

Rényi エントロピーに対するモーメント不等式と 不確定性原理

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
勝呂剛志 (Takeshi SUGURO)

概要

Rényi エントロピーに対する Shannon の不等式を考察する．ここでは，統計力学や情報理論でよく知られた Boltzmann–Shannon エントロピーの 1 パラメータ拡張である Rényi エントロピーと，確率密度関数のモーメントとの関係を表す Shannon の不等式を紹介する．また，対数型 Sobolev の不等式と組み合わせることで得られる不確定性原理への応用に触れる．

1 Shannon の不等式

統計力学や情報理論において，状態の不確定性や曖昧さを示す概念の一つとしてエントロピーが知られている．統計力学においては，1872 年に Boltzmann により希薄気体を記述する Boltzmann 方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f), & t > 0, (x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \\ f(0, x, v) = f_0(x, v), & (x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

の解 f に対する H 定理の中でエントロピー汎関数が現れた．ここで， $f = f(t, x, v)$ は，時刻 $t > 0$ ，位置 $x \in \mathbb{R}^3$ における，速度 $v \in \mathbb{R}^3$ を持つ気体粒子の密度であり， $Q(f, f)$ は衝突積分項とよばれるものである．簡単のため，空間一様な場合 $f(t, x, v) = f(t, v)$ を考えると，Boltzmann の H 定理はエントロピー汎関数

$$H(t) \equiv - \int_{\mathbb{R}^3} f(t, v) \log f(t, v) dv \quad (1.1)$$

を用いて，

$$\frac{d}{dt} H(t) \geq 0$$

と表される．この H 定理は，気体粒子の密度に対するエントロピーが時間に関して増大することを意味し，熱力学第二法則に相当する．一方で，1948 年には Shannon [12] により情報理論におけるエントロピーが以下の形で与えられた：

$$H[f] \equiv - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \log f(x) dx. \quad (1.2)$$

ここで，関数 f は非負値な可積分関数であり， $\|f\|_1 = 1$ と正規化されたものを考える．ただし， $0 < p < \infty$ に対して， $\|\cdot\|_p$ は

$$\|f\|_p \equiv \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

と定義する. この論文 [12] においては, はじめに離散的なエントロピー

$$S_1 = S_1(p_1, \dots, p_N) \equiv - \sum_{j=1}^N p_j \log p_j$$

が定式化された. ここで, $(p_1, p_2, \dots, p_N)$ は

$$0 \leq p_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^N p_j = 1$$

をみたす確率分布である. Shannon はエントロピーがみたすべき性質である以下の Shannon–Khinchin の公理系をみたすエントロピーが一意的に S_1 であることを示した:

1. 連続性: 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して, $S_1(p_1, p_2, \dots, p_N)$ は $(p_1, p_2, \dots, p_N)$ について連続である;
2. 最大性: 任意の $N \in \mathbb{N}$ と $(p_1, p_2, \dots, p_N)$ に対して,

$$S_1(p_1, p_2, \dots, p_N) \leq S_1\left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}\right)$$

が成り立つ;

3. 強加法性 (Shannon 加法性): 任意の $N \in \mathbb{N}$ と $(p_1, p_2, \dots, p_N)$, $0 < t < 1$ に対して,

$$S_1(tp_1, (1-t)p_1, p_2, \dots, p_N) = S_1(p_1, p_2, \dots, p_N) + p_1 S_1(t, 1-t)$$

が成り立つ;

4. 展開性: 任意の $N \in \mathbb{N}$ と $(p_1, p_2, \dots, p_N)$ に対して,

$$S_1(p_1, p_2, \dots, p_N, 0) = S_1(p_1, p_2, \dots, p_N)$$

が成り立つ.

実は, 強加法性において, $t = 0, 1$ の場合は展開性に相当する. 離散的なエントロピー S_1 の連続の定式化が (1.2) であり, これは, Boltzmann が導入したエントロピー汎関数 (1.1) と一致する.

