双曲空間上の統計構造とその部分多様体

佐藤 直飛 (Naoto SATOH)*
北海道大学 大学院理学院 数学専攻

概要

統計多様体とはパラメータ付けられた確率分布族の幾何構造を一般化したものである。正規分布族はポアンカレの上半平面上の統計多様体とみなせるため、双曲空間上の統計構造の研究は重要である。正規分布族や多項分布族といった有名な分布族は双対平坦構造をもつ統計多様体であり、その一般化として定曲率な統計多様体の研究が展開されているが、統計断面曲率を用いることにより、より一般的なクラスである統計断面曲率一定な統計多様体の研究が可能となる。本稿では、統計断面曲率の定義や性質について概説し、統計断面曲率双曲空間上の統計断面曲率一定な統計構造の構成について述べる。更に、標準的ワープ積統計構造をもつ双曲空間や二重全臍的及び二重自己平行な部分多様体の特徴付けについて紹介する。

1 統計多様体

本稿では、 M を 2 次元以上のなめらかな多様体とし、対象はすべてなめらかであるとする。 $\Gamma(E)$ でベクトル束 $E \rightarrow M$ の切断の全体を表す。 ∇ を M 上の捩れの無いアファイン接続、 $g \in \Gamma(TM^{(0,2)})$ を M 上のリーマン計量とする。さらに、 X, Y, Z などはベクトル場を表すとし、混同の恐れのない時は、任意の X に対して、などと明記しない。

定義 1.1 (M, ∇, g) が統計多様体であるとは、コダッチ方程式

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = (\nabla_Y g)(X, Z)$$

が任意の $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ に対して成り立つときをいう。このとき、 (∇, g) を M 上の統計構造という。

注意 1.2 (i) 統計多様体 (M, ∇, g) に対して、

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_Y^* Z) \quad (1)$$

が任意の $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ に対して成り立つように ∇^* を定めると、 (∇^*, g) も M 上の統計構造となり、 ∇^* を g に関する ∇ の双対接続という。

(ii) 多様体 M 上のアファイン接続としてリーマン計量 g から一意的に定まるレヴィ・チビタ接続 ∇^g を選ぶと、 ∇^g は捩れがなく g に計量的なアファイン接続であるから、 (∇^g, g) は M 上の自明な統計構造となる。リーマン幾何学ではレヴィ・チビタ接続以外の接続を考えることは殆どなかったが、統計多様体の幾何学ではコダッチ方程式を満たす制約のもとで、レヴィ・チビタ接続以外のアファイン接続が主役となる。

(iii) リーマン計量 g のレヴィ・チビタ接続を ∇^g とするとき、 $\nabla^g = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^*)$ が成り立つ。

* This research was supported by Global Station for Big Data and CyberSecurity, a project of Global Institution for Collaborative Research and Education at Hokkaido University.

(iv) 統計構造 (∇, g) に対して, $K := \nabla - \nabla^g$ とおくと, $K \in \Gamma(TM^{(1,2)})$ は

$$K(X, Y) = K(Y, X), \quad g(K(X, Y), Z) = g(X, K(Y, Z)) \quad (2)$$

を満たす. 逆に, リーマン計量 g に対して, 与えられた $K \in \Gamma(TM^{(1,2)})$ が (2) を満たすとき, $(\nabla := \nabla^g + K, g)$ は M 上の統計構造となる.

統計多様体は以下に述べる統計モデルの幾何構造を一般化したものである.

例 1.3 Ω を高々可算集合または $\mathbb{R}^k$ とする. Ω 上の確率分布関数または密度関数の族を考える. $\mathbb{R}^n$ の開集合 Ξ に対して,

$$S := \left\{ p(x; \xi) \mid \int_{\Omega} p(x; \xi) dx = 1, p(x; \xi) > 0, \xi \in \Xi \right\}$$

とおくと, S は $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \Xi$ をパラメータとする Ω 上の確率分布族であり, S を Ω 上の統計モデルという. S に対して,

$$\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad \varphi(p(x; \xi)) = \xi$$

