

一意性のない力学系における同値性の概念について

京都大学大学院人間・環境学研究科

須田智晴 (Tomoharu SUDA)

概要

通常、力学系は実数あるいは整数全体のなす加法群の位相空間への作用として定義される。それゆえ軌道は一意的に定まり、「軌道を保つ」同相写像の存在で力学系の同値性を定義することができる。しかし、非自励的な常微分方程式のように軌道の一意性を欠き、このような定式化がうまく行かない「力学系」の例も多い。本講演では、こうした型の力学系について、その位相的な同値性の定式化を考察する。また、簡単な場合について同値性を保証する条件を与える。

1 導入

力学系とはどのようなものだろうか。これは平たく言えば「時間変化のある数学的なモデル」のことであるが、その正確な定義は次のように述べられる [10]。

定義 1 (力学系). X を Hausdorff 空間とする。連続写像 $\phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ が次の条件を満たすとき、組 (ϕ, X) を X 上の連続力学系（連続時間の力学系）という。

1. 任意の $x \in X$ について、 $\phi(0, x) = x$.
2. 任意の $x \in X$ と $s, t \in \mathbb{R}$ について $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x)$.

また、同相写像 $f: X \rightarrow X$ について組 (f, X) を X 上の離散力学系（離散時間の力学系）という。

注意 1. 離散力学系の定義の形は連続力学系とは一見異なる。しかし、 $\phi: \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ という写像を $\phi(n, x) := f^n(x)$ (f^n は f の n 回合成) により定義すれば、連続力学系の場合と同様の条件を満たすことが分かる。したがって、より簡潔には、実数あるいは整数全体のなす加法群の位相空間への作用という形で力学系を定義することもできる。

本稿では以下、主に連続力学系について考察する。そこで、単に力学系といえば連続力学系のことの意味するものとする。

二つの力学系の同値性は次のように述べられる。

定義 2 (位相共役). X, Y を Hausdorff 空間とする。二つの力学系 (ϕ, X) と (ψ, Y) が位相共役であるとは、ある同相写像 $h: X \rightarrow Y$ が存在し、任意の $t \in \mathbb{R}$ と $x \in X$ について次が成り立つことである。

$$h(\phi(t, x)) = \psi(t, h(x)).$$

これは、力学系を位相変換群の作用とみたときの同値性にほかならない。

軌道の概念はある点の時間発展を記述するものであり、力学系の研究において重要な位置を占める。

定義 3 (軌道). X を Hausdorff 空間とする. 力学系 (ϕ, X) について, 集合

$$\mathcal{O}(x) := \{\phi(t, x) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

を x の軌道という. 同様に, 集合

$$\mathcal{O}^+(x) := \{\phi(t, x) \mid t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$$

を x の正の半軌道といい, 集合

$$\mathcal{O}^-(x) := \{\phi(t, x) \mid t \in \mathbb{R}, t \leq 0\}$$

を x の負の半軌道という.

次のような形の軌道は特に興味のある対象である.

定義 4 (平衡点). X を Hausdorff 空間, (ϕ, X) を力学系とする. 点 $x \in X$ が平衡点であるとは,

$$\{x\} = \mathcal{O}(x)$$

となることである.

さて, 力学系の典型的な例は微分方程式の解という形で与えられる. すなわち, $X = \mathbb{R}^n$, F を $\mathbb{R}^n$ 上のベクトル場として,

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

という微分方程式の解を用いて定義される連続力学系である. しかし, どのような常微分方程式も力学系を定義するわけではなく, 少なくとも次の二つの条件が満たされている必要がある.

1. 解の存在の一意性 初期値問題の解が一意的に存在する^{*1}.
2. 解の存在の大域性 初期値問題の解は, どれも $\mathbb{R}$ 全体で定義できる. すなわち, 爆発しない.

解の存在の一意性に関しては局所的な Lipschitz 性があれば十分なため, ベクトル場が滑らかであればよい. 大域性に関してはより強い条件が必要である.

例 1 (解の一意性がない例). 次の $\mathbb{R}$ 上の常微分方程式を考える.

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}.$$

この例については, $x = 0$ の近傍において解の一意性が成り立っていない. 実際, $x(t) \equiv 0$ も $x(t) = t^3$ も, $x(0) = 0$ を満たす解である.

力学系にならない常微分方程式の中には, 応用上重要なものも多い [3, 6]. また, 常微分方程式と写像を組み合わせた形のモデルも考えられているが, もちろんこれも力学系にはならない [4].

^{*1} このことは系の可逆性を含意する. 特に, 有限時間で平衡点に至る軌道は存在しない.