本稿では, H を Shannon エントロピーと呼ぶことにする. 論文 [12] においては, 2 次モーメント有限の制限下における確率密度関数の Shannon エントロピー最大化問題が考察されており, 以下の不等式に書き直される:

命題 1.1 ([12]). 任意の非負値な $f \in L_2^1(\mathbb{R}^n) \equiv \{f \in L^1(\mathbb{R}^n); |x|^2 f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ で $\|f\|_1 = 1$ をみたすものに対して,

$$- \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \log f(x) dx \leq \frac{n}{2} \log \left(\frac{2\pi e}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f(x) dx \right) \quad (1.3)$$

が成り立つ. ここで, 右辺の定数 $2\pi e/n$ は最良定数であり, 等号を達成する関数は Gauss 関数

$$G_t(x) \equiv (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad \text{for } t > 0 \quad (1.4)$$

である.

以下、命題 1.1 における不等式 (1.3) を Shannon の不等式と呼ぶことにする。Shannon の不等式 (1.3) の右辺に現れる 2 次モーメントの項は分散に相当しており、命題 1.1 は等号を達成する、つまり、Shannon エントロピー (1.2) を最大化させる函数は正規分布であり、熱方程式

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{for } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \quad (1.5)$$

の基本解でもある Gauss 函数 (1.4) であることを示唆している。より一般の重み付き Lebesgue 空間とモーメントに対する Shannon の不等式とその最良定数は Ogawa–Wakui [9] により知られており、さらに、重み (モーメント) を対数函数に拡張した不等式は Kubo–Ogawa–Suguro [6] が示した。本稿では、Shannon の不等式 (1.3) における左辺の Shannon エントロピー (1.2) に着目し、1 パラメータ拡張されたあるエントロピーに対する Shannon の不等式を考察する。

Shannon エントロピー (1.2) の 1 パラメータ拡張としては、情報理論においては Shannon–Khinchin の公理系の強加法性を 1 パラメータ拡張した Tsallis エントロピー

$$h_\alpha[f] \equiv \frac{1}{1-\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^\alpha dx - 1 \right)$$

が知られているが、本稿では以下の Rényi エントロピーを考える：

$$H_\alpha[f] \equiv \frac{1}{1-\alpha} \log \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^\alpha dx. \quad (1.6)$$

ここで、 $\alpha > 0$ は $\alpha \neq 1$ とし、先と同様に、函数 f は非負値な正規化された可積分函数とする。Rényi エントロピーは Rényi [10] により導出され、Shannon–Khinchin の公理系の展開性を 1 パラメータ拡張したエントロピーである。特に、 $\alpha = 1$ としたときに、Shannon エントロピー (1.2) と一致する。実際に、 $\alpha > 1$ と非負値な正規化された滑らかな函数 f に対して、

$$\begin{aligned} H_\alpha[f]|_{\alpha=1} &= - \frac{\log \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx - \log \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^\alpha dx}{1-\alpha} \Big|_{\alpha=1} \\ &= - \frac{d}{d\alpha} \log \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^\alpha dx \Big|_{\alpha=1} \\ &= - \frac{1}{\|f\|_\alpha^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^\alpha \log f(x) dx \Big|_{\alpha=1} = H[f] \end{aligned}$$

となる。さらに、Rényi エントロピー (1.6) は $\alpha > 0$ について単調性、つまり、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} H_\alpha[f] &= \frac{1}{(1-\alpha)^2} H_\alpha[f] + \frac{1}{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)^\alpha}{\|f\|_\alpha^\alpha} \log f(x) dx \\ &\leq \frac{1}{(1-\alpha)^2} H_\alpha[f] + \frac{1}{(1-\alpha)^2} \log \frac{1}{\|f\|_\alpha^\alpha} = 0 \end{aligned}$$

が従う。ここで、Jensen の不等式を用いた。一方で、再び Jensen の不等式より、

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \log f(x)^{\alpha-1} dx \leq \log \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^\alpha dx$$

が従うので、 $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq 1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ に対して、Rényi エントロピー (1.6) は

$$H_{\alpha_3}[f] \leq H_{\alpha_2}[f] \leq H[f] \leq H_{\alpha_1}[f] \leq H_{\alpha_0}[f] \quad (1.7)$$

をみたす.