とおき, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ を一つの局所座標系考え, S を n 次元多様体とみなす. このとき, 統計学から要請される Marcov 埋め込みに関する不変性の条件を課すことによって, S 上に次で定義されるフィッシャー情報計量 $g^F := [g_{ij}^F]$ と α -接続 $\nabla^{(\alpha)}$ が定まる:

$$g_{ij}^F(\xi) := E_p[(\partial_i l_\xi)(\partial_j l_\xi)] := \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} \log p(x; \xi) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi^j} \log p(x; \xi) \right) p(x; \xi) dx,$$

$$g(\nabla_X^{(\alpha)} Y, Z) := g(\nabla_X^F Y, Z) - \frac{\alpha}{2} E_p[(\partial_i l_\xi)(\partial_j l_\xi)(\partial_k l_\xi)] \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

ここで, $C_{ijk}^F(\xi) := E_p[(\partial_i l_\xi)(\partial_j l_\xi)(\partial_k l_\xi)]$ で定義される S 上の $(0, 3)$ 型テンソル場 C^F を **Amari-Chentsov** テンソル場という. このとき, $\nabla^{(\alpha)}$ と $\nabla^{(-\alpha)}$ は g^F に関して互いに双対な捩れないアファイン接続で, $(\nabla^{(\pm\alpha)}, g^F)$ は S 上の統計構造となる.

例 1.4 正規分布のなす統計モデル S_N を考える. 平均が μ , 分散が σ^2 の正規分布の密度関数は

$$p(x; \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

であるから, $\xi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mu$, $\xi^2 = \sigma$ とし, $\Xi = \{(\xi^1, \xi^2) \mid \xi^2 > 0\}$ とすると,

$$S_N := \left\{ p(x; \xi^1, \xi^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi^2} \exp \left[-\frac{(x - \sqrt{2}\xi^1)^2}{2(\xi^2)^2} \right] \mid (\xi^1, \xi^2) \in \Xi \right\}$$

となる. このとき, S_N のフィッシャー情報計量は

$$g^F = 2(\xi^2)^{-2} \sum_{i=1,2} (d\xi^i)^2$$

となるため, 正規分布族 S_N はポアンカレ上半平面 $\mathbb{H}^2$ 上の統計多様体とみなせる.

2 統計断面曲率

多様体 M 上のアフィン接続 ∇ に対して, ∇ に関する曲率テンソル R^∇ を

$$R^\nabla(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

と定義する. 更に, ∇ に関するリッチ曲率テンソル Ric^∇ とスカラー曲率 $\rho^{(\nabla, g)}$ を

$$\begin{aligned} \text{Ric}^\nabla(Y, Z) &:= \text{tr}\{X \mapsto R^\nabla(X, Y)Z\}, \\ \rho^{(\nabla, g)} &:= \text{tr}_g \text{Ric}^\nabla \end{aligned}$$

で定義する.

定義 2.1 多様体 M 上の統計構造 (∇, g) に対して, 統計曲率テンソル $S \in \Gamma(TM^{(1,3)})$ を

$$S(X, Y)Z := \frac{1}{2}\{R^\nabla(X, Y)Z + R^{\nabla^*}(X, Y)Z\}$$

で定義する. 更に, S のリッチ曲率テンソル L とスカラー曲率 ρ を

$$\begin{aligned} L(Y, Z) &:= \text{tr}\{X \mapsto S(X, Y)Z\}, \\ \rho &:= \text{tr}_g L \end{aligned}$$

で定義する.

注意 2.2 (i) 統計多様体 (M, ∇, g) のある点の近傍での統計構造は R^{∇^g} と K の値とそれらの ∇^g に沿った平行移動によって決定される ([8]) が, 統計曲率テンソル S は R^{∇^g} と K を用いて

$$S(X, Y)Z = R^{\nabla^g}(X, Y)Z + [K, K](X, Y)Z$$

と書き換えることができる. ここで, $[K, K](X, Y)Z = K(X, K(Y, Z)) - K(Y, K(X, Z))$ である.

(ii) スカラー曲率に関して, $\rho = \rho^{(\nabla, g)} = \rho^{(\nabla^*, g)}$ が成り立つ. 一方, 一般に $\rho \neq \rho^{(\nabla^g, g)}$ である.

定義 2.3 (i) リーマン計量 g に関して正規直交なベクトル場 $\{X, Y\}$ で張られる 2 次元断面を $\Pi := X \wedge Y$ と表す. このとき, Π に関する断面曲率 $\mathcal{K}^g(\Pi)$ と統計断面曲率 $\mathcal{K}(\Pi)$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^g(\Pi) &:= g(R^{\nabla^g}(X, Y)Y, X), \\ \mathcal{K}(\Pi) &:= g(S(X, Y)Y, X) \end{aligned}$$

で定義する.

