

Relative $\mathbb{A}^1$ -homotopy and its applications

東京工業大学大学院理学院数学系数学コース
清水 祐利 (Yuri Shimizu)

Abstract

$\mathbb{A}^1$ ホモトピー論とは代数多様体を扱うホモトピー論の一種であり、アフィン直線 $\mathbb{A}^1$ が閉区間 $[0, 1]$ の役割を果たす。通常のホモトピー論と同様にホモトピー群やホモロジー群の $\mathbb{A}^1$ 版を考えることができ、それらは $\mathbb{A}^1$ ホモトピー層、 $\mathbb{A}^1$ ホモロジー層と呼ばれる。本研究では $\mathbb{A}^1$ 版の相対ホモトピー論を与え、以下の二つの定理を証明する。一つはホモロジーに関するホワイトヘッドの定理の $\mathbb{A}^1$ 版である。もう一つは閉部分多様体を取り除いた際の $\mathbb{A}^1$ ホモトピー層及び $\mathbb{A}^1$ ホモロジー層に対する切除定理である。また、ペア $(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{n-1})$ の $\mathbb{A}^1$ ホモロジーの計算も行う。

1 導入

体 k 上の $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論とは k 上の滑らかな代数多様体を取り扱うホモトピー論であり、モレルとヴォエヴォドスキー ([Vo98], [MV99]) によって導入された。本理論ではアフィン直線 $\mathbb{A}^1$ が単位閉区間 $[0, 1]$ (あるいは実直線 $\mathbb{R}$) の役割を果たす。ただし、単純に「代数多様体の間の射を $\mathbb{A}^1$ に沿って連続変化させる」といったような古典的方法で導入できるような理論ではなく、多くの技術的かつ抽象的な道具が必要とされる。これらについての詳細を述べることは初学者を遠ざける結果になるだろうという判断のもと、本テクニカルレポートでは多くの概念に定義を与えることはせず、むしろそのモチベーションや概略を伝えることに注力しようと思う。定義の詳細については、[Vo98], [MV99], [Mo12] を参照してほしい。通常のホモトピー論は安定、非安定の二つに大別されるが、同様に $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論もこの二つに分かれる。講演者は主に非安定理論の研究を行っているので、本テクニカルレポートでもこちらを重点的に解説する。

2 モチベーション

$\mathbb{A}^1$ ホモトピー論は別名モチヴィックホモトピー論とも呼ばれ、モチーフ論の一分野と考えられている。実際、ヴォエヴォドスキーが $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論を導入したのは「モチヴィックコホモロジーに対し、安定ホモトピー論的手法を導入したかった」からである。モチヴィックコホモロジーとは、様々な数論的な量 (チャウ群、 K 理論、 L 関数など) を結び付けてくれる重要なコホモロジー論である。なぜこのような手法を使いたかったのかというと、それは以下の予想を証明したかったからである。

Conjecture 2.1 (ブロック-加藤予想). 体 K と K において可逆な正整数 l , 及び任意の非負整数 n に対し、ノルム剰余写像

$$\partial : K_n^M(K)/l \rightarrow H^n(K, \mu_l^{\otimes n})$$

は同型である。

この予想はヴォエヴォドスキー [Vo11] によって証明され、その中では実際に $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論が用いられている。

上に述べたのはモチヴィックな動機であり、かつ安定ホモトピー論的手法が求められている。一方で、モチヴィックでない動機も存在し、またそこでは非安定的手法が活躍する。例えば、以下の予想に対する応用である。

Conjecture 2.2 (フリードランダー-ミルナー予想). G を複素 Lie 群、 l を素数とする。また G^δ を G に対応する離散群とする。このとき、恒等写像の与える位相群の準同型 $G^\delta \rightarrow G$ は、分類空間のコホモロジーの同型

$$H^*(BG, \mathbb{Z}/l) \cong H^*(BG^\delta, \mathbb{Z}/l)$$

を与える。ただし BG は G の位相群としての構造を保った状態で構成された分類空間である。

ブロック-加藤予想とは異なり、こちらの一般的な場合は証明されていない。しかしモレルは [Mo10] においてこの予想と非安定 $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論とを関連付け、特殊な場合の証明に成功した。

