

ある物理の問題に現れる、係数が分岐点をもつ2階線型常微分方程式の完全WKB解析について

紫垣 孝洋 (Takahiro SHIGAKI)

神戸大学大学院 理学研究科数学専攻 博士課程後期課程3年

1 元の問題と、複素解析的な捉え方

中間子 (meson) は陽子・中性子の結合に関わる粒子であり、杉本茂樹氏 (東京大・IPMU) や酒井忠勝氏 (名古屋大) は中間子の質量に関する研究をしている。彼らの数理モデルでは、中間子の質量は次の微分方程式の固有値として現れる。

$$\psi''(z) + \frac{2z}{1+z^2}\psi'(z) + \frac{\lambda}{(1+z^2)^{4/3}}\psi(z) = 0 \quad (1.1)$$

ただし、境界条件として

$$\psi(z) \sim O(z^{-1}) \quad (z \rightarrow \pm\infty). \quad (1.2)$$

を課す。(一般には leading term の order は $O(z^0)$ か $O(z^{-1})$ であることが確かめられる。)

固有関数 $\psi(z) = \psi_n(z)$ や固有値 $\lambda = \lambda_n$ ($0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$) は上の条件から決まる。この固有値は中間子の質量の2乗と比例する。([1]§3, §4 および [2]§7.4) また論文 [1], [2] では $n = 1, 2, 3$ について、 $\lambda_1 \sim 0.669$, $\lambda_2 \sim 1.57$, $\lambda_3 \sim 2.87$ と数値計算によって固有値を求めている。

さて元の問題では z は実変数だったが、これを複素変数に拡張して問題を捉え直してみる。すると、以下のように $z = \infty$ 近傍で収束する級数解を構成できる。(この二つのうち、 $\psi_1(z)$ が固有値 λ に対する (1.1) の固有関数と関係する。)

命題 1.1 ($z = \infty$ での級数解) もとの方程式 (1.1) は次のような ∞ 近傍で収束するべき級数解をもつ。

$$\psi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{0,n} z^{-2n/3}, \quad \psi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{1,n} z^{-1-2n/3}. \quad (1.3)$$

初項は $\psi_{0,0} = 1$ 、また $\psi_{1,0} = 1$ とする。 $n \geq 1$ のとき、 $\psi_{0,n}, \psi_{1,n}$ は次の漸化式で決まる。

$$\psi_{0,n} = \frac{1}{2n(2n-3)} \left\{ \sum_{\substack{3m+l=n, \\ m \geq 1, \\ 0 \leq l \leq n-1}} (-1)^m 12l \psi_{0,l} - 9\lambda \sum_{\substack{3m+l=n-1, \\ m, l \geq 0}} \binom{4/3}{m} \psi_{0,l} \right\}, \quad (1.4)$$

$$\psi_{1,n} = \frac{1}{2n(2n+3)} \left\{ \sum_{3m+l=n, \ m \geq 1, \ 0 \leq l \leq n-1} (-1)^m 6(2l+3) \psi_{1,l} - 9\lambda \sum_{3m+l=n-1, \ m, l \geq 0} \binom{4/3}{m} \psi_{1,l} \right\}. \quad (1.5)$$

収束級数解 $\psi_1(z)$ が正の無限大だけでなく負の無限大でも $O(z^{-1})$ と振る舞うには、 $\psi_1(z)$ を正の無限大から負の無限大へと実軸に沿って解析接続させたとき、 $\psi_1(z)$ の定数倍となることが必要十分条件である。(つまり $\psi_1(z)$ の解析接続が $c_0\psi_0(z) + c_1\psi_1(z)$ となると、 $c_0 = 0$ となることが必要十分条件である。) このように元の問題における境界条件は、複素解析的には接続係数の条件として書くことができる。しかし、この方程式の接続公式は一般には知られていないため、このままでは λ が満たす条件式を書くことができない。そこでパラメータを導入した上で、完全 WKB 解析の接続公式を用いて接続係数の条件を書くことを試みたい。