(ii) 定数 $c \in \mathbb{R}$ に対して, (M, ∇, g) が ∇ に関して定曲率 c であるとは,

$$R^\nabla(X, Y)Z = c\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}$$

が成り立つときをいう. また, 任意の 2 次元断面に対して $\mathcal{K} = c$ となるとき, (M, ∇, g) を統計断面曲率一定 c であるといい, $M(c)$ と略記する.

注意 2.4 (i) 統計多様体 (M, ∇, g) が ∇ に関して定曲率 c であることと, ∇^* に関して定曲率 c であることは同値である.

(ii) (M, ∇, g) が定曲率 0 のとき、すなわちアフィン接続 ∇ が平坦であるとき、 (M, ∇, g) をヘッセ多様体という。このとき、 ∇^* も平坦であるから、ヘッセ多様体を双対平坦多様体ともいう。このとき、 $Q \in \Gamma(TM^{(1,3)})$ を $Q(X, Y)Z := -(\nabla_X K)(Y, Z)$ と定めヘッセ曲率テンソルという。任意の $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ に対して $Q(X, Y)Z = \frac{c}{2}\{g(X, Y)Z + g(X, Z)Y\}$ が成り立つとき、 (M, ∇, g) をヘッセ断面曲率一定 k であるという。このとき、 g は定曲率 $-\frac{c}{4}$ のリーマン計量となっている ([10])。

(iii) 統計多様体 (M, ∇, g) が統計断面曲率一定 c であるとき、

$$S(X, Y)Z = c\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}$$

が成り立つ。したがって、統計多様体が定曲率 c ならば、統計断面曲率一定 c である。

例 2.5 $(\mathbb{H}^m, g)$ を定曲率 $-\kappa$ ($\kappa > 0$) の m 次元双曲空間とする：

$$\mathbb{H}^m = \{x = (x^1, \dots, x^{m-1}, x^m) \in \mathbb{R}^m \mid x^m > 0\}, \quad g = (\kappa)^{-1}(x^m)^{-2} \sum_{j=1}^m (dx^j)^2.$$

このとき、 $K \in \Gamma(T\mathbb{H}^{m(1,2)})$ を次で定めると、 $(\mathbb{H}^m, \nabla = \nabla^g + K, g)$ は統計断面曲率一定 $\kappa(\alpha^2 - 1)$ の統計多様体となる。

$$\begin{aligned} K(\partial_i, \partial_j) &= \delta_{ij}(\alpha(y^m)^{-1}\partial_m + \alpha_i\partial_i), \\ K(\partial_i, \partial_m) &= K(\partial_m, \partial_i) = \alpha(y^m)^{-1}\partial_i, \\ K(\partial_m, \partial_m) &= 2\alpha(y^m)^{-1}\partial_m. \end{aligned}$$

ただし、 $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in C^\infty(\mathbb{H}^m)$, $i, j = 1, \dots, m-1$ である。ここで、 $c = \kappa(\alpha^2 - 1)$ とすると、任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して統計断面曲率一定 c の統計構造が構成できることがわかる。

任意の $i = 1, \dots, m-1$ に対して $\alpha_i = 0$ のとき、 $(\mathbb{H}^m, \nabla, g)$ は定曲率 $\kappa(\alpha^2 - 1)$ である。更に、 $\alpha = 0$ かつ任意の $i = 1, \dots, m-1$ に対して $\alpha_i = 0$ の場合、 $(\mathbb{H}^m, \nabla, g)$ はヘッセ多様体となる。以下、 $\mathbb{H}^m(c) = (\mathbb{H}^m, \nabla, g)$ と略記する。

3 標準的ワーブ積統計多様体

定義 3.1 2つの統計多様体 $(B, \nabla^B := \nabla^{g^B} + K^B, g^B)$, $(F, \nabla^F := \nabla^{g^F} + K^F, g^F)$ と $f \in C^\infty(B, \mathbb{R}^+)$ を考える。このとき、 $\widetilde{M} = B \times F$ 上のリーマン計量 $\widetilde{g}$ と (2) を満たす $\widetilde{K} \in \Gamma(T\widetilde{M}^{(1,2)})$ を $U, V \in \Gamma(TB)$, $X, Y \in \Gamma(TF)$ に対し、

$$\begin{aligned} \widetilde{g} &= g^B + f^2 g^F, \\ \widetilde{K}(U, V) &= K^B(U, V), \quad \widetilde{K}(U, X) = 0, \quad \widetilde{K}(X, Y) = K^F(X, Y) \end{aligned}$$