主定理として, Rényi エントロピー (1.6) に対する Shannon の不等式を得た (Suguro [14]):

定理 1.2 ([14]). $\alpha > 0$ かつ $\alpha \neq 1$ とする. また, b を

$$b > \begin{cases} n \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) & \text{if } 0 < \alpha < 1, \\ 0 & \text{if } \alpha > 1 \end{cases} \quad (1.8)$$

とする. このとき, 任意の非負値で正規化された函数 $f \in L_b^1(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\frac{1}{1-\alpha} \log \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^\alpha dx \leq \frac{n}{b} \log \left(C_b \int_{\mathbb{R}^n} |x|^b f(x) dx \right) \quad (1.9)$$

が成り立つ. ここで, 右辺の定数

$$C_b = \begin{cases} \pi^{\frac{b}{2}} \frac{b\alpha}{n(1-\alpha)} \left(\frac{b\alpha}{b\alpha - n(1-\alpha)} \right)^{\frac{b-n(1-\alpha)}{n(1-\alpha)}} \left(\frac{2}{b} \frac{\Gamma(\frac{n}{b}) \Gamma(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{n}{b})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{1}{1-\alpha})} \right)^{\frac{b}{n}} & \text{if } 0 < \alpha < 1, \\ \pi^{\frac{b}{2}} \frac{b\alpha}{n(\alpha-1)} \left(\frac{b\alpha + n(\alpha-1)}{b\alpha} \right)^{\frac{b+n(\alpha-1)}{n(\alpha-1)}} \left(\frac{2}{b} \frac{\Gamma(\frac{n}{b}) \Gamma(\frac{\alpha}{\alpha-1})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{n}{b})} \right)^{\frac{b}{n}} & \text{if } \alpha > 1 \end{cases}$$

は最良定数であり, 等号はスケーリングを含めて, 以下の一般化 Zel'dovich–Kompaneets–Barenblatt (ZKB) 函数のときのみ成り立つ:

$$\phi_b(x) \equiv \begin{cases} \gamma_b(1 + |x|^b)^{\frac{1}{\alpha-1}} & \text{if } 0 < \alpha < 1, \\ \gamma_b(1 - |x|^b)_+^{\frac{1}{\alpha-1}} & \text{if } \alpha > 1, \end{cases} \quad (1.10)$$

ただし, $f_+(x) \equiv \max\{f(x), 0\}$ として, 定数 $\gamma_b > 0$ は $\|\phi_b\|_1 = 1$ をみたすように, つまり,

$$\gamma_b = \begin{cases} \frac{b}{2} \pi^{-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{1}{1-\alpha})}{\Gamma(\frac{n}{b}) \Gamma(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{n}{b})} & \text{if } 0 < \alpha < 1, \\ \frac{b}{2} \pi^{-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{n}{b})}{\Gamma(\frac{n}{b}) \Gamma(\frac{\alpha}{\alpha-1})} & \text{if } \alpha > 1 \end{cases}$$

とする.