2 パラメータの導入と問題設定

方程式 (1.1) の 1 階項を消去するため、未知関数を

$$\psi(z) \left[= \varphi(z) \exp \left(-\frac{1}{2} \int^z \frac{2z'}{1+z'^2} dz' \right) \right] = (1+z^2)^{-1/2} \varphi(z) \quad (2.1)$$

のように変換すると、次を得る。

$$\varphi''(z) - Q(z)\varphi(z) = 0, \quad Q(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} - \frac{\lambda}{(1+z^2)^{4/3}}. \quad (2.2)$$

ここで parameter η を導入するため、 $Q(z)$ を $\eta^2 Q(z)$ と置き換え、 $\lambda = 1 + \eta^{-1} \tilde{\lambda}$ とおくと、次のようになる。

$$\varphi''(z) - \eta^2(Q_0(z) + \eta^{-1}Q_1(z))\varphi(z) = 0, \quad (2.3)$$

$$Q_0(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} - \frac{1}{(1+z^2)^{4/3}}, \quad Q_1(z) = \frac{-\tilde{\lambda}}{(1+z^2)^{4/3}}.$$

この方程式の固有値や固有関数を完全 WKB 解析によって考えていくのだが、係数の $Q_0(z)$ が $z = \pm i$ に分岐点をもつ多価関数となるため、このままの形では扱いにくい。そこでさらに変数を $s = (1+z^2)^{-1/3}$ と変換し、1 階項を消去した以下の形で考えていく。

$$\begin{aligned} \psi''(s) - \eta^2(q_0(s) + \eta^{-1}q_1(s) + \eta^{-2}q_2(s))\psi(s) &= 0, \\ q_0(s) &= \frac{9(s^2-1)}{4s(1-s^3)}, \quad q_1(s) = \frac{-9\tilde{\lambda}}{4s(1-s^3)}, \quad q_2(s) = \frac{5-64s^3+32s^6}{16s^2(1-s^3)^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

この方程式 (2.4) について、

- (i) WKB 解を構成し、 z 変数における実軸に対応する経路に沿った解析接続がどうなるかを調べる
- (ii) 命題 1.1 で構成した級数解に対応する (2.4) の級数解と、(i) で構成した WKB 解とを関係づけることにより、(2.4) の級数解の解析接続を得る
- (iii) 片方の接続係数がゼロになることから、 $\tilde{\lambda}$ が満たすべき条件式を導出する

という 3 つのステップにより完全 WKB 解析の接続公式から固有値の条件式が導かれると期待される。本発表で主に触れる (i) についての結果を述べるため、WKB 解や Stokes 曲線といった WKB 解析における用語の説明を次の章で行う。

3 WKB 解と Stokes 曲線

方程式 (2.4) の解を $\psi(s, \eta) = \exp\left(\int^s S(s', \eta) ds'\right)$ とおくと、 $S(s, \eta) = \sum_{m=-1}^{\infty} \eta^{-m} S_m(s) = \eta S_{-1}(s) + S_0(s) + \dots$ は次の Riccati 方程式を満たすことがわかる。

$$S(s, \eta)^2 + S'(s, \eta) = \eta^2(q_0(s) + \eta^{-1}q_1(s) + \eta^{-2}q_2(s)).$$

ただし $S(s, \eta)$ は $S_{-1}(s) = \pm\sqrt{q_0(s)}$ から帰納的に一意に定まる。 $S_{-1}(s) = \pm\sqrt{q_0(s)}$ から決まる $S(s, \eta)$ を $S^{(\pm)}(s, \eta)$ と書く。