と定めると $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla} := \nabla^{\widetilde{g}} + \widetilde{K}, \widetilde{g})$ は統計多様体となる。これを (B, ∇^B, g^B) と (F, ∇^F, g^F) の f をワーブ関数とする標準的ワーブ積統計多様体と呼ぶ。

本稿では、 $\mathbb{R}$ 上の开区間 I 上の統計多様体 $(I, \nabla^I, (dt)^2)$ と $(m+p-1)$ 次元の統計多様体 $(\bar{N}, \bar{\nabla}, \bar{g})$ の $f \in C^\infty(I, \mathbb{R}^+)$ をワーブ関数とする $(m+p)$ 次元標準的ワーブ積統計多様体 $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g})$ を考え、これを $I \times_f (\bar{N}, \bar{\nabla}, \bar{g})$ と表す。

以下, $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t} \in \Gamma(TI)$ ($t \in I$), $f' = \frac{df}{dt}$, $f'' = \frac{d^2f}{dt^2}$ と略記する. また, $\tilde{X} \in \Gamma(T\tilde{M})$ に対して, その $\Gamma(T\tilde{N})$ 成分を $\bar{X} = \tilde{X} - \langle \tilde{X}, \partial_0 \rangle \partial_0$ で表す. さらに, (1) から, ある $\nu \in C^\infty(I)$ が存在して

$$\nabla_{\partial_0}^I \partial_0 = \nu(t) \partial_0, \quad \nabla_{\partial_0}^{I*} \partial_0 = -\nu(t) \partial_0,$$

が成り立つ.

命題 3.2 $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g}) = I \times_f (\bar{N}, \bar{\nabla}, \bar{g})$ をワープ積統計多様体とし, $\bar{S}$ と $\tilde{S}$ をそれぞれ $(\bar{N}, \bar{\nabla}, \bar{g})$ と $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$ の統計曲率テンソルとする. このとき, 任意の $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \Gamma(T\tilde{M})$ に対して次を得る:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} &= \bar{S}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \{ \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle \tilde{X} - \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \tilde{Y} \} \\ &\quad + \left(\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{f''}{f} \right) \{ \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle \langle \tilde{X}, \partial_0 \rangle \partial_0 - \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \langle \tilde{Y}, \partial_0 \rangle \partial_0 \\ &\quad \quad + \langle \tilde{Y}, \partial_0 \rangle \langle \tilde{Z}, \partial_0 \rangle \tilde{X} - \langle \tilde{X}, \partial_0 \rangle \langle \tilde{Z}, \partial_0 \rangle \tilde{Y} \}. \end{aligned}$$

特に, $(\bar{N}, \bar{\nabla}, \bar{g})$ が統計断面曲率一定 c であるとき,

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} &= \left(\frac{c}{f^2} - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \right) \{ \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle \tilde{X} - \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \tilde{Y} \} \\ &\quad - \left(\frac{c}{f^2} - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{f''}{f} \right) \{ \langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle \langle \tilde{X}, \partial_0 \rangle \partial_0 - \langle \tilde{X}, \tilde{Z} \rangle \langle \tilde{Y}, \partial_0 \rangle \partial_0 \\ &\quad \quad + \langle \tilde{Y}, \partial_0 \rangle \langle \tilde{Z}, \partial_0 \rangle \tilde{X} - \langle \tilde{X}, \partial_0 \rangle \langle \tilde{Z}, \partial_0 \rangle \tilde{Y} \} \end{aligned}$$

となる.

