{*15} この概説はやや古く、最近は moment-angle 多様体を用いた研究が進んでいる。

^{*16} 擬トーリック多様体でない非特異完備トーリック多様体が存在するかというのは10年来の未解決問題であったが、筆者がそのような例を各 $n \geq 4$ に対し無限個構成した ([11])。3次元以下では、凸でない任意の単純な多面体は、うまく膨らませることにより凸多面体にすることができるが、4次元以上ではそのようなことができない多面体が存在する。擬トーリック多様体の定義において、軌道空間にそのようなものが現れる可能性が見落とされていたということである。

^{*17} 偏極トーリック多様体に対応する整凸多面体が入っている空間は $M_{\mathbb{R}}$ であるが、Fano 多面体が入っている空間は $N_{\mathbb{R}}$ である。したがって、扇が入っている空間と同じであり、前者よりも対応が素直である。たとえば、 $M_{\mathbb{R}}$ の3次元立方体に対応するトーリック多様体は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ であるが、これに対応する Fano 多面体は正八面体である。

^{*18} 本稿でのトーリック Fano 多様体、Fano 多面体の定義はともに最も広いものである。文献によっては、非特異または標準的であることを課す場合があるので、文献ごとに定義を確認する必要がある。

とき凸包をとると e_2 が埋もれてしまう。

2次元の非特異トーリック Fano 多様体は、 $\mathbb{P}^2, F_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, F_1$ を含め 5 種類しかなく、次の Fano 多角形と対応する。

$$\begin{aligned} & \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \\ & \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \\ & \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \\ & \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \\ & \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

たかだか標準特異点のみをもつトーリック Fano 多様体は、各次元に同型を除いて有限個しかないが^{*19}、特異点に制限がなければ各次元に無限に存在する。

定理 4.3. トーリック多様体 $X(\Delta)$ の反標準因子は $-K_{X(\Delta)} = D_1 + \cdots + D_m$ と表せる。

因子が豊富かどうかを判定する方法として中井の判定条件があるが、トーリック多様体においてはトーラス不変な曲線との交点数だけを調べれば十分であり、トーラス不変な曲線は、いくつかのトーラス不変因子の共通部分なので、 \mathbb{Q} -分解的な完備トーリック多様体は、扇が与えられれば Fano かどうかをいつでも判定できる。

注意 4.4. より一般に、 n 次元の非特異完備トーリック多様体 X と $1 \leq k \leq n$ に対し、全 Chern 類 $c(X)$ は $\prod_{i=1}^m (1 + D_i)$ 、第 k Chern 指標 $\text{ch}_k(X)$ は $\frac{1}{k!}(D_1^k + \cdots + D_m^k)$ となる^{*20}。

5 トーリック log del Pezzo 曲面と LDP-polygon

Log del Pezzo 曲面 とは、たかだか商特異点のみをもち、反標準因子が豊富な \mathbb{Q} -Cartier 因子であるような正規射影曲面である。トーリック曲面はたかだか商特異点のみをもつので、2次元トーリック Fano 多様体はトーリック log del Pezzo 曲面であり、したがって、トーリック log del Pezzo 曲面の分類は、Fano 多角形の分類と同値である。そこで、Fano 多角形を **LDP-polygon** とよぶ^{*21}。(トーリック) log del Pezzo 曲面の分類に関する結果については [5] によくまとめられて

^{*19} 非特異トーリック Fano 多様体は、3次元では 18 種類、4次元では 124 種類あるが、特異点を許すと次元が上がる度に個数は爆発的に増大する。たとえば、たかだか標準特異点のみをもつ 3次元トーリック Fano 多様体は 674,688 種類あり、4次元トーリック Gorenstein Fano 多様体は 473,800,776 種類ある。したがって、高次元トーリック Fano 多様体の具体的な分類は計算機でも困難である。[8] にトーリック Fano 多様体の個数の表がある。

^{*20} $k \geq 2$ に対しても、 $\text{ch}_k(X)$ と任意の k 次元閉部分多様体との交点数が正である、という条件を考えることができる。 $k = 2$ に対しては、そのようなトーリック多様体はこれまでのところ射影空間以外に例が知られていないが、 $k \geq 3$ に対してはそのようなトーリック多様体が射影空間以外にも存在する。詳しくは [10] を参照されたい。

^{*21} この呼称はあまり一般的ではなく、log del Pezzo 曲面の研究に端を発する論文を除き、Fano 多角形とよばれるのが普通である。

いる。

LDP-polygon $Q \subset \mathbb{R}^2$ に対応するトーリック log del Pezzo 曲面を X_Q で表す。Log del Pezzo 曲面 X に対し、 $-\ell K_X$ が Cartier 因子になる最小の正整数 ℓ を X の指数とよぶ。LDP-polygon Q に対し、 $Q^\vee = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \text{任意の } v \in Q \text{ に対し } \langle u, v \rangle \geq -1\}$ とおくと、 X_Q の指数は、 $\ell \cdot Q^\vee$ が 整凸多角形になる最小の正整数 ℓ に一致する。トーリック log del Pezzo 曲面の指数に注目した分類はよく研究されており、与えられた指数のトーリック log del Pezzo 曲面をすべて求めるアルゴリズムも知られている ([7])。