上に挙げた二つの動機は、それぞれ $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論の基礎付けを行った二人によるものである。しかしこれら以外にも様々な応用がある。例えばアソック [As12] は双有利不変量の研究に応用をしているし、ナヴァロ-ナヴァロ [NN17] は安定 $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論を使ってグロタンディーク-リーマン-ロッホの定理の一般化を行っている。このように、 $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論は幅広い応用を持つ分野であると言える。

3 非安定 $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論と $\mathbb{A}^1$ ホモロジー

理論の内容の紹介に移ろう。体 k 上の非安定 $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論で扱うのは k 上滑らかな代数多様体、あるいは一般に k -space と呼ばれるものである。 k -space の定義はここでは述べないが、これらは k 上滑らかなスキームの成す圏 $\mathcal{S}m_k$ 上で定義された、ニスネヴィッチ位相と呼ばれるグロタンディーク位相に関する（単体的集合の）層である。 $\mathcal{S}m_k$ の各対象（ k 上滑らかな代数多様体の有限直和に等しい）は、米田埋め込みによって自然に k -space と見なすことができる。つまり、 k -space は滑らかな代数多様体の一つの一般化となっている。 k -space のなす圏を $\mathcal{S}pc_k$ と書こう。これは $\mathcal{S}m_k$ を充満部分圏に持つ。

なぜ代数多様体のみならず、一般の k -space を扱わなくてはならないのか？それは、ホモトピー論と言うからには「モデル圏」を考えたいからである。モデル圏とはある種の上部構造を持った圏であり、「公理化されたホモトピー論」とでも呼ぶべき対象である。モデル圏においては、同型の他に「弱同値」と呼ばれる種類の射が存在する。これらは丁度ホモトピー同値写像（あるいはホモトピー弱同

値写像)のような役割を果たす。 $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論の話に戻ると、 $\mathcal{S}m_k$ は圏としての性質が良くないので適切なモデル圏の構造 (モデル構造という) を与えることができない。しかし $\mathcal{S}pc_k$ ではそれが可能となる。これが先に述べた疑問の回答である。そして $\mathcal{S}pc_k$ に与えられるそのモデル構造こそ、「 $\mathbb{A}^1$ を潰す写像が弱同値となる」という条件を反映させたものとなる。このモデル構造の下での弱同値を、 $\mathbb{A}^1$ 弱同値と呼ぶ。

通常のホモトピー論において最も基本的なホモトピー不変量として、ホモトピー群とホモロジー群が挙げられる。同様に、 $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論でもこれらの類似物として「 $\mathbb{A}^1$ ホモトピー層」と「 $\mathbb{A}^1$ ホモロジー層」がある。これらは $\mathcal{S}m_k$ 上の層である。なぜ群ではなく層なのかというと、上で述べたように、取り扱う空間が集合ではなく層だからである。故にこれらは通常のホモトピー群やホモロジー群よりもはるかに複雑な構造を持っており、その計算は極めて困難である。 $\mathbb{A}^n$ のような自明な例を除けば、全ての次数の $\mathbb{A}^1$ ホモロジー層が計算されている代数多様体の例は ($\mathbb{P}^n$ のような基本的なものですら) 今のところ存在しないと思われる。しかし全く何の手掛かりもないかというとそうでもなく、例えば被覆空間の理論の $\mathbb{A}^1$ バージョンが存在し、それを用いて $\mathbb{P}^n$ の $\mathbb{A}^1$ 基本群 (群ではなく層だが) の計算がなされている ([Mo12] を見よ)。また [AM11] では完備非特異多様体は決して $\mathbb{A}^1$ 単連結 (つまり $\mathbb{A}^1$ 基本群が一点に対応する定数層) にはならないことが示されている。これは $\mathbb{A}^1$ 基本群がピカル群の情報を含んでおり、かつ完備非特異多様体のピカル群が常に非自明であることより従う。