不等式 (1.9) は最良定数を除いて, Kurokiba–Ogawa [7] により証明されているが, [14] において, 最良定数とそれを達成する函数を同定した. 特に, $b = 2$ の場合においては, 等号を達成する函数である一般化 ZKB 函数 (1.10) は

$$\mathcal{B}_\alpha(x) \equiv \left(\gamma_\alpha - \frac{\alpha-1}{2\alpha} |x|^2 \right)_+^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

と書き直すことができる. ここで, 定数 $\gamma_\alpha > 0$ は,

$$\gamma_\alpha \equiv \begin{cases} \left(\frac{2\alpha\pi}{1-\alpha} \right)^{\frac{n(1-\alpha)}{2+n(\alpha-1)}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} \right)^{\frac{2(1-\alpha)}{2+n(\alpha-1)}} & \text{if } 0 < \alpha < 1, \\ \left(\frac{\alpha-1}{2\alpha\pi} \right)^{\frac{n(\alpha-1)}{2+n(\alpha-1)}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)} \right)^{\frac{2(\alpha-1)}{2+n(\alpha-1)}} & \text{if } \alpha > 1 \end{cases}$$

である. $\mathcal{B}_\alpha$ は準線形発展方程式である fast-diffusion, porous-media 方程式

$$\partial_t \rho - \Delta \rho^\alpha = 0 \quad \text{for } t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

の自己相似解であることが知られており (Zel'dovich–Kompaneets [17], Zel'dovich–Barenblatt [16]), 特に, 準線形 Fokker–Planck 方程式

$$\partial_t u = \Delta u^\alpha + \nabla \cdot (xu) \quad \text{for } t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

の定常解である. 定理 1.2 の仮定において α に要請される下からの条件 (1.8) は, 一般化 ZKB 函数 (1.10) が重み付き Lebesgue 空間 $L_b^1(\mathbb{R}^n)$ に属するための条件である. $\alpha > 1$ のときは, コンパクトサポートを持つような函数であり, $\alpha < 1$ の場合は, Sobolev の不等式の最良定数を達成する函数である Talenti 函数と形が似ている (Talent [15] を参照). $\alpha = 1$ の場合における不等式 (1.9) は以下の意味で Shannon の不等式 (1.3) と一致する:

系 1.3. 定数 C_2 を不等式 (1.9) における $b = 2$ の場合の最良定数とする. このとき,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} C_2 = \frac{2\pi e}{n}$$

が成り立つ. ここで, 右辺の定数は Shannon の不等式 (1.3) の最良定数である. さらに, 上記で定義した一般化 ZKB 函数 $\mathcal{B}_\alpha$ に対して,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \mathcal{B}_\alpha(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

であり, 右辺の函数もまた Shannon の不等式 (1.3) をみたす.

2 定理 1.2 と系 1.3 の証明の概略

2.1 定理 1.2 の証明

証明の手法としては, [6] や [9] で用いたある相対エントロピーの評価から不等式 (1.9) を導出する. 簡単のため, 非負値な正規化された滑らかな函数 f に対して不等式 (1.9) を証明する. 以下, $\alpha < 1$ と $\alpha > 1$ の二つの場合に分けて考える.

2.1.1 $\alpha < 1$ の場合

函数 f と先に定義した一般化 ZKB 函数 ϕ_b との相対エントロピー

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^\alpha \log \frac{\phi_b(x)}{f(x)} dx$$

を考える。今、 $1 - b/(n+b) < \alpha < 1$ であるので、 $\phi_b \in L_b^1(\mathbb{R}^n)$ 、特に、 $\phi_b \in L^\alpha(\mathbb{R}^n)$ であることに注意する。Jensen の不等式より、

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^\alpha \log \frac{\phi_b(x)}{f(x)} dx &= \frac{\|f\|_\alpha^\alpha}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)^\alpha}{\|f\|_\alpha^\alpha} \log \frac{\phi_b(x)^\alpha}{f(x)^\alpha} dx \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_\alpha^\alpha \log \frac{\|\phi_b\|_\alpha^\alpha}{\|f\|_\alpha^\alpha} \end{aligned}$$

を得る。一方で、 $\alpha < 1$ であるので、再び Jensen の不等式より、

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^\alpha \log \frac{\phi_b(x)}{f(x)} dx &= \frac{1}{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)^\alpha}{\|f\|_\alpha^\alpha} \log \frac{\phi_b(x)^{\alpha-1}}{f(x)^{\alpha-1}} dx \\ &\geq \frac{1}{\alpha-1} \|f\|_\alpha^\alpha \log \left(\gamma_b^{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^b) f(x) dx \right) \end{aligned}$$