例 3.3 $(\bar{N}, \bar{\nabla}, \bar{g})$ を統計断面曲率一定 c の場合を考える. λ をゼロでない定数とし, $I = \mathbb{R}$, ワープ関数を $f(t) = \cosh(\lambda t)$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{c}{f^2} - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 &= \frac{1}{f^2} (c + \lambda^2) - \lambda^2, \\ \frac{c}{f^2} - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{f''}{f} &= \frac{1}{f^2} (c + \lambda^2) \end{aligned}$$

を得る. したがって, $c < 0$ かつ $\lambda = \sqrt{|c|}$ のとき, $\mathbb{R} \times_f (\bar{N}, \bar{\nabla}, \bar{g})$ は統計断面曲率一定 c の統計構造となる. そこで, $(\bar{N}, \bar{\nabla}, \bar{g})$ として例 2.5 の $\mathbb{H}^{m-1}(c)$ を考えて,

$$(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g}) = \mathbb{R} \times_{\cosh(\lambda t)} \mathbb{H}^{m-1}(c), \quad m \geq 2 \text{ かつ } p \geq 1,$$

という m 次元統計多様体を考える. $\lambda = \sqrt{\kappa}$ の場合, $(\tilde{M}, \tilde{g})$ はリーマン多様体として定曲率 $-\kappa$ である. 更に, $\lambda = \sqrt{\kappa}$ かつ $\alpha = 0$ のとき, $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$ は例 2.5 の $\mathbb{H}^m(c)$ の $\alpha = 0$ 場合に一致する.

4 統計部分多様体

$(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$ を統計多様体とし, $f: M \rightarrow \tilde{M}$ をはめ込みとする. このとき, M 上に g と ∇ を次で定義する:

$$g = f^* \tilde{g}, \quad g(\nabla_X Y, Z) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X f_* Y, f_* Z) \quad (X, Y, Z \in \Gamma(TM)).$$

このとき、 (∇, g) は M 上の統計構造となり、これを f によって $(\tilde{\nabla}, \tilde{g})$ から誘導された統計構造という。 (M, ∇, g) の統計構造が $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$ から誘導された統計構造に一致するとき、 (M, ∇, g) を $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$ の統計部分多様体という。以下、混同の恐れがないときは、 $\tilde{g}$ と g を $\langle, \rangle$ で表す。

$\tilde{g}$ に関する直交直和分解 $T_x \tilde{M} = T_x M \oplus T_x^\perp M$ に従い、 h, A, D などを次のガウス・ワインガルテン公式で定める：

$$\begin{cases} \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), & \begin{cases} \tilde{\nabla}_X^* Y = \nabla_X^* Y + h^*(X, Y), \\ \tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi, \end{cases} & \begin{cases} \nabla_X^{\tilde{g}} Y = \nabla_X^g Y + \hat{h}(X, Y), \\ \nabla_X^{\tilde{g}} \xi = -\hat{A}_\xi X + \hat{D}_X \xi. \end{cases} \end{cases}$$

ここで、 $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ である。このとき、 h を $\tilde{\nabla}$ に関する第二基本形式、 A を $\tilde{\nabla}$ に関する形作用素、そして D を $\tilde{\nabla}$ に関する法接続という。

以下の議論では、接束 TM 上の正規直交枠として $\{e_1, \dots, e_m\}$ 、法接束 $T^\perp M$ の正規直交枠として $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ をそれぞれとり、 $\{e_1, \dots, e_m, \xi_1, \dots, \xi_p\}$ を適合した正規直交枠と呼ぶことにする。

定義 4.1 $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$ を $(m+p)$ 次元統計多様体とし、 (M, ∇, g) をその m 次元統計部分多様体とする。(i) $H := \frac{1}{m} \text{tr}_g h$ を $\tilde{\nabla}$ に関する平均曲率ベクトル場といい、同様に $H^*, \hat{H}$ が定義できる。(ii) M が $\tilde{\nabla}$ に関して全臍的であるとは、 $h = H \otimes g$ が成り立つときをいい、 $\tilde{\nabla}$ に関して自己平行（あるいは全測地的）であるとは、 $h = 0$ が成り立つときをいう。更に、 M が二重全臍的であるとは、 $h = H \otimes g$ かつ $h^* = H^* \otimes g$ が成り立つときをいい、二重自己平行（あるいは二重全測地的）であるとは、 $h = 0$ かつ $h^* = 0$ が成り立つときをいう。

注意 4.2 (i) 一般に、部分多様体が自己平行であることと全測地的であることは一致しないが、捩れない接続の場合、2つの概念は一致する。

(ii) 統計部分多様体の第二基本形式と平均曲率ベクトル場に関して、

$$\hat{h} = \frac{1}{2}(h + h^*), \quad \hat{H} = \frac{1}{2}(H + H^*)$$

が成り立つ。したがって、 M が二重全臍的（あるいは二重自己平行）であるとき、 M は $\nabla^{\tilde{g}}$ に関して全臍的（あるいは自己平行）である。