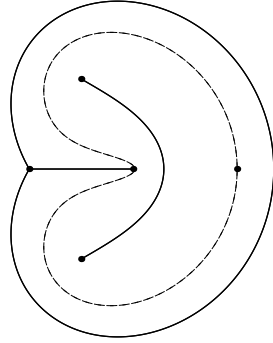
(2.4) の **WKB 解** は以下で定義される。

$$\psi_{\pm}(s, \eta) = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}(s, \eta)}} \exp \int_{s_0}^s \pm S_{\text{odd}}(s', \eta) ds'. \quad (3.1)$$

ただし $S_{\text{odd}}(s, \eta) := (S^{(+)}(s, \eta) - S^{(-)}(s, \eta))/2$ とした。

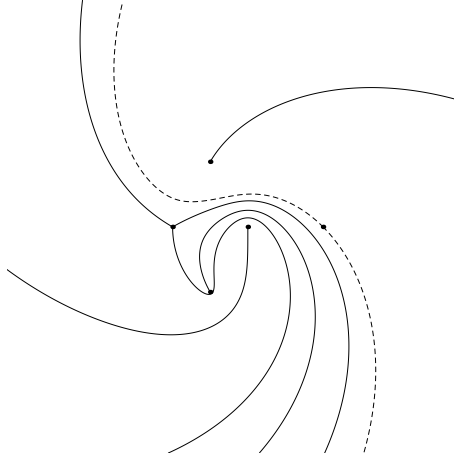
また **Stokes 曲線** は $\text{Im} \int_a^s \sqrt{q_0(s')} ds' = 0$ で定義され、Stokes 曲線に囲まれた領域を **Stokes 領域** という。ここで積分の端点 a は q_0 の零点 (変わり点) または q_0 の 1 位の極である。さらに、 q_0 の正則な点であっても q_1, q_2 の極であれば積分の端点となる (このような点は ghost point と呼ばれる)。

$q_j \equiv 0 (j = 1, 2)$ かつ q_0 が有理関数のときは、WKB 解が Stokes 領域で Borel 総和可能である (解析的に意味づけできる) ことや、隣接する Stokes 領域における Borel 和どうしの関係式 (接続公式) が知られている。この意味で Stokes 曲線は重要な役割を果たす。



上の図は $\arg \eta = 0$ のときの Stokes 曲線である。一般に 1 位の変わり点からは Stokes 曲線が 3 本、1 位の極からは 1 本、ghost point からは 2 本出ることが知られている。1 位の変わり点 -1 から出る 3 本の曲線のうち 2 本はつながって閉曲線となり、残りの 1 本は単純極である原点へ流れ込んでいる。1 位の極 $w (= e^{2\pi i/3})$ と 1 位の極 w^2 どうしも Stokes 曲線で結ばれ、ghost point である 1 から出る 2 本の曲線もつながって閉曲線となっている。

このように $\arg \eta = 0$ の場合は積分の端点どうしが Stokes 曲線で結ばれているため、このままでは接続公式を用いることができない。そこで $\arg \eta$ を動かし、特に $\arg \eta = -\pi/4$ の場合を考えることにする。 $\arg \eta = \theta$ の場合は、Stokes 曲線の定義は $\text{Im} e^{i\theta} \int_a^s \sqrt{Q_0(s')} ds' = 0$ となる。



上の図が $\arg \eta = -\pi/4$ のときの Stokes 曲線である。積分の端点どうしが Stokes 曲線によって結ばれる状態にはならず、すべての曲線は $q_0(s)$ の 2 位の極である無限遠点へと流れ込んでいる。

ここで z 平面における実軸は、 s 平面では原点から出発して $s = 1$ の周りを正方向に回り再び原点に戻る経路 γ となる。WKB 解析で知られている隣接する Stokes 領域における接続公式を利用することで、(2.4) の WKB 解の γ に沿った解析接続を求めることができる。これらの接続公式と、それを用いて得られた結果について次の章で述べる。

