Construction of higher Chow cycles and calculation of the regulator map

東京大学大学院　数理科学研究科　数理科学専攻　博士課程 1 年
佐藤　謙 (Ken SATO)

概要

代数的整数論における古典的なレギュレーターの定義を復習をした後，Beilinson によるレギュレーターの定式化や Bloch の高次 Chow 群を用いたモチヴィックコホモロジーの定義を紹介し，計算例として Kummer 曲面上に高次 Chow サイクルを具体的に構成し，レギュレーター写像による値を計算する．

1　レギュレーターの起源：ゼータ関数の特殊値

ゼータ関数がこれほど多くの人に研究されているのは何故だろうか？その一つとして，その整数点における特殊値[*1]に様々な情報が込められているからという理由が挙げられる．その代表的なものが次に述べる類数公式である．まず本節を通して使われる記号を固定しておく．

1. K を代数体，すなわち有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体とする．拡大次数を $n=[K:\mathbb{Q}]$ とする．
2. O_K は K の整数環，すなわち K における有理整数環 $\mathbb{Z}$ の整閉包とする．
3. r_1 は K から $\mathbb{R}$ への体準同型の数，r_2 は K から $\mathbb{C}$ への体準同型のうち，像が $\mathbb{R}$ に入らないものの個数の 1/2 を表す．この時 $r_1+2r_2=n$ である．

K の Dedekind ゼータ関数は，

$$\zeta_K(s)=\sum_{\mathfrak{a}}(N\mathfrak{a})^{-s} \tag{1}$$

として定義される．ここで $\mathfrak{a}$ は O_K の 0 以外のイデアル全体を動き，$N\mathfrak{a}$ は $O_K/\mathfrak{a}$ の元の数を表す．上の定義では $\mathrm{Re}(s)>1$ でしか収束しないが，$\zeta_K(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数へ解析接続される．この時次の公式が成り立つ ([Neu99] Chap.VII, Cor.5.11).

Theorem 1.1. (類数公式)

$$\lim_{s\to 0}\zeta_K(s)s^{-r_1-r_2+1}=-\frac{h_K R}{w} \tag{2}$$

ここで，h_K, R, w は K の類数 (代数幾何的に言えば $\mathrm{Spec}\,O_K$ の因子類群の位数), レギュレーターおよび K に含まれる 1 のべき根の数を表す．

ここでレギュレーターという数が現れているが，これこそが本稿で説明しようとしているレギュレーター写像の起源に他ならない．このレギュレーターについてもう少し説明しよう．

$X(\mathbb{C})$ を K から複素数体 $\mathbb{C}$ への射全体の集合とする．代数幾何的な見方が好きな人は，$X=\mathrm{Spec}\,K$ として，$X(\mathbb{C})$ を X の $\mathbb{C}$ 有理点全体の集合とみなしてもらえれば，後で高次元に一般化する時も納得がいくと思う．$X_{\mathbb{C}}=X\times_{\mathbb{Q}}\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ が代数閉体であることから，図形的に見れば n 個の点に分解する．これを環論

[*1] 本稿で特殊値といった場合は，Laurent 級数展開した時の先頭項の係数を指すとする．特に留数なども含まれる．

的に見れば

$$\begin{aligned} K\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C} &\xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma\in X(\mathbb{C})}\mathbb{C} \\ a\otimes b &\longmapsto (b\sigma(a))_\sigma \end{aligned}$$

という自然な $\mathbb{C}$ 代数の同型があるということに他ならない．これより特に乗法群の同型 $(K\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C})^\times \simeq \prod_{\sigma\in X(\mathbb{C})}\mathbb{C}^\times$ が得られる．これに $\log|\cdot|:\mathbb{C}^\times\longrightarrow\mathbb{R}$ という写像を合成することによって，

$$l:(K\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C})^\times\longrightarrow\prod_{\sigma\in X(\mathbb{C})}\mathbb{R}$$