が従う。以上をまとめると、 ϕ_b は明示的に表されていることに注意すれば、函数 f の L^α -ノルムと b 次モーメントの関係式が得られる。ここで、 L^1 -ノルムを保存するようなスケーリング

$$f_\lambda(x) \equiv \lambda^n f(\lambda x) \quad \text{for } \lambda > 0$$

を代入し、 $\lambda > 0$ について最適化することにより、不等式 (1.9) が従う。

2.1.2 $\alpha > 1$ の場合

Rényi エントロピーの単調性 (1.7) と Shannon の不等式 (1.3) より、最良定数を除いて不等式 (1.9) が従う。最良定数を同定するため、以下の相対エントロピーを考える：

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_b(x)^{\alpha-1} f(x) \log \frac{\phi_b(x)}{f(x)} dx.$$

対数函数の凹性を用いて、Jensen の不等式より、

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_b(x)^{\alpha-1} f(x) \log \frac{\phi_b(x)}{f(x)} dx &= A \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\phi_b(x)^{\alpha-1} f(x)}{A} \log \frac{\phi_b(x)}{f(x)} dx \\ &\leq A \log \frac{\|\phi_b\|_\alpha^\alpha}{A} \end{aligned}$$

を得る。ただし、

$$A \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \phi_b(x)^{\alpha-1} f(x) dx = \gamma_b^{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}^n} (1-|x|^b)_+ f(x) dx$$

とおき、 A は b 次モーメントを含む項であることを注意する。相対エントロピーの下からの評価としては、対数函数の凹性では評価できないため、次の函数を考える：

$$\Phi(s) \equiv -s \log s \quad \text{for } s > 0.$$

$\Phi''(s) \leq 0$ より Φ は凹関数であることがわかる．よって, Jensen の不等式より,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_b(x)^{\alpha-1} f(x) \log \frac{\phi_b(x)}{f(x)} dx &= -\frac{1}{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^\alpha \Phi \left(\frac{\phi_b(x)^{\alpha-1}}{f(x)^{\alpha-1}} \right) dx \\ &\geq -\frac{1}{\alpha-1} \|f\|_\alpha^\alpha \Phi \left(\frac{A}{\|f\|_\alpha^\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha-1} A \log \frac{A}{\|f\|_\alpha^\alpha} \end{aligned}$$

が従う．以上をまとめることにより, 関数 f の L^α -ノルムと b 次モーメントを含む項 A の関係式が得られ, 先と同様の議論により, 不等式 (1.9) が従う. $\square$

2.2 系 1.3 の証明

$\alpha > 1$ の場合を考える. $\beta \equiv \alpha/(\alpha-1)$ とおくと, $\alpha \rightarrow 1$ としたとき, $\beta \rightarrow \infty$ となる. 各不等式 (1.3) と (1.9) の最良定数の商は,

$$\frac{n}{2\pi e} C_2 = \frac{\beta}{e} \left(1 + \frac{n}{2\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha} \frac{2\beta}{n} + 1} \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \frac{n}{2})} \right)^{\frac{2}{n}}$$

となる. Gamma 関数の近似である Stirling の近似

$$\Gamma(z) \simeq (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-z} z^{z-\frac{1}{2}} \quad \text{for } z \gg 1$$

を用いると, $\alpha \rightarrow 1$ としたとき,

$$\begin{aligned} \frac{n}{2\pi e} C_2 &\simeq \frac{\beta}{e} \left(1 + \frac{n}{2\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha} \frac{2\beta}{n} + 1} \left[e^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\beta}{\beta + \frac{n}{2}} \right)^{\beta - \frac{1}{2}} \left(\beta + \frac{n}{2} \right)^{-\frac{n}{2}} \right]^{\frac{2}{n}} \quad \text{for } \beta \gg 1 \\ &= \left(1 + \frac{n}{2\beta} \right)^{-\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