4 接続公式

一般に、方程式

$$\psi''(s) - \eta^2(q_0(s) + \eta^{-1}q_1(s) + \eta^{-2}q_2(s))\psi(s) = 0, \quad (4.1)$$

の WKB 解

$$\psi_{\pm}(s, \eta) = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}(s, \eta)}} \exp \int_{s_0}^s \pm S_{\text{odd}}(s', \eta) ds'. \quad (4.2)$$

の隣接する Stokes 領域での接続公式は以下のように記述される。

定理 4.1 ([3], Theorem 2.23: 1 位の零点が始点となる曲線の場合) $q_j(s) \equiv 0 (j = 1, 2)$ とする。 Γ は単純変わり点 $s = a$ を始点とする。 U_1 と U_2 は Stokes 領域で、Stokes 曲線 Γ を共通の境界として隣り合っているとする。それぞれの領域 U_j における (4.1) の WKB 解 ($s_0 = a$) を $\psi_{\pm}^j (j = 1, 2)$ と書くと、 $\psi_{\pm}^1$ は U_2 へ解析接続でき、次の公式を満たす。

$$\text{If } \operatorname{Re} \int_a^s \sqrt{q_0(s')} ds' < 0 \text{ on } \Gamma, \psi_+^1 = \psi_+^2, \psi_-^1 = \psi_-^2 \pm i\psi_+^2, \quad (4.3)$$

$$\text{If } \operatorname{Re} \int_a^s \sqrt{q_0(s')} ds' > 0 \text{ on } \Gamma, \psi_+^1 = \psi_+^2 \pm i\psi_-^2, \psi_-^1 = \psi_-^2. \quad (4.4)$$

符号 $\pm$ は、 U_1 から U_2 への解析接続の経路が Γ と ($s = a$ から見て) 時計回りに交わっているか反時計回りに交わっているかに対応している。反時計回りの場合は符号は $+$ である。

同様の議論によって、Theorem 2 は一般の q_1, q_2 に対しても成り立つことが示される。接続公式 (4.3) や (4.4) は $\psi_+ \mapsto \psi_+$, $\psi_- \mapsto \psi_- \pm i\psi_+$ や $\psi_+ \mapsto \psi_+ \pm i\psi_-$, $\psi_- \mapsto \psi_-$ と表されることが多いので、以下でもこの記号を用いる。

定理 4.2 ([4], Theorem 1: 始点が 1 位の極の場合) 方程式 (4.1) に対し、 $q_0(s) = \tilde{q}_0(s)/(s-a)$, $q_1(s) = \tilde{q}_1(s)/(s-a)$ および $q_2(s) = \tilde{q}_2(s)/(s-a)^2$ とする。ここで $\tilde{q}_j(s)$ ($j = 0, 1, 2$) は $s = a$ の近傍のある領域 $U \subset \mathbb{C}$ で正則な関数で、さらに $\tilde{q}_j(a) \neq 0$ ($j = 0, 1, 2$) とする。

Stokes 曲線 $\text{Im} \int_a^s \sqrt{\tilde{q}_0(s')/(s'-a)} ds' = 0$ を Γ で表す。このとき、 Γ と解析接続の経路が ($s = a$ から見て) 反時計回りに交わるとき、(4.1) の WKB 解 ($s_0 = a$) の Borel 和は以下を満たす：

$\text{Re} \int_a^s \sqrt{\tilde{q}_0(s')/(s'-a)} ds' > 0$ が Γ 上で成り立つとき

$$\psi_+ \mapsto \psi_+ + 2i \cos \left(\pi \sqrt{1 + 4\tilde{q}_2(a)} \right) \psi_-, \quad \psi_- \mapsto \psi_- \quad (4.5)$$

$\text{Re} \int_a^s \sqrt{\tilde{q}_0(s')/(s'-a)} ds' < 0$ が Γ 上で成り立つとき

$$\psi_+ \mapsto \psi_+, \quad \psi_- \mapsto \psi_- + 2i \cos \left(\pi \sqrt{1 + 4\tilde{q}_2(a)} \right) \psi_+ \quad (4.6)$$

ghost point から出る曲線については次の公式が成り立つ。([5], Section 4)