という写像を得る．今，$F:\prod_{\sigma\in X(\mathbb{C})}\mathbb{R}\longrightarrow\prod_{\sigma\in X(\mathbb{C})}\mathbb{R}$; $(a_\sigma)_\sigma\mapsto(a_{\overline{\sigma}})_\sigma$ という写像[*2]を考え，F による不変 $\mathbb{R}$ 部分線型空間を $\left[\prod_{\sigma\in X(\mathbb{C})}\mathbb{R}\right]^+$ で表すことにする．自然な射 $K\longrightarrow K\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ によって K の乗法群 $K^\times$ は $(K\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C})^\times$ の部分群とみなせるが，$l(K^\times)\subset\left[\prod_{\sigma\in X(\mathbb{C})}\mathbb{R}\right]^+$ となることがわかる．これにより引き起こされる写像

$$r:K^\times\longrightarrow\left[\prod_{\sigma\in X(\mathbb{C})}\mathbb{R}\right]^+ \tag{3}$$

を**レギュレーター写像**と言う．レギュレーター写像から，レギュレーターという数は次のようにして得られる．

トレース写像 $\mathrm{Tr}:\left[\prod_{\sigma\in X(\mathbb{C})}\mathbb{R}\right]^+\longrightarrow\mathbb{R}$ を各成分の和を与える写像とし，$\left[\prod_{\sigma\in X(\mathbb{C})}\mathbb{R}\right]^+$ の $\mathbb{R}$ 部分線型空間 H をトレース写像の核として定める．O_K の乗法群 $O_K^\times$ は $K^\times$ の部分群とみなせ，そのレギュレーター写像による像は H に入り，しかも H 内の完全格子[*3]となっている ([Neu99] Chap.I, Prop.7.3).

$$\begin{array}{ccc} K^\times & \xrightarrow{r} & \left[\prod_{\sigma\in X(\mathbb{C})}\mathbb{R}\right]^+ \\ \big\uparrow & & \big\uparrow \\ O_K^\times & \xrightarrow{r} & H=\left\{x\in\left[\prod_{\sigma\in X(\mathbb{C})}\mathbb{R}\right]^+ : \mathrm{Tr}(x)=0\right\} \end{array}$$

H に $\left[\prod_{\sigma\in X(\mathbb{C})}\mathbb{R}\right]^+\simeq\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ の部分空間としての内積を入れる．この計量に関する $r(O_K^\times)$ の基本領域の体積の $\frac{1}{\sqrt{r_1+r_2}}$ 倍が類数公式に現れたレギュレーターである．定義によって，R は $\log|O_K^\times|$ の元の斉次式で書けていることがわかる．α が 0 でも 1 でもない代数的数ならば，$\log\alpha$ は Lindemann の定理より超越数であることを踏まえると，R は K が $\mathbb{Q}$ でなければ無理数であると期待でき，Dedekind ゼータ関数の特殊値に現れる無理数部分を担っているように見える．

類数公式は Dedekind ゼータ関数の $s=0$(あるいは関数等式によって $s=1$) における特殊値に関する主張であったが，それ以外の整数点における特殊値がどうなっているだろうか？試しに類数公式を次のように書き直してみる [Gei14]．ここで，加群 A に対して A_{tor} は A のねじれ部分群，$|A|$ は A の位数を表すものとする．

$$\lim_{s\to0}s^\rho\zeta_K(s)=-\frac{|K_0(\operatorname{Spec}O_K)_{tor}|R}{|K_1(\operatorname{Spec}O_K)_{tor}|}\quad(\rho=\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}K_1(\operatorname{Spec}O_K)) \tag{4}$$

さらに，R がレギュレーター写像 $r:K_1(\operatorname{Spec}O_K)\longrightarrow H$ の covolume(格子の基本領域の体積) を用いて書けていたことを思い出すと，K 群を用いて他の特殊値も表せるのではないかと期待できる．これを定式化したものが Lichtenbaum 予想であり，Borel[Bo77] によって次の部分的な結果が得られている．

[*2] ここで，$\sigma\in X(\mathbb{C})$ に対して，$\overline{\sigma}$ は σ と複素共役を合成した $X(\mathbb{C})$ の元を表す．すなわち，F という写像は成分の置換になっている．

[*3] $\mathbb{R}$ 線型空間 V の完全格子 Γ とは，V のある $\mathbb{R}$ 基底 $x_1,\dots x_n$ を用いて $\Gamma=\mathbb{Z}x_1+\cdots+\mathbb{Z}x_n$ と表される V の部分 $\mathbb{Z}$ 加群である．