例 2 (Impact Oscillator). 強制振動の問題で「床」の存在を考えると、次のようなモデル (**impact oscillator**) が得られる. $x > -\sigma$ では

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + kx = F \cos(\omega t) \quad (1)$$

とし, また $x(t) = -\sigma$ のときは $\dot{x}(t+0) = -r\dot{x}(t-0)$ と動かす. すなわち, $x = -\sigma$ にある床にぶつかったときは非弾性衝突を考えて速度を置き換える. ただし $0 < r < 1$, F, σ は定数である.

考えているモデルが力学系にならないことの何が問題になるだろうか. 「軌道」に相当する概念が定義できるならば, 平衡点といった基礎的な概念は問題なく定義される. また, 軌道を追跡することができるため, 例えば平衡点の安定性について議論することも可能である. こうした, ある特定の系について述べられる概念については, ほぼ一般化される.

問題となるのは, 二つの系の比較が必要な概念である. 例えば構造安定性, 平衡点の分類といった事柄について議論するためには, 異なる「力学系」を比べる必要がある. もちろん, 具体的な系を二つもってきたときに, それらを比較することは可能である. たとえば, 平衡点の個数が違うならば, それらは明らかに違うものとみなされるべきである. また, 適切な座標変換で移りあうならば同値とみなすべきだろう. しかし, 一般的な定義を欠いたままこうした議論を行うことはあまり気持ちの良いものではない. 力学系の同値性の概念を一般化するには, どうしたらよいだろうか.

2 Bebutov system による定式化

軌道の一意性を欠く, 即ち初期点 $x \in X$ に対して軌道 $\mathcal{O}(x) \subset X$ を一意に定めることができない場合に, 力学系の概念をどのように一般化すべきかについては様々な定式化が提唱されている [2]. その多くは安定性の解析, すなわち初期値に関する摂動の効果を記述することを目的としているため, 上に述べたような「比較」の用途には必ずしも向かない. しかし, Sell の理論 [8, 9] に基づく, Bebutov system を用いた定式化では普通の力学系に議論を帰着されるため, 位相共役性の自然な一般化が可能である.

まず, Bebutov system の定義とその基本的な性質を述べよう. $\mathbb{R}$ から距離空間 X への連続写像全体の集合を以下では $C(\mathbb{R}, X)$ と書く. $C(\mathbb{R}, X)$ には, コンパクト集合上での一様収束による位相を与えておく.

定義 5 (Bebutov system). X 上の **Bebutov system** とは, 次によって定義される連続写像 $\sigma_X : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}, X) \rightarrow C(\mathbb{R}, X)$ のことである: 各 $\phi \in C(\mathbb{R}, X)$ と $t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\sigma_X(\phi, t) := \phi_t. \quad (2)$$

ここで各 $s \in \mathbb{R}$ に対し

$$\phi_t(s) := \phi(s + t) \quad (3)$$

と定める.

注意 2. Bebutov system は位相空間 $C(\mathbb{R}, X)$ 上の連続力学系である. また, これはいわゆる n 文字の full shift の一般化とみることができる. さらに, 連続写像ではなく L^2 写像などでも同様に定義することができる [8].

定義 6 ([1]). 力学系 (ϕ, X) が Bebutov system $(\sigma_Y, C(\mathbb{R}, Y))$ に埋め込み可能であるとは, X から $C(\mathbb{R}, Y)$ の部分集合 A への同相写像 h が存在して, 次の条件をみたすことである: 任意の $x \in X$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$h(\phi(t, x)) = \sigma_Y(t, h(x)).$$

一般に次がなりたつ.

定理 1. 連続力学系 (ϕ, X) は Bebutov system $(\sigma_X, C(\mathbb{R}, X))$ に埋め込み可能である.

特に $X = \mathbb{R}$ 上の Bebutov system については, 次の定理もなりたつ.

定理 2 (Bebutov-Kakutani^{*2}). X をコンパクト距離空間とすると以下は同値.

1. 力学系 (ϕ, X) は Bebutov system $(\sigma_{\mathbb{R}}, C(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ に埋め込み可能.
2. 力学系 (ϕ, X) の平衡点全体の集合は, $\mathbb{R}$ のある部分集合と同相.

力学系 (ϕ, X) が Bebutov system $(\sigma_Y, C(\mathbb{R}, Y))$ に埋め込まれているとき, (ϕ, X) は Bebutov system のある不変閉集合と同一視できる. そこで, 次のように定義する.

定義 7 (一般化された力学系). 組 (E, X) が X 上の一般化された力学系であるとは, 次を満たすことである.

1. E は Bebutov system $(\sigma_X, C(\mathbb{R}, X))$ の不変閉部分集合.
2. $\pi|_E : E \rightarrow X$ を $\pi|_E(\psi) := \psi(0)$ と定めたとき, $\pi|_E$ は全射.