を得る. $\alpha < 1$ の場合は以上の議論と同様にして従う. $\square$

3 不確定性原理への応用

Shannon の不等式 (1.3) の応用の一つとして, [6] や Ogawa–Seraku [8] において議論されているように, 不確定性原理への応用が考えられる. その際に, エントロピー汎函数の上からの評価を与える Shannon の不等式に対して, 下からの評価を意味する対数型 Sobolev の不等式と呼ばれる Sobolev の不等式の一つが用いられる. 以下, 簡単のため, 非負値な正規化された滑らかな関数 f に対して議論を進める.

対数型 Sobolev の不等式は Stam [13] によって, 空間次元 $n = 1$ の下で, Gauss 測度を用いて導出された. その後, Gross [5] により, 半群と確率論を用いて示されており, この論文の中ではもとより別の方法で導出された熱方程式 (1.5) の解の L^p - L^q 消散評価の導出も対数型 Sobolev の不等式を用いて示されている. 本稿では以下の Lebesgue 測度を用いたものを考える:

命題 3.1 ([5], [13]). 任意の非負値な正規化された滑らかな函数 f に対して,

$$-\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \log f(x) dx \geq \frac{n}{2} \log \left(\frac{1}{2n\pi e} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{f(x)} |\nabla f(x)|^2 dx \right) \quad (3.1)$$

が成り立つ. ここで, 右辺の定数 $1/(2n\pi e)$ は最良定数であり, 等号は函数 f が Gauss 函数 (1.4) のときのみ成り立つ.

対数型 Sobolev の不等式 (3.1) において右辺に現れる積分値は Fisher 情報量と呼ばれている. 一般の Sobolev 空間 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 上でも対数型 Sobolev の不等式は導出されており, $1 < p < n$ においては Del Pino–Dolbeault [2] によって Gagliardo–Nirenberg の不等式の最良定数を同定することで, 対数型 Sobolev の不等式の最良定数も同定された. さらに, $1 \leq p < \infty$ においては, Gentil [4] により, Hamilton–Jacobi 方程式を通して最良定数を同定された (Fujita [3] や [8] も参照).

Shannon の不等式 (1.3) と対数型 Sobolev の不等式 (3.1) の関係としては, [13] において言及されており, 二つの不等式を用いて Shannon エントロピー (1.2) を評価することによって, 以下の Cramér–Rao の不等式が得られる:

命題 3.2. 任意の非負値な正規化された滑らかな函数 f に対して,

$$n \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{f(x)} |\nabla f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

が成り立つ. ここで, 左辺の定数 n は最良定数であり, 等号はスケール変換を含めて, f が Gauss 函数 (1.4) のときのみ成り立つ.

特に, 函数 ψ を Sobolev 空間 $H^1(\mathbb{R}^n)$ から取ってきた際, Cramér–Rao の不等式 (3.2) に $f \equiv \psi^2$ と代入することにより, Heisenberg の不確定性原理

$$\frac{n}{2} \|\psi\|_2^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

が得られる.

Rényi エントロピー (1.6) に対応する不確定性原理を考察するため, 対数型 Sobolev の不等式 (3.1) の拡張を導入する. 対数型 Sobolev の不等式 (3.1) の左辺のエントロピーにおいて, Rényi エントロピー (1.6) に拡張した不等式はすでに知られており, Del Pino–Dolbeault [1] や Savaré–Toscani [11] により証明されている:

命題 3.3 ([1], [11]). $1 - 2/(n+2) < \alpha < 1$, または $\alpha > 0$ とする. 任意の非負値な正規化された滑らかな函数 f に対して,

$$\frac{1}{1-\alpha} \log \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^\alpha dx \geq -\frac{n}{2+n(\alpha-1)} \log \left(\frac{B_2}{\|f\|_\alpha^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{f(x)} |\nabla f(x)^\alpha|^2 dx \right) \quad (3.3)$$

が成り立つ. ここで, 右辺の定数 B_2 は最良定数であり, Shannon の不等式 (1.9) の最良定数 C_2 を用いて,

$$B_2 = \frac{1}{n^2 C_2}$$

と書き表される. さらに, 等号を達成する函数は, 一般化 ZKB 函数 (1.10) である.