(通常の) 非安定ホモトピー論における基本的な定理として、フレヴィッツの定理がある。これはホモトピー群とホモロジー群の同型を与える定理だが、その $\mathbb{A}^1$ バージョンは [Mo12] で証明されている。これを紹介しよう。 k -space $\mathcal{X}$ の $\mathbb{A}^1$ ホモトピー層、 $\mathbb{A}^1$ ホモロジー層をそれぞれ $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$, $\mathbf{H}_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ と書く。 $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ は集合の層、 $\pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ は群の層、 $\mathbf{H}_i^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ 及び $i \geq 2$ に対する $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$ はアーベル群の層である。次数 ≥ 2 の部分に関してのステートメントは以下のようなものである。

Theorem 3.1 ([Mo12]). k は完全と仮定する。各 $n \geq 2$ に対しフレヴィッツ射と呼ばれる群の層の射

$$H : \pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{H}_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X})$$

が存在し、 $\mathcal{X}$ が $\mathbb{A}^1$ -($n-1$)-connected (すなわち任意の $0 \leq i \leq n-1$ に対して $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) = 0$) となるとき、 H は同型である。

次数 1 の場合も存在するが、こちらは単純に同型を与える定理とはならない (詳細は [Mo12] を見よ)。

またもう一つの重要な非安定ホモトピー論の定理として、ホワイトヘッドの定理がある。これには二種類、すなわちホモトピー群に関するものとホモロジーに関するものがある。どちらも、ある種の空間の間の連続写像がホモトピー同値であることと全ての次数のホモトピー群、またはホモロジー群に同型を与えることが同値である、というものであった。これらのうち、 $\mathbb{A}^1$ ホモトピー層に関するホワイトヘッドの定理は [MV99] で与えられている。すなわち以下が言える。

Theorem 3.2 ([MV99]). k -space の間の射 $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ が $\mathbb{A}^1$ 弱同値となるのは、任意の $n \geq 0$ に対して

$$f_* : \pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \rightarrow \pi_n^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$$

が同型となるとき、またその時に限る。

4 相対 $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論とその応用（講演者による研究）

通常ホモトピー論においては、ホモトピー群やホモロジー群は相対的なものを考えることが普通である。とくにその応用の一つとして、ホモロジーに関するホワイトヘッドの定理がある。これは相対版のフレヴィッツの定理を用いることで示される。本研究では相対 $\mathbb{A}^1$ ホモトピー論を導入し、また相対版の $\mathbb{A}^1$ フレヴィッツの定理を経由することで、 $\mathbb{A}^1$ ホモロジーに関するホワイトヘッドの定理を与える。そのステートメントは以下となる。

Theorem 4.1 ([Sh19]). k は完全と仮定する。 $f: X \rightarrow Y$ を $\mathcal{S}m_k$ の射、 X と Y は $\mathbb{A}^1$ 単連結とする。また

$$d = \max\{\dim \mathcal{X} + 1, \dim \mathcal{Y}\}$$

と定める。このとき、任意の $d > i \geq 0$ に対して

$$\mathbf{H}_i^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{H}_i^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$$

が同型かつ

$$\mathbf{H}_d^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbf{H}_d^{\mathbb{A}^1}(\mathcal{Y})$$

が層の全射であるとき、 f は $\mathbb{A}^1$ 弱同値となる。

通常のホワイトヘッドの定理と異なりホモロジーの次数に関する制限が加えられているが、これはチェックすべき次数 i の個数は高々有限であるということを行っている。通常の CW 複体のホモロジーの場合とは違い、次元よりも大きい次数における $\mathbb{A}^1$ ホモロジーの消滅が未解決問題となっていることよりこのような制限が意味を持つ。なお一般の k -space に対するバージョンも成り立ち、そこらでは次数の制限が存在しない。

次に $\mathbb{A}^1$ ホモロジーに関する切除定理を紹介する。ここで言う切除定理とはアイレンバーグ-スティーンロッド公理系に含まれているタイプのようなものではなく、「十分小さな閉集合を取り除いても低次のホモロジーは変化しない」というタイプのものである。具体的には以下である。