以下、平均曲率ベクトル場や第二基本形式に関して

$$\|H\|^2 = \langle H, H \rangle, \quad \|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^m \langle h_{ij}, h_{ij} \rangle, \quad \langle h, h^* \rangle = \sum_{i,j=1}^m \langle h_{ij}, h_{ij}^* \rangle$$

などの表記を用いることにする。ここで、 $h_{ij} = h(e_i, e_j)$, $h_{ij}^* = h^*(e_i, e_j)$ である。

統計部分多様体に対して、統計曲率テンソルを用いたガウス方程式、コダッチ方程式、リッチ方程式が成り立つ。

命題 4.3 $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$ の統計部分多様体 (M, ∇, g) とし、 $\tilde{S}$ と S をそれぞれの統計曲率テンソルとする。このとき、任意の $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ に対して以下が成り立つ：

- (1) $2(\tilde{S}(X, Y)Z)^\top = 2S(X, Y)Z - A_{h(Y, Z)}X + A_{h(X, Z)}Y - A_{h^*(Y, Z)}X + A_{h^*(X, Z)}Y,$
- (2) $2(\tilde{S}(X, Y)Z)^\perp = (\overline{\nabla}_X h)(Y, Z) - (\overline{\nabla}_Y h)(X, Z) + (\overline{\nabla}_X^* h^*)(Y, Z) - (\overline{\nabla}_Y^* h^*)(X, Z),$
- (3) $2(\tilde{S}(X, Y)\xi)^\top = (\overline{\nabla}_Y A)_\xi X - (\overline{\nabla}_X A)_\xi Y + (\overline{\nabla}_Y^* A^*)_ \xi X - (\overline{\nabla}_X^* A^*)_ \xi Y$
- (4) $2(\tilde{S}(X, Y)\xi)^\perp = 2S^\perp(X, Y)\xi - h(X, A_\xi Y) + h(Y, A_\xi X) - h^*(X, A_\xi^* Y) + h^*(Y, A_\xi^* X),$

ここで、 $(\)^\top$ と $(\)^\perp$ はそれぞれ $\tilde{g}$ に関する TM 上と $T^\perp M$ 上への直交射影であり、 $\bar{\nabla}$ は

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) &= D_X h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z), \\ (\bar{\nabla}_X A)_\xi Y &= \nabla_X(A_\xi Y) - A_{D_X \xi} Y - A_\xi \nabla_X Y.\end{aligned}$$

である。

注意 4.4 ガウス方程式は次のように書き換えることができる：

$$\begin{aligned}2\langle \tilde{S}(X, Y)Z, W \rangle &= 2\langle S(X, Y)Z, W \rangle \\ &\quad - \langle h(Y, Z), h^*(X, W) \rangle + \langle h(X, Z), h^*(Y, W) \rangle \\ &\quad - \langle h^*(Y, Z), h(X, W) \rangle + \langle h^*(X, Z), h(Y, W) \rangle.\end{aligned}$$

更に、スカラー曲率に関して次が成り立つ：

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{i,j=1}^m \langle \tilde{S}(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle + m^2 \langle H, H^* \rangle - \sum_{i,j=1}^m \langle h(e_i, e_j), h^*(e_i, e_j) \rangle \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} \tilde{\mathcal{K}}(e_i \wedge e_j) + m^2 \langle H, H^* \rangle - \sum_{i,j=1}^m \langle h(e_i, e_j), h^*(e_i, e_j) \rangle.\end{aligned}$$

ここで、 $\tilde{\mathcal{K}}$ は $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$ の統計断面曲率である。

3次元ユークリッド空間内の曲面の各点で $\|\hat{H}\|^2 \geq$ (ガウス曲率) というオイラー不等式が成り立ち、各点で等号が成立する場合は平面または球面に限られる。この不等式を統計断面曲率を用いて統計部分多様体の場合に一般化したものが次の定理である。

定理 4.5 $(m+p)$ 次元統計多様体 $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$ の m 次元統計部分多様体 (M, ∇, g) に対して、次が成り立つ：

$$\|H\|^2 + \|H^*\|^2 \geq \frac{8}{m^3} \left(2\rho^g - \rho - \sum_{i,j=1}^m (2\mathcal{K}^{\tilde{g}}(e_i \wedge e_j) - \tilde{\mathcal{K}}(e_i \wedge e_j)) \right).$$