方程式 (4.1) に対して、 $q_0(s) = \tilde{q}_0(s)$, $q_1(s) = \tilde{q}_1(s)/(s-a)$, $q_2(s) = \tilde{q}_2(s)/(s-a)^2$ とする。ここで $\tilde{q}_j(s)$ ($j = 0, 1, 2$) は $s = a$ の近傍 $U \subset \mathbb{C}$ で正則で、 $\tilde{q}_j(a) \neq 0$ ($j = 0, 1, 2$) を満たすとする。さらに $\text{Res}_{s=a} S_{\text{odd}}(s, \eta) \in \mathbb{C}$ とする。Stokes 曲線 $\text{Im} \int_a^s \sqrt{\tilde{q}_0(s')} ds' = 0$ を Γ と書く。 $\psi_{\pm}$ を以下のように正規化した WKB 解とする。

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(s, \eta) &= \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}(s, \eta)}} \exp \left(\pm \eta \int_a^s \sqrt{\tilde{q}_0(s')} ds' \right) \\ &\quad \times \exp \int_{s_0}^s \pm \left(S_{\text{odd}}(s', \eta) - \eta \sqrt{\tilde{q}_0(s')} \right) ds' \end{aligned} \quad (4.7)$$

ここで $s_0 \in U \setminus \{a\}$ は固定された点とする。

Γ と解析接続の経路が ($s = a$ から見て) 反時計回りに交わっているとき、次が成り立つ。

Γ 上で $\text{Re} \int_a^s \sqrt{\tilde{q}_0(s')} ds' > 0$ のとき

$$\psi_+ \mapsto \psi_+ + \frac{2i\pi}{\Gamma(\kappa + \mu + 1/2)\Gamma(\kappa - \mu + 1/2)} \frac{C_+}{C_-} \eta^{2\kappa} \psi_-, \quad \psi_- \mapsto \psi_- \quad (4.8)$$

Γ 上で $\text{Re} \int_a^s \sqrt{\tilde{q}_0(s')} ds' < 0$ のとき

$$\psi_+ \mapsto \psi_+, \quad \psi_- \mapsto \psi_- + \frac{2i\pi e^{-2\pi i \kappa}}{\Gamma(-\kappa + \mu + 1/2)\Gamma(-\kappa - \mu + 1/2)} \frac{C_-}{C_+} \eta^{-2\kappa} \psi_+ \quad (4.9)$$

ここで $\kappa = -\text{Res}_{s=a} S_{\text{odd}}(s, \eta)$, $\mu = \sqrt{1/2 + \tilde{q}_2(a)}$ である。また $C_{\pm}$ は η^{-1} のべき級数で、 $\tilde{s} = \tilde{s}(s, \eta)$ という $q_0 + \eta^{-1}q_1 + \eta^{-2}q_2 = (1/4) - \eta^{-1}(\kappa/\tilde{s}) + (\tilde{q}_2(a)/\tilde{s}^2)$ による (4.1) から標準形への変換で決まる。つまり $C_{\pm}$ は関係式 $\psi_{\pm}(s, \eta) = C_{\pm}(\partial \tilde{s}(s, \eta)/\partial s) \psi_{\pm}^{(\text{can})}(\tilde{s}(s, \eta), \eta)$ によって決まる。ここで $\psi_{\pm}^{(\text{can})}$ は標準形 ($q_0 = 1/4, q_1 = \kappa/\tilde{s}, q_2 = \tilde{q}_2(a)/\tilde{s}^2$) の WKB 解である。