Theorem 4.2 ([Sh19]). $X \in \mathcal{S}m_k$ 、 $U \subseteq X$ を開集合とする。 $X - U$ の X における余次元を r としたとき、導かれる層の射

$$\mathbf{H}_i^{\mathbb{A}^1}(U) \rightarrow \mathbf{H}_i^{\mathbb{A}^1}(X)$$

は $i < r - 1$ で同型、 $i = r - 1$ で全射となる。

上記二つの定理の定理のステートメントには、相対 $\mathbb{A}^1$ ホモトピーや相対 $\mathbb{A}^1$ ホモロジーの言葉は直接には表れていない。しかしその証明においては本質的に用いられている。また Theorem 4.1 の $\mathbb{A}^1$ ホモロジーに対する条件は射 f に関する相対 $\mathbb{A}^1$ ホモロジー $\mathbf{H}_n^{\mathbb{A}^1}(f)$ を用いて、任意の $d \geq i \geq 0$ に対し

$$\mathbf{H}_i^{\mathbb{A}^1}(f) = 0$$

と書けるし、Theorem 4.2 の主張も任意の $i \leq r - 1$ に対し

$$\mathbf{H}_i^{\mathbb{A}^1}(X, U) = 0$$

と言い換えられる。

最後に、対 $(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{n-1})$ の相対 $\mathbb{A}^1$ ホモロジーの具体的計算結果を紹介する。ただし $\mathbb{P}^{n-1}$ は超平面埋め込みによって $\mathbb{P}^n$ の閉部分スキームと考えている。その結果は以下である。

Theorem 4.3 ([Sh19]). k は完全と仮定する。このとき、任意の $n \geq 1, i \leq n$ に対し

$$\mathbf{H}_i^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{n-1}) \cong \begin{cases} \underline{\mathbf{K}}_n^{MW} & (i = n) \\ 0 & (i < n) \end{cases}$$

となる。ただし $\underline{\mathbf{K}}_n^{MW}$ は unramified Milnor-Witt K-theory ([Mo12]) である。

References

- [As12] A. Asok, *Birational invariants and $\mathbb{A}^1$ -connectedness*, J. Reine Angew. Math., **681** (2012) 39-64.
- [AM11] A. Asok and F. Morel, *Smooth varieties up to $\mathbb{A}^1$ -homotopy and algebraic h -cobordisms*, Adv. Math. **227**(5) (2011) 1990-2058.
- [Mo05] F. Morel, *The stable $\mathbb{A}^1$ -connectivity theorems*, K-theory, **35**(1-2) (2005) 1-68.
- [Mo10] F. Morel, *On the Friedlander-Milnor conjecture for groups of small rank*, Current developments in mathematics, 2010, 45–93, Int. Press, Somerville, MA (2011).
- [Mo12] F. Morel, *$\mathbb{A}^1$ -algebraic topology over a field*, Lecture Notes in Math., **2052**, Springer, Heidelberg (2012).
- [MV99] F. Morel and V. Voevodsky, *$\mathbb{A}^1$ -homotopy theory of schemes*, Publ. Math. IHES, **90** (1999) 45-143.
- [NN17] A. Navarro and J. Navarro *On the Riemann-Roch formula without projective assumptions*, preprint available at <https://arxiv.org/abs/1705.10769> (2017).
- [Sh19] Y. Shimizu, *Relative $\mathbb{A}^1$ -homology and its applications*, preprint available at <https://arxiv.org/abs/1904.08644> (2019).
- [Vo98] V. Voevodsky, *$\mathbb{A}^1$ -homotopy theory*, Proc. ICM, Vol. I (Berlin 1998), Doc. Math., **Extra vol. I** (1998), 579-604.
- [Vo11] V. Voevodsky, *On motivic cohomology with $\mathbb{Z}/l$ -coefficients*, Ann. of Math., **174**(1) (2011), 401-438.