点 $x \in M$ で等号が成立するための必要十分条件は、(i) $m \geq 3$ かつ x が二重自己平行となること、または (ii) $m = 2$ かつ x が二重全臍的となることである。

系 4.6 $(m+p)$ 次元統計多様体 $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$ の m 次元統計部分多様体 (M, ∇, g) に対して、次を得る：

(1) $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$ が統計断面曲率一定 c であるとき、次が成り立つ：

$$\|H\|^2 + \|H^*\|^2 \geq \frac{8}{m^3} \left(2\rho^g - \rho - 2 \sum_{i,j=1}^m \mathcal{K}^{\tilde{g}}(e_i \wedge e_j) + m(m-1)c \right).$$

(2) $(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$ がヘッセ断面曲率一定 k であるとき、次を得る：

$$\|H\|^2 + \|H^*\|^2 \geq \frac{8}{m^3} \left(2\rho^g - \rho + \frac{m(m-1)k}{2} \right).$$

(3) 点 $x \in M$ でこれらの等号が成立するための必要十分条件は、(i) $m \geq 3$ かつ x が二重自己平行となること、または (ii) $m = 2$ かつ x が二重全臍的となることである。

$\bar{N}(c) = (\bar{N}, \bar{\nabla}, \bar{g})$ を $(m+p-1)$ 次元の統計断面曲率一定 c の統計多様体とし, $(I, \nabla^I, (dt)^2)$ と $\bar{N}(c)$ の $f \in C^\infty(I, \mathbb{R}^+)$ をワーブ関数とする $(m+p)$ 次元標準的ワーブ積統計多様体 $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g}) = I \times_f \bar{N}(c)$ を考える.

このとき, $I \times_f \bar{N}(c)$ の m 次元統計部分多様体 M に対して, $\partial_0 \in \Gamma(TI)$ ($t \in I$) の TM 成分を T で表す, すなわち

$$T = \sum_{i=1}^m \langle \partial_0, e_i \rangle e_i,$$

とする.

命題 4.7 $(m+p)$ 次元の標準的ワーブ積統計多様体 $I \times_f \bar{N}(c)$ の m 次元統計部分多様体 (M, ∇, g) に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \rho \geq m(m-1) \left(\frac{c}{f^2} - \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \right) - 2(m-1) \left(\frac{c}{f^2} - \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{f''}{f} \right) \|T\|^2 \\ + m^2 \langle H, H^* \rangle - \|h\| \|h^*\|. \end{aligned}$$

点 $x \in M$ で等号が成立するための必要十分条件は $h = 0$ または $h^* = 0$ または定数 $\mu > 0$ が存在して $h^* = \mu h$ となることである.

定理 4.8 $(m+p)$ 次元の標準的ワーブ積統計多様体 $I \times_f \bar{N}(c)$ の m 次元統計部分多様体 (M, ∇, g) に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \|H\|^2 + \|H^*\|^2 \geq \frac{8}{m^3} \left\{ 2\rho^g - \rho - 2 \sum_{i,j=1}^m \mathcal{K}^{\tilde{g}}(e_i \wedge e_j) \right. \\ \left. + m(m-1) \left(\frac{c}{f^2} - \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \right) \right. \\ \left. - 2(m-1) \left(\frac{c}{f^2} - \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{f''}{f} \right) \|T\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

点 $x \in M$ で等号が成立するための必要十分条件は, (i) $m \geq 3$ かつ x が二重自己平行となること, または (ii) $m = 2$ かつ x が二重全臍的となることである.

例 4.9 統計多様体として例 3.3 の標準的ワーブ積統計多様体

$$(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g}) = \mathbb{R} \times_{\cosh(\lambda t)} \mathbb{H}^{m-1}(c), \quad m \geq 2 \text{ かつ } p \geq 1,$$

を考え, この部分多様体として以下の場合を考える.

(1) 定ベクトル $(k^1, \dots, k^p) \in \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}^+$ に対して,

$$M = \{(x^1, \dots, x^m, k^1, \dots, k^p) \in \widetilde{M} \mid (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m\}.$$

を考える. M が各点で命題 4.7 の等号を満たすための必要十分条件は $|\alpha| \leq 1$ である. 一方, M で定理 4.8 の等号は成立しない.

