

臨界冪を備えた消散型非線型シュレディンガー方程式の初期値問題における解の L^2 -減衰*

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
佐藤拓也 (Takuya SATO)

1 導入

シュレディンガー方程式は量子力学を起源とする分散型時間発展偏微分方程式であり、量子力学に従う粒子の運動は次のシュレディンガー方程式に従うと考えられている:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2m}\Delta u = Vu, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1)$$

ここで複素数値関数 u (これを波動関数と呼ぶ) は時間と空間の関数であり、その絶対値の 2 乗 $|u|^2$ は粒子の確率存在密度を表す。また $m > 0$ は粒子の質量を、関数 $V = V(x)$ はポテンシャルエネルギーを表し、記号 $\partial_t = \partial/\partial t$ は時間変数に関する偏微分で、 Δ は空間変数に対する方向 2 階微分の和 $\sum_{k=1}^n \partial^2/\partial x_k^2$ で与えられる。このとき方程式 (1) は線形シュレディンガー方程式と呼ばれ、分散型構造を持つ。すなわち、波の伝搬速度がその波の振動数に依存し、高周波ほど空間遠方に逃げて、振動の大きい項の効果が早く失われる性質を持つ。ここではポテンシャルエネルギー V が粒子の存在確率 $|u|^2$ に依存する自己誘導モデル $V = V(|u|^2)$ を考える。非線型の自己誘導モデルを備えた初期値問題 (1) は非線型シュレディンガー方程式と呼ばれ、流体力学における渦糸の運動やプラズマ物理におけるラングミュアー波の崩壊といった多様な物理現象を記述する。

ここでは自己誘導モデル $V = |u|^2$ をポテンシャルエネルギーに備えた空間 1 次元非線型シュレディンガー方程式の初期値問題を考察する:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = \lambda|u|^2 u, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

ここで λ は複素数値で、その虚部は負である。係数 λ が実数のとき、初期値問題 (2) の解は任意の時刻 t について保存則

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |u_0(t, x)|^2 dx$$

を満たす。これは全空間 $\mathbb{R}$ における粒子の存在確率が一定であることを意味する。また、係数 λ が実数であれば、冪型非線型項の次数 3 は初期値問題 (2) の解が自由解 (初期値問題 (1) において $V \equiv 0$

* 本研究は東北大学の小川卓克氏との共同研究である。

としたときの解) に散乱するための臨界指数で Barabu-Ozawa 臨界指数である (cf. [1], [10]). 一方, λ の虚部が負であるとき, 方程式 (2) は消散構造を持ち, 解となる粒子の存在確率は時間に関して単調に減少する (cf. [11], [12]). このとき, 次数 $p = 3$ は解の L^2 -ノルムが減衰するための臨界指数であり, Hayashi-Li-Naumkin [2] は初期値問題 (2) における解の L^2 -減衰オーダーを求めた. ここで実数 $p \geq 1$ について, 可積分函数 f の L^p -ノルムとは

$$\|f\|_{L^p} \equiv \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

で与えられる. また, Hoshino [4] は消散型非線型シュレディンガー方程式において, 低い正則性を持つ時間大域解を構成し, その L^2 -減衰オーダーが解の滑らかさに依存することを示した. ここでは高い正則性を持った解の L^2 -減衰オーダーに関して述べる. そのために以下の函数空間を導入する.

y を $\mathbb{R}$ の元とする. 任意の函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ で $e^{-y\xi}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ を満たすものに対して, 作用素 $e^{iy\partial_x}$ を

$$e^{iy\partial_x} f \equiv \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-y\xi} \hat{f} \right] = f(x + iy) \quad (3)$$

で定める. ここで作用素 $\mathcal{F}$ はフーリエ変換を表し, 任意の函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$\mathcal{F}[f] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

である. また, 作用素 $\mathcal{F}^{-1}$ はフーリエ変換 $\mathcal{F}$ の逆作用素を表す. このとき, 函数空間 $A(\mathbb{R})$ を

$$A(\mathbb{R}) \equiv \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); \|f\|_A \equiv \sup_{y \in [-1, 1]} \|e^{iy\partial_x} f\|_{L^2} < \infty \right\}$$

と定義する. 作用素 $e^{iy\partial_x}$ は函数 f に対して虚軸方向に y だけ解析接続を行うため, 函数空間 $A(\mathbb{R})$ に属す函数はすべて解析的である (cf. [13]).