ここで重要なのは, 初期値問題の解が一意に定まらない場合でも, Bebutov system による定式化を用いると通常の力学系に議論を帰着できるという点である. また, 爆発解のある場合さえも, 一点コンパクト化を考えることで扱うことができる [9]. さらに, 「解」が不連続になる場合でも, 考えている関数空間を適切に変更することにより同様の取り扱いができる.

しかし, 定理 1, 2 から分かるように, Bebutov system における共役性だけでは, 「元」の空間に関する情報は失われてしまう. そこで, 同値性の概念は次のように定義する.

定義 8 (位相共役). (E, X) と (F, Y) を一般化された力学系とする. (E, X) と (F, Y) が位相共役であるとは, 同相写像 $h : X \rightarrow Y$ と $k : E \rightarrow F$ が存在して次の条件を満たすことである:

1. 任意の $t \in \mathbb{R}$ と $\psi \in E$ について,

$$k(\sigma_X(t, \psi)) = \sigma_Y(t, k(\psi)).$$

2. 任意の $\psi \in E$ について,

$$\pi|_F \circ k(\psi) = h \circ \pi|_E(\psi).$$

この定義が実際に同値関係を定めることも確かめられる.

^{*2} 本定理は Mikhail V. Bebutov (1913~1942) が発見したものであるが, 初めに与えられた証明は非常に複雑であった [7]. 角谷静夫 (1911~2004) はこれを大幅に簡略化した [5].

3 同値性の確かめ方

上述のようにして力学系の同値性の概念を一般化できた．しかし，そこで用いられている Bebutov system は直観的にわかりやすいものではなく，具体的な系の同値性を確かめるためには，問題を分割できることが望ましい．そこで，簡単な場合についてその同値性を保証する条件を考えたい．まず，次の用語を定義しておく．

定義 9 (局所位相共役)． (ϕ, X) と (ψ, Y) を連続力学系とする． $U \subset X$ と $V \subset Y$ をそれぞれ (不変とは限らない) 開部分集合とする． (ϕ, X) と (ψ, Y) が U, V において局所的に位相共役であるとは，同相写像 $h : U \rightarrow V$ が存在して，任意の $x \in U$ について， $\phi(t, x) \in U$ となる限り， $h(\phi(t, x)) = \psi(t, h(x))$ となることである．

まず，考えている系がいくつかの不変集合に分割できる場合，そのそれぞれでの共役性は全体での共役性を含意する．

命題 1. 一般化された力学系 (E, X) と (F, Y) について， σ_X, σ_Y についての閉不変集合の族 $\{E_i\}_{i=1}^N, \{F_i\}_{i=1}^N$ が存在して，

$$E = \sum_{i=1}^N E_i, F = \sum_{i=1}^N F_i$$

となるとする．もし，各 i について同相写像 $k_i : E_i \rightarrow F_i$ と $h_i : \pi|_E(E_i) \rightarrow \pi|_F(F_i)$ で次をみたすものが存在すれば， (E, X) と (F, Y) は位相共役である．

1. 任意の $t \in \mathbb{R}$ と $\psi \in E_i$ について，

$$k_i(\sigma_X(t, \psi)) = \sigma_Y(t, k_i(\psi)).$$

2. 任意の $\psi \in E_i$ について，

$$\pi|_F \circ k_i(\psi) = h_i \circ \pi|_E(\psi).$$

3. $x \in \pi|_E(E_i) \cap \pi|_E(E_j)$ ならば $h_i(x) = h_j(x)$ であり，この写像により $\pi|_E(E_i) \cap \pi|_E(E_j)$ と $\pi|_F(F_i) \cap \pi|_F(F_j)$ は同相．

例 3. $\mathbb{R}^2$ 上の一般化された力学系を考える．まず，各 $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して

$$\phi_{x_0}(s) := \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix},$$

各 $y_0 \in \mathbb{R}$ に対して

$$\psi_{y_0}(s) := \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\psi}_{y_0}(s) := \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix},$$

と定義する．これらを用いて $\mathbb{R}^2$ 上の一般化された力学系 E_1, E_2, E_3 を次のように定義する：

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\sigma(t, \phi_x) \mid t, x \in \mathbb{R}\}, \\ E_2 &= \{\sigma(t, \psi_y) \mid t, y \in \mathbb{R}\}, \\ E_3 &= \{\sigma(t, \tilde{\psi}_y) \mid t, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

このとき、 E_2 と E_3 は位相共役である．実際、

$$k(\sigma(t, \psi_y)) := \sigma(t, \tilde{\psi}_y),$$

また

$$h(x, y) := (x, x + y)$$

とすればよい．ここで、 $k' : E_1 \rightarrow E_1$ を

$$k'(\sigma(t, \phi_x)) := \sigma(t + x, \phi_x)$$

とすると、任意の $\psi \in E_1$ について、 $\pi \circ k'(\psi) = h \circ \pi(\psi)$ となる．よって、前述の命題により $E = E_1 \cup E_2$ と $F = E_1 \cup E_3$ は位相共役である．