Rényi エントロピーに対する Shannon の不等式 (1.9) と対数型 Sobolev の不等式 (3.3) を用いることによって, Heisenberg 型不確定性原理が得られる:

系 3.4 ([14]). $1 - 2/(n + 2) < \alpha < 1$, または $\alpha > 1$ とする. 任意の非負値な正規化された滑らかな函数 f に対して,

$$n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^\alpha dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{f(x)} |\nabla f(x)^\alpha|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

が成り立つ. ここで, 左辺の定数 n は最良定数であり, 等号はスケール変換を含めて, 函数 f が一般化 ZKB 函数 (1.10) のときのみ成り立つ.

不等式 (3.4) において, $\alpha = 1$ としたとき, Cramér–Rao の不等式 (3.2) と一致することから, 不確定性原理の拡張であることがいえる.

参考文献

- [1] Del Pino, M. and Dolbeault, J., *Best constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions*, J. Math. Pures Appl. **81** (2002), 847-875.
- [2] Del Pino, M. and Dolbeault, J., *The optimal euclidean L^p -Sobolev logarithmic inequality*, J. Funct. Anal. **174** (2003), 151-161.
- [3] Fujita, Y., *A supplementary proof of L^p -logarithmic Sobolev inequality*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **6** (2015), 119-132.
- [4] Gentil, I., *The general optimal L^p -Euclidean logarithmic Sobolev inequality by Hamilton-Jacobi equations*, J. Funct. Anal. **202** (2003), 591-599.
- [5] Gross, D., *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. **97** (1975), 1061-1083.
- [6] Kubo, H., Ogawa, T., and Suguro, T., *Beckner type of the logarithmic Sobolev and a new type of Shannon's inequalities and an application to the uncertainty principle*, Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), 1511-1518.
- [7] Kurokiba, M. and Ogawa, T., *Finite-time blow-up for solutions to a degenerate drift-diffusion equation for a fast-diffusion case*, Nonlinearity **32** (2019), 2073-2093.
- [8] Ogawa, T. and Seraku, K., *Logarithmic Sobolev and Shannon's inequalities and an application to the uncertainty principle*, Comm. Pure Appl. Anal. **17** (2018), 1651-1669.
- [9] Ogawa, T. and Wakui, H., *Non-uniform bound and finite time blow up for solutions to a drift-diffusion equation in higher dimensions*, Anal. Appl. **14** (2016), 145-183.
- [10] Rényi, A., *On measures of entropy and information*, Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., Vol. I (1961), 547-561.
- [11] Savaré, G. and Toscani, G., *The concavity of Rényi entropy power*, IEEE Trans. Inform. Theory **60** (2014), 2687-2693.
- [12] Shannon, C. E., *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J. **27** (1948), 379-423, 623-656.

- [13] Stam, A. J., *Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon*, Inform. and Control **2** (1959), 102-112.
- [14] Suguro, T., *Shannon's inequality for the Rényi entropy and an application to the uncertainty principle*, preprint.
- [15] Talenti, G., *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. **110** (1976), 353-372.
- [16] Zel'dovich, Ya. B. and Barenblatt, G. I., *Asymptotic properties of self-preserving solutions of equations of unsteady motion of gas through porous media*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **118** (1958) 671-674.
- [17] Zel'dovich, Ya. B. and Kompaneets, A. S., *Towards a theory of heat conduction with thermal conductivity depending on the temperature*, In "Collection of papers dedicated to 70th Anniversary of A. F. Ioffe" , Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1950, 61-72.