これら 3 つの公式を我々の方程式 (2.4) に用いて、前の章で述べた γ に沿った WKB 解の解析接続を考えると、以下のような接続公式が得られる。

命題 4.3 (WKB 解の接続公式：ステップ (i) の結果) 方程式 (2.4) の $s_0 = 0$ として正規化した WKB 解 (3.1) $\psi_{\pm}(s, \eta)$ に対して、その γ に沿った解析接続は η が大きいとき漸近的に以下のように表される。

$$\begin{aligned} \psi_+ \mapsto & \left[2iM_- \exp \left(2 \int_0^{-1} S_{\text{odd}}(s', \eta) ds' \right) \exp \left(2 \int_1^0 \sqrt{q_0(s')} ds' \right) \right. \\ & - \left\{ M_+ \exp \left(-2\eta \int_1^0 \sqrt{q_0(s')} ds' \right) + 2i \exp \left(2 \int_0^{-1} S_{\text{odd}}(s', \eta) ds' \right) \right\} \\ & \times 2i \exp \left(-2 \int_0^{-1} S_{\text{odd}}(s', \eta) ds' \right) + M_+ M_- + 1 \Big] \psi_+ \\ & + \left[M_+ \exp \left(-2\eta \int_1^0 \sqrt{q_0(s')} ds' \right) + 2i \exp \left(2 \int_0^{-1} S_{\text{odd}}(s', \eta) ds' \right) \right] \psi_-, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \psi_- \mapsto & M_- \exp \left(2 \int_1^0 \sqrt{q_0(s')} ds' \right) \psi_+ \\ & + \left[1 - 2iM_- \exp \left(2 \int_0^{-1} S_{\text{odd}}(s', \eta) ds' \right) \exp \left(2 \int_1^0 \sqrt{q_0(s')} ds' \right) \right] \psi_-. \end{aligned} \quad (4.11)$$

ただし

$$\begin{aligned} M_+ &= \frac{2i\pi}{\Gamma(\kappa + \mu + 1/2)\Gamma(\kappa - \mu + 1/2)} \frac{C_+}{C_-} \eta^{2\kappa}, \\ M_- &= \frac{2i\pi e^{-2\pi i\kappa}}{\Gamma(-\kappa + \mu + 1/2)\Gamma(-\kappa - \mu + 1/2)} \frac{C_-}{C_+} \eta^{-2\kappa} \end{aligned}$$

で、 $\kappa = (\sqrt{6}i/8)\tilde{\lambda}$, $\mu = \sqrt{5}/4$ とする。また $C_{\pm}$ は ghost point の場合の接続公式で述べた標準形への変換に現れる級数 $C_{\pm} = C_{\pm,0} + \eta^{-1}C_{\pm,1} + \dots$ で、その最初の項は

$$C_{\pm,0} = \left(2 \int_1^0 \sqrt{q_0(s')} ds' \right)^{\mp(\sqrt{6}i/8)\tilde{\lambda}} \exp \left(\mp \eta \int_1^0 \sqrt{q_0(s')} ds' \right)$$

と表される。

発表では上の命題についての説明を行い、時間が許せばステップ (ii)(iii) についても触れたい。

参考文献

- [1] T. Sakai, S. Sugimoto: Low energy hadron physics in holographic QCD, Prog. Theor. Phys, **113**, 843-882 (2005) [arXiv: hep-th/0412141]
- [2] 杉本茂樹: 超弦理論によるハドロンの記述, 第 10 回 岡シンポジウム (講演) (2011) http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~shigeki.sugimoto/Oka_Sympo_v4.pdf
- [3] T. Kawai and Y. Takei: Algebraic Analysis of Singular Perturbation Theory. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 227, Amer. Math. Soc. (2005).
- [4] T. Koike, On a connection problem of simple pole type operators of second order in exact WKB analysis, RIMS-Kôkyûroku **1433** (2005) 9-26.
- [5] T. Koike: On “new” turning points associated with regular singular points in the exact WKB analysis, RIMS-Kôkyûroku, **1159**(2000),100-110.