より問題になるのは、不変集合への分割が不可能な場合である．しかし、このような場合でも「よい」性質があれば問題を分割することが可能である．例えば区分的に滑らかな右辺を持つ微分方程式については、微分不可能な点を除いて一意性が成立する．このような場合、各領域での比較によって同値性を確かめることができる．ここでは簡単のため $\mathbb{R}$ 上で、一意性のない点が一点のみの場合を考えよう．

命題 2. 一般化された力学系 $(E, \mathbb{R})$ と $(F, \mathbb{R})$ について、次を仮定する．

1. ある $x_0 \in \mathbb{R}$ と $y_0 \in \mathbb{R}$ について、同相写像 $h_1 : (-\infty, x_0) \rightarrow (-\infty, y_0)$ と $h_2 : (x_0, \infty) \rightarrow (y_0, \infty)$ が存在して、次をみたす：
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} h_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h_2(x) = y_0$.
 - $h_1, h_2, h_1^{-1}, h_2^{-1}$ はどれも一様連続.
2. $(E, \mathbb{R})$ は $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ 、 $(F, \mathbb{R})$ は $\mathbb{R} \setminus \{y_0\}$ において連続力学系の制限になっている．すなわち、次をみたす連続力学系 $(\phi_1, \mathbb{R}), (\phi_2, \mathbb{R}), (\psi_1, \mathbb{R}), (\psi_2, \mathbb{R})$ が存在する．
 - $\phi(0) < x_0$ なる $\phi \in E$ については、 $\phi(t) < x_0$ ならば $\phi(t) = \phi_1(t, \pi|_E(\phi))$.
 - $\phi(0) > x_0$ なる $\phi \in E$ については、 $\phi(t) > x_0$ ならば $\phi(t) = \phi_2(t, \pi|_E(\phi))$.
 - $\psi(0) < y_0$ なる $\psi \in F$ については、 $\psi(t) < y_0$ ならば $\psi(t) = \psi_1(t, \pi|_F(\psi))$.
 - $\psi(0) > y_0$ なる $\psi \in F$ については、 $\psi(t) > y_0$ ならば $\psi(t) = \psi_2(t, \pi|_F(\psi))$.
3. $(\phi_1, \mathbb{R})$ と $(\psi_1, \mathbb{R})$ 、 $(\phi_2, \mathbb{R})$ と $(\psi_2, \mathbb{R})$ はそれぞれ h_1, h_2 によって局所的に位相共役.
4. ある t_0 について $\phi(t_0) = x_0$ となる任意の $\phi \in E$ に対して、 $\psi(t_0) = y_0$ となる $\psi \in F$ で、 $\phi(t) = x_0$ となる t の範囲と $\psi(t) = y_0$ となる t の範囲が一致するものがただ一つ存在．逆に、ある t_0 について $\psi(t_0) = y_0$ となる任意の $\psi \in F$ に対して、 $\phi(t_0) = x_0$ となる $\phi \in E$ で、 $\phi(t) = x_0$ となる t の範囲と $\psi(t) = y_0$ となる t の範囲が一致するものがただ一つ存在．

このとき、 $(E, \mathbb{R})$ と $(F, \mathbb{R})$ は位相共役である．

4 おわりに

本稿では軌道の一意性をもたない力学系について、その位相的な同値性の定式化を考察し、また、簡単な場合について同値性を保証する条件を与えた。しかし、特に後者については条件が複雑になりがちであり、確かめることがより容易な特徴づけが求められる。

参考文献

- [1] J. Auslander. *Minimal Flows and Their Extensions*. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science, 1988.
- [2] JM Ball. Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the navier-stokes equations. In *Mechanics: from theory to computation*, pages 447–474. Springer, 2000.
- [3] M. Bernardo, C. Budd, A. R. Champneys, and P. Kowalczyk. *Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications*, volume 163. Springer Science & Business Media, 2008.
- [4] R. Goebel and R.G. Sanfelice. *Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Stability, and Robustness*. Princeton University Press, 2012.
- [5] Shizuo Kakutani. A proof of Beboutov’s theorem. *Journal of Differential Equations*, 4(2):194–201, 1968.
- [6] O. Makarenkov and Jeroen S. W. Lamb. Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems: A survey. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241(22):1826–1844, 2012.
- [7] V. V. Nemytskii. Topological problems of the theory of dynamical systems. *Translations of AM.S Series One*, 5:414—497, 1962.
- [8] George R Sell. Topological dynamics and ordinary differential equations. 1971.
- [9] George R Sell. Differential equations without uniqueness and classical topological dynamics. *Journal of Differential Equations*, 14(1):42–56, 1973.
- [10] 国府寛司. 力学系の基礎. カオス全書 / 山口昌哉, 合原一幸編. 朝倉書店, 2000.