定理 1 (Ogawa-Sato, [9]). 正数 ε_0 が存在し, 初期値 $u_0 \in A(\mathbb{R})$ が条件

$$\|\partial_x u_0\|_A + \sup_{y \in [-1, 1]} \|x e^{iy\partial_x} u_0\|_{L^2} \leq \varepsilon_0$$

を満たすとき, 初期値問題 (2) の解 $u \in C([0, \infty), A(\mathbb{R}))$ が一意に存在する. また, ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の時刻 $t \geq e^e$ に対して

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq C(\log \log t)^{\frac{1}{2}} (\log t)^{-\frac{1}{2}}$$

が成り立つ.

初期値問題 (2) において, H^s -正則性を持つ解の L^2 -減衰評価は

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq C_\varepsilon (\log t)^{-\frac{s}{2s+1} + \varepsilon} \quad (4)$$

で与えられる (cf. [9]). ここで s は正数で, 定数 $C_\varepsilon > 0$ は正数 ε を 0 に近づけたとき, 無限大に発散する. 解が低い正則性 $s \leq 1$ を持つ場合, 評価 (4) は論文 [2], [4] における解の L^2 -減衰評価と一致する. 主定理は評価 (4) において, s を無限大に大きくしたときの結果で, 解析的な解に対する L^2 -減衰評価を示したものである.

Li-Sunagawa [8] は微分型非線型項を備えた消散型シュレディンガー方程式において、解の L^2 -ノルムが対数関数 $(\log t)^{-1/2}$ のオーダーで減衰することを示した。これは非線型項の微分から生じるフーリエ像 $(1 + |\xi|^2)$ が解の漸近形

$$|\widehat{u}(t, \xi)| \simeq \frac{|\widehat{u_0}(\xi)|}{\sqrt{1 + (1 + |\xi|^2)|\widehat{u_0}(\xi)|^2 \log t}}$$

の可積分性を回復することで得られる減衰オーダーである。

2 主定理の証明

初期値問題 (2) の解 u に対して函数の組を $(v, w) \equiv (e^{iy\partial_x} u, e^{-iy\partial_x} u)$ とおく。このとき、作用素 $e^{iy\partial_x}$ と時間発展する自由シュレディンガー作用素は可換であり、非線型項 $|u|^2 u$ に対する $e^{iy\partial_x}$ のライプニッツルール: $e^{iy\partial_x} [|u|^2 u] = (e^{iy\partial_x} u)^2 (\overline{e^{-iy\partial_x} u})$ (cf. [3]) から

$$\begin{cases} i\partial_t v + \frac{1}{2}\partial_x^2 v = \lambda v^2 \overline{w}, \\ v(0) = e^{iy\partial_x} u_0 \end{cases} \quad (5)$$

が成り立つ。主定理 1 を示すために初期値問題 (5) の時間大域解を構成する。そのため、解 v の漸近形に対して成り立つ以下の常微分不等式を考える:

$$\frac{d}{dt} \|e^{it\xi^2} \widehat{v}(t)\|_{L^2} \leq \frac{\operatorname{Im} \lambda}{t} \int_{\mathbb{R}} |e^{it\xi^2} \widehat{v}(t)|^2 (e^{it\xi^2} \widehat{v}(t)) (\overline{e^{it\xi^2} \widehat{w}(t)}) d\xi + |R(t)|. \quad (6)$$