(2) 定ベクトル $(k^1, \dots, k^p) \in \mathbb{R}^p$ に対して,

$$M = \{(x^1, \dots, x^{m-1}, k^1, \dots, k^p, x^m) \in \widetilde{M} \mid (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^+\}$$

を考えると、 M は二重自己平行な統計部分多様体となる。したがって、 M の各点で命題 4.7 と定理 4.8 の等号が成立する。

(3) 定ベクトル $(k^1, \dots, k^p) \in \mathbb{R}^p$ に対して、

$$M = \{(k^1, \dots, k^p, x^1, \dots, x^m) \in \widetilde{M} \mid (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^+\}$$

を考えると、 M は二重全臍的な統計部分多様体となる。したがって、 M の各点で命題 4.7 の等号が成立する。更に、(i) $m \geq 3$ かつ $\lambda k^1 = 0$ または (ii) $m = 2$ のとき、それらのとき限り、 M の各点で定理 4.8 の等号が成立する。

(4) 定ベクトル $(k^1, \dots, k^p) \in \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}^+$ ($p \geq 2$) に対して、

$$M = \{(k^1, x^1, \dots, x^m, k^2, \dots, k^p) \in \widetilde{M} \mid (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m\}$$

を考えると、 M は二重全臍的な統計部分多様体となる。したがって、 M は (i) $\lambda k^1 = 0$ かつ $|\alpha| \leq 1$ または (ii) $\lambda k^1 \neq 0$ かつ $\alpha = 0$ の場合に限り、各点で命題 4.7 の等号が成立する。更に、 M の各点で定理 4.8 の等号が成立するための必要十分条件は M 次元の次元が 2 となることである。

(5) 定ベクトル $(k^1, \dots, k^{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ に対して、

$$M = \{(x^1, x^1, x^2, \dots, x^{m-1}, k^1, \dots, k^{p-1}, x^m) \in \widetilde{M} \mid (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^+\}.$$

を考える。このとき、 M の各点で命題 4.7 の等号が成立するための必要十分条件は (i) $\lambda = 0$ かつ $\nu = \alpha_1$ かつ $|\alpha| \leq 1$ または、(ii) $\lambda \neq 0$ かつ $\nu = \alpha_1$ かつ $\alpha = 0$ である。しかしながら、 M で定理 4.8 の等号は成立しない。

参考文献

- [1] Amari S. and Nagaoka H.: *Method of Information Geometry*, Amer. Math. Soc., Providence, Oxford University Press, (2000).
- [2] Bishop, R. L. and O'Neill, B.: Manifolds of negative curvature, *Trans. Am. Math. Soc.*, 145(1969), 1–49.
- [3] Chen, B. Y.: Mean curvature and shape operator of isometric immersions in real-space-form, *Glasgow Math. J.*, 38(1996), 87–97.
- [4] Furuhashi H. and Hasegawa I.: Submanifold theory in holomorphic statistical manifolds, Dragomir, S., Shahid, M.H. and Al-Solamy, F.R. (eds), *Geometry of Cauchy-Riemann Submanifolds*, Springer, ISBN: 978-981-10-0915-0, (2016), 179–215.
- [5] Furuhashi H., Hasegawa I., Okuyama Y. and Sato K.: Kenmotsu statistical manifolds and warped product, *J. Geom.*, 108(2017), 1175–1191.
- [6] Kobayashi, S., Nomizu, K.: *Foundations of Differential Geometry*, vol. II, John Wiley and Sons, (1969).
- [7] Mihai, A. and Mihai, I.: Curvature invariants for statistical submanifolds of Hessian manifolds of constant Hessian curvature, *Mathematics*, 44(2018).
- [8] Satoh N.: Local existence of statistical diffeomorphisms, *JP Journ. of Geom. and Topol.*, 22(2019), 73–95.

- [9] Satoh N., Furuhata H., Hasegawa I., Nakane T., Okuyama Y., Sato K., Shahid, M.H. and Siddiqui, A.N.: Statistical submanifolds from a viewpoint of the Euler inequality, submitted.
- [10] Shima H.: *The Geometry of Hessian Structure* , World Scientific, (2007).
- [11] Takano K.: Geodesics on statistical models of the multivariate normal distribution, *Tensor N. S.*, 67(2006), 162–169.
- [12] Todihoude, L.,: Dualistic structure on warped product manifolds, *Differ. Geom. Dyn. Syst.*, 8(2006), 278–284.
- [13] Yano K. and Kon M.: *Structures on manifolds*, World Scientific, (1984).