Theorem 1.2. m を 1 以上の整数として，$d_m = \mathrm{rank}\, K_{2m-1}(O_K)$ とおく．レギュレーター写像 $r : K_{2m-1}(O_K) \longrightarrow \mathbb{R}^{d_m}$ は格子を定め，その格子の covolume を R_m とすると，

$$\lim_{s \to 1-m} (s-1+m)^{-d_m} \zeta_K(s) R_m^{-1} \in \mathbb{Q}. \tag{5}$$

これらの結果や予想の経緯は [Ka82] や [Gei14] などの論説がわかりやすいので，興味を持たれた方は読むことをお勧めする．さらに,Bloch によって楕円曲線やより一般の曲線に対して K 群を用いたレギュレーターの定義がなされる [Blo80] ようになると，Dedekind ゼータ関数だけでなく，より一般に多様体に付随する「モチーフ」のゼータ関数[*4] $L(h^i(X), s)$ の特殊値も K 群を用いて表されるのではないかと考えられるようになった．これを定式化したものが Beilinson 予想 [Bei84] である．

2 Beilinson 予想

この節では Beilinson 予想およびその定式化に用いられるレギュレーター写像を簡単に説明する．Beilinson 予想についてより詳しい説明が知りたい方は [Sch88][Nek91] などを参照していただきたい.X を $\mathbb{C}$ の部分体上定義されたスムーズな射影多様体とする． X 上のベクトル束のなす圏から構成される高次 K 群には，Adams 作用素と呼ばれる作用素の族 $\{\psi^k\}_{k \geq 1}$ が作用する．X のモチヴィックコホモロジーと呼ばれる $\mathbb{Q}$ 線型空間は，

$$H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j)) = \{x \in K_{2j-i}(X) \otimes \mathbb{Q} : \text{任意の } k \geq 1 \text{ に対し}, \psi^k(x) = k^j x\} \tag{6}$$

として定義される．このモチヴィックコホモロジーについては，後で K 群を用いない定義を紹介するので，ここではこれ以上説明しない．X と $\mathrm{Spec}\, \mathbb{C}$ のファイバー積 $X_{\mathbb{C}}$ を考えると，普遍 Chern 類の理論から，写像

$$\tilde{r} : H^i_{\mathcal{M}}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(j)) \longrightarrow H^i_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(j)) \tag{7}$$

が定義される．例えば，これは上記の古典的なセッティングでは

$$\log : (K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^{\times} \longrightarrow \prod_{\sigma \in X(\mathbb{C})} (\mathbb{C}/(2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Q}))$$

という射になっている．ここで写像の値域は Deligne コホモロジーという，複素多様体 $X(\mathbb{C})$ の構造から定まるコホモロジーであり，次のように定義される．

一般に A を $\mathbb{R}$ の部分環として，複素多様体 $X(\mathbb{C})$ 上の層の複体

$$A(j)^{\cdot}_{\mathcal{D}} : \quad 0 \longrightarrow A(j) \longrightarrow \mathcal{O}_{X(\mathbb{C})} \longrightarrow \Omega^1_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^{j-1}_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}} \longrightarrow 0 \tag{8}$$

を考える．ここで，$A(j)$ は X 上の $(2\pi\sqrt{-1})^j A$ 値局所定数層であり，$A(j) \longrightarrow \mathcal{O}_{X(\mathbb{C})}$ は $A(j)$ の元を定数関数に送る写像である．また，$\Omega^i_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}}$ は $X(\mathbb{C})$ 上の正則 i 形式の層である．この層の複体の i 番目の超コホモロジー ([Voi07] Section8.1) が Deligne コホモロジー $H^i_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{C}}, A(j))$ である．層の複体からなる短完全列

$$0 \longrightarrow \Omega^{<j}_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}}[1]^{\cdot} \longrightarrow A(j)^{\cdot}_{\mathcal{D}} \longrightarrow A(j) \longrightarrow 0 \tag{9}$$

を考える．ここで，$\Omega^{<j}_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}}[1]^{\cdot}$ は $\mathcal{O}_{X(\mathbb{C})} \longrightarrow \Omega^1_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^{j-1}_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}}$ という複体を右に 1 シフトした複体である．$\mathbb{H}^{i+1}(\Omega^{<j}_{X(\mathbb{C})/\mathbb{C}}[1]^{\cdot}) = H^i_{dR}(X(\mathbb{C}))/F^j H^i_{dR}(X(\mathbb{C}))$ に注意 ([Voi07] Prop.12.26)[*5]すると，これより長完全列

$$\cdots \to H^{i-1}_{dR}(X(\mathbb{C}))/F^j H^{i-1}_{dR}(X(\mathbb{C})) \to H^i_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{C}}, A(j)) \to H^i_B(X(\mathbb{C}), A(j)) \xrightarrow{(*)} H^i_{dR}(X(\mathbb{C}))/F^j H^i_{dR}(X(\mathbb{C})) \to \cdots$$