本稿では、トーリック log del Pezzo 曲面の特異点の個数に注目した分類について紹介する。トーリック曲面の $(\mathbb{C}^*)^2$ -不動点以外の点はすべて非特異なので、トーリック log del Pezzo 曲面 X_Q の特異点はたかだか $\rho(X_Q) + 2$ 個である。非特異なものは前節で述べたように 5 種類しかないが、特異なトーリック log del Pezzo 曲面は無限に存在する。最近、Dais は特異点を 1 つだけもつトーリック log del Pezzo 曲面が次の 3 つの無限系列で尽きることを示した。

定理 5.1 ([5, Theorem 1.4]). トーリック log del Pezzo 曲面 X_Q が特異点を 1 つだけもつための必要十分条件は、ある正整数 p が存在して、 Q が次のいずれかと同値になることである：

$$\begin{aligned} & \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ & \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ & \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

そこで今回は、特異点が 2 個または 3 個のトーリック log del Pezzo 曲面をそれぞれ分類した。証明はいずれも完全に扇や LDP-polygon の側の議論で示され、純粋に組合せ論的である。

定理 5.2 ([13, Theorem 2]). トーリック log del Pezzo 曲面 X_Q が特異点をちょうど 2 個もつための必要十分条件は、次のいずれか 1 つが成り立つことである。

- (1) $p, q \in \mathbb{Z}$ で $p, q \geq 2, \gcd(p, q) = 1$ を満たすものが存在して、

$$Q \cong \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p \\ -q \end{pmatrix} \right\}.$$

- (2) $p, q, r \in \mathbb{Z}$ で $p \leq 1, r \leq \min\{-pq - 2, -2, -q - 1, q - pq - 1\}, \gcd(q, r) = 1$ を満たすものが存在して、

$$Q \cong \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} \right\}.$$

- (3) $p, q, r \in \mathbb{Z}$ で $p \leq 0, 1 \leq q \leq -r - 1, \gcd(q, r) = 1$ を満たすものが存在して、

$$Q \cong \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ p+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} \right\}.$$

特に、 X_Q が特異点をちょうど 2 個もつならば、 $\rho(X_Q) \leq 3$ である。

定理 5.3 ([13, Theorem 3]). トーリック log del Pezzo 曲面 X_Q が特異点をちょうど 3 個もつための必要十分条件は、次のいずれか 1 つが成り立つことである。

- (1) $\rho(X_Q) \leq 2$.
 (2) $\rho(X_Q) = 3$ であり, $p, q, r, s, t \in \mathbb{Z}$ で $p \leq 1, r \leq \min\{-1, -pq - 2, q - pq - 1, -pq + qt - rs + ps + t - 1\}, t \leq \min\{-2, -s - 1, qt - rs + r - 1\}, 2 \leq qt - rs, \gcd(q, r) = \gcd(s, t) = 1$ を満たすものが存在して

$$Q \cong \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \right\}.$$

- (3) $\rho(X_Q) = 4$ であり, X_Q は (2) のトーリック log del Pezzo 曲面から非特異な $(\mathbb{C}^*)^2$ -不動点を中心としたブローアップで得られる.

特に, X_Q が特異点をちょうど 3 個もつならば, $\rho(X_Q) \leq 4$ である.

参考文献

- [1] F. Berchtold, *Lifting of morphisms to quotient presentations*, Manuscripta Math. **110** (2003), 33–44.
 [2] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Toric Topology*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. **204**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
 [3] S. Choi, M. Masuda and D.Y. Suh, *Rigidity problems in toric topology: A survey*, Proc. Steklov Inst. Math. **275** (2011), 177–190.
 [4] D. A. Cox, J. B. Little and H. K. Schenck, *Toric Varieties*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **124**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
 [5] D. I. Dais, *Toric log del Pezzo surfaces with one singularity*, arXiv:1705.06359.
 [6] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Studies, Vol. **131**. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.
 [7] A. M. Kasprzyk, M. Kreuzer and B. Nill, *On the combinatorial classification of toric log del Pezzo surfaces*, LMS J. Comput. Math. **13** (2010), 33–46.
 [8] A. M. Kasprzyk and B. Nill, *Fano polytopes*, Strings, Gauge Fields, and the Geometry Behind, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2013, pp. 349–364.
 [9] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) **15**, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
 [10] H. Sato and Y. Suyama, *Remarks on toric manifolds whose Chern characters are positive*, arXiv:1908.11201.
 [11] Y. Suyama, *Examples of smooth compact toric varieties that are not quasitoric manifolds*, Algebr. Geom. Topol. **14** (2014), 3097–3106.
 [12] Y. Suyama, *Simplicial 2-spheres obtained from non-singular complete fans*, Dal’nevost. Mat. Zh. **15** (2015), 277–288.
 [13] Y. Suyama, *Classification of toric log del Pezzo surfaces with few singular points*, arXiv:1910.00206.