ここで $R(t) = \lambda t^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left\{ e^{it\xi^2} \mathcal{F}[v^2(t) \overline{w(t)}] - (e^{it\xi^2} \widehat{v}(t))^2 (\overline{e^{it\xi^2} \widehat{w}(t)}) \right\} |\widehat{v}(t)| d\xi$ は剰余項であり、初期値に依存する量 $\varepsilon = \|\partial_x u_0\|_A + \sup_{y \in [-1, 1]} \|x e^{iy\partial_x} u_0\|_{L^2}$ が十分小さければ、ある定数 $C > 0$ が存在して任意の正数 $\gamma \in (0, 1)$ に対し、

$$|R(t)| \leq C\varepsilon^4 t^{-1-\gamma}$$

が成り立つ (cf. [5], [6]). 従って、不等式 (6) の右辺第一項に関して、等式

$$(e^{it\xi^2} \widehat{v}(t)) (\overline{e^{it\xi^2} \widehat{w}(t)}) = (e^{-y\xi} \widehat{u}(t)) (\overline{e^{y\xi} \widehat{u}(t)}) = |\widehat{u}(t)|^2 \geq 0$$

が成り立つことと係数 λ の虚部が負であるため、不等式 (6) の両辺を区間 $[t_0, t]$ で積分することで

$$\|e^{it\xi^2} \widehat{v}(t)\|_{L^2} \leq \|e^{it_0\xi^2} \widehat{v}(t_0)\|_{L^2} + C\varepsilon^4 \quad (7)$$

を得る。ここで時刻 $t_0 > 0$ は初期値問題 (5) における解の局所存在時刻を超えないようにとる。ゆえに不等式 (7) から、ノルム $\|u(t)\|_A$ の一様有界性が従う。

初期値問題 (2) の解の漸近形に対する常微分不等式

$$\frac{d}{dt} \|e^{it|\xi|^2} \widehat{u}(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{\operatorname{Im} \lambda}{t} \|e^{it|\xi|^2} \widehat{u}(t)\|_{L^4}^4 + C\varepsilon^4 t^{-1-\gamma}$$

を用いることで解の L^2 -減衰評価を示す。ここで $\varepsilon = \|\partial_x u_0\|_A + \sup_{y \in [-1, 1]} \|x e^{iy\partial_x} u_0\|_{L^2}$ である。任意の時刻 $t \geq e^e$ に対して、函数 r を

$$r = r(t) \equiv \frac{1}{2} \log \log t$$

で定め、ノルム $\|f\|_{L^2([-r,r])}$ を $\|f\|_{L^2([-r,r])} \equiv \left(\int_{-r}^r |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ と表す. このとき, ヘルダーの不等式により, 任意の函数 $f \in L^4(\mathbb{R})$ に対して

$$\|f\|_{L^2([-r,r])} \leq (2r)^{\frac{1}{4}} \|f\|_{L^4} \quad (8)$$

が成り立つ. さらに, ヤングの不等式を用いれば, 不等式

$$\|f\|_{L^2([-r,r])}^2 \leq \frac{|\operatorname{Im} \lambda|}{4} (\log \log t)^{-1} (\log t) \|f\|_{L^2([-r,r])}^4 + |\operatorname{Im} \lambda|^{-1} (\log \log t) (\log t)^{-1} \quad (9)$$

が成り立つ. 不等式 (8) と (9) を用いれば,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{ (\log \log t)^{-1} (\log t)^2 \|\widehat{u}(t)\|_{L^2}^2 \} \\ & \leq 2 (\log \log t)^{-1} (\log t) t^{-1} \left\{ \|\widehat{u}(t)\|_{L^2([-r,r])}^2 + \|\widehat{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus [-r,r])}^2 \right\} \\ & \quad + (\log \log t)^{-1} (\log t)^2 \left\{ -\frac{|\operatorname{Im} \lambda|}{t} \|\widehat{u}(t)\|_{L^4}^4 + C\varepsilon^4 t^{-1-\gamma} \right\} \\ & \leq 2 (\log \log t)^{-1} (\log t) t^{-1} \left\{ \left(\frac{|\operatorname{Im} \lambda|}{4} (\log \log t)^{-1} (\log t) \|f\|_{L^2([-r,r])}^4 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + |\operatorname{Im} \lambda|^{-1} (\log \log t) (\log t)^{-1} \right) + \|\widehat{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus [-r,r])}^2 \right\} \\ & \quad - (2r)^{-1} |\operatorname{Im} \lambda| (\log \log t)^{-1} (\log t)^2 t^{-1} \|\widehat{u}(t)\|_{L^2([-r,r])}^4 + C\varepsilon^4 t^{-1-\frac{\gamma}{2}} \\ & \leq 2 |\operatorname{Im} \lambda|^{-1} t^{-1} + 2 (\log \log t)^{-1} (\log t) t^{-1} \|\widehat{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus [-r,r])}^2 + C\varepsilon^4 t^{-1-\frac{\gamma}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

を得る. ここでノルム $\|u(t)\|_A$ の一様有界性から

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus [-r,r])}^2 & \leq e^{-2r} \|e^{|\xi|} \widehat{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus [-r,r])}^2 \leq e^{-\log \log t} \|u(t)\|_A^2 \\ & \leq C (\log t)^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

が従う. 不等式 (10) と (11) を組み合わせることで, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ (\log \log t)^{-1} (\log t)^2 \|\widehat{u}(t)\|_{L^2}^2 \} & \leq C t^{-1} + C (\log \log t)^{-1} t^{-1} + C\varepsilon^4 t^{-1-\frac{\gamma}{2}} \\ & \leq C t^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

が成り立つ. 従って, 不等式 (12) の両辺を区間 $[e^e, t]$ で積分することで, 不等式

$$(\log \log t)^{-1} (\log t)^2 \|\widehat{u}(t)\|_{L^2}^2 \leq C (1 + \log t) \quad (13)$$

を得るため, 任意の時刻 $t \geq e^e$ に対して, 解の L^2 -減衰評価

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq C (\log \log t)^{\frac{1}{2}} (\log t)^{-\frac{1}{2}}$$

を得る.

参考文献

- [1] Barab, J., *Nonexistence of asymptotically free solutions of a nonlinear Schrödinger equation*, J. Math. Phys. **25** (1984), 3270–3273.

- [2] Hayashi, N., Li, C., Naumkin, P.I., *Time decay for nonlinear dissipative Schrödinger equations in optical fields*, Adv. Math. Phys., (2016), Art. ID 3702738, 7.
- [3] Hoshino, G, *Analyticity of solutions to a quadratic system of Schrödinger equations without mass resonance condition*, J. Math. Anal. Appl., **467**, (2018), no.1, 331–348.
- [4] Hoshino, G, *Asymptotic behavior for solutions to the dissipative nonlinear Schrödinger equations with the fractional Sobolev space*, J. Math. Phys., **60** (2019), no.11, 111504, 11.
- [5] Katayama, S., Li, C., Sunagawa, H., *A remark on decay rates of solutions for a system of quadratic nonlinear Schrödinger equations in 2D*, Differential Integral Equations **27** (2014), 301-312.
- [6] Kim, D., *A note on decay rates of solutions to a system of cubic nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Asymptot. Anal. **98** (2016) no.1-2, 79–90.
- [7] 小蘭英雄, 三沢正史, 小川卓克, 『これからの非線型偏微分方程式』, 日本評論社, 2007 年.
- [8] Li, C., Sunagawa, H., *Asymptotic behavior for solutions to the dissipative nonlinear Schrödinger equations with the fractional Sobolev space*, Nonlinearity, **29** (2016), 1537.
- [9] Ogawa, T., Sato, T., *L^2 -Decay rate for the critical nonlinear Schrödinger equation with a small smooth data*, preprint, (2019).
- [10] Ozawa, T., *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys., **139** (1991), 479-493.
- [11] Sunagawa, H., *Large time behavior of solutions to the Klein-Gordon equation with nonlinear dissipative terms*, J. Math. Soc. Japan, **58** (2006), 379–400.
- [12] Shimomura, A., *Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equations with dissipative nonlinearities*, Comm. Partial Differential Equations, **31** (2006), 1407–1423.
- [13] Stein, E., Weiss, G., *Introduction to Fourier analysis on euclidian spaces*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton **NJ**, (1971), Reprint of the second (1956) edition; Princeton Paperbacks