---

*4 ここでは多様体のコホモロジーの Galois 表現から作られるゼータ関数と思って頂ければ良い．

*5 H^i_{dR}，H^i_B はそれぞれ de Rham コホモロジー，Betti コホモロジー (特異コホモロジー) である．

が得られる．A を体とすると，$H_B^i(X(\mathbb{C}), A(j)) \otimes_A \mathbb{C} = H_B^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \simeq H_{dR}^i(X(\mathbb{C}))$(最後の同型は de Rham の定理による) であることから，(9) の短完全列を導来圏の完全三角系列で考えれば，$(*)$ の射は係数拡大 $H_B^i(X(\mathbb{C}), A(j)) \to H_B^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \simeq H_{dR}^i(X(\mathbb{C}))$ と商をとる射の合成であることがわかる．さらに $i < 2j$ とすると，$A \subset \mathbb{R}$ および係数の複素共役の作用を考えて，$H_B^i(X(\mathbb{C}), A(j)) \cap F^j H_{dR}^i(X(\mathbb{C})) = 0$ がわかるので，$(*)$ は単射で，

$$H_{dR}^{i-1}(X(\mathbb{C}))/(F^j H_{dR}^{i-1}(X(\mathbb{C})) \oplus H_B^{i-1}(X(\mathbb{C}), A(j))) \xrightarrow{\simeq} H_{\mathcal{D}}^i(X_{/\mathbb{C}}, A(j)) \tag{10}$$

という表示が得られる．特に $A = \mathbb{R}$ の時は,$\mathbb{C} = \mathbb{R}(j) \oplus \mathbb{R}(j-1)$ という同型から,$H_{dR}^{i-1}(X(\mathbb{C}))/H_B^{i-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(j)) \simeq H_B^{i-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(j-1))$ となるので，次の $\mathbb{R}$ 線型空間の完全列が得られる．

$$0 \longrightarrow F^j H_{dR}^{i-1}(X(\mathbb{C})) \longrightarrow H_B^{i-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(j-1)) \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^i(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{R}(j)) \longrightarrow 0 \tag{11}$$

特に X が $\mathbb{Q}$ 上のスムーズ射影多様体となっているとする．次の事実を使う．

1. X の代数的 de Rham コホモロジー $H_{alg,dR}^i(X)$ およびそのフィルトレーション $F^j H_{alg,dR}^i(X)$ が定義され，これらは $\mathbb{Q}$ 線型空間となる．
2. $X_{\mathbb{C}}$ の代数的 de Rham コホモロジーおよびフィルトレーションは $H_{alg,dR}^i(X_{\mathbb{C}}) \simeq H_{alg,dR}^i(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ および $F^j H_{alg,dR}^i(X_{\mathbb{C}}) \simeq F^j H_{alg,dR}^i(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ を満たす．
3. $X(\mathbb{C})$ の複素多様体としての構造から定まる通常の解析的 de Rham コホモロジーと $X_{\mathbb{C}}$ の代数的 de Rham コホモロジーは一致して，$H_{alg,dR}^i(X_{\mathbb{C}}) \simeq H_{dR}^i(X(\mathbb{C}))$ となる．

これより，特に $F^j H_{dR}^{i-1}(X(\mathbb{C})) \simeq F^j H_{alg,dR}^{i-1}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ には複素共役の作用が定義されるが，この作用は $H_B^{i-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(j-1))$ に対する複素共役の作用 (コホモロジーの係数の複素共役作用 + 複素共役が引き起こす位相空間 $X(\mathbb{C})$ 上の連続写像による作用) と同変になっていることがわかる ([Del77], Prop1.4)．これにより (11) の各項における複素共役の作用を考えて，Deligne コホモロジーにも複素共役の作用が引き起こされる．この作用による不変部分空間を取ることで，Deligne コホモロジーの実部分 $H_{\mathcal{D}}^i(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$ が定義される．

$$0 \longrightarrow F^j H_{alg,dR}^{i-1}(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow H_B^{i-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(j-1))^{(-1)^{j-1}} \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^i(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j)) \longrightarrow 0 \tag{12}$$

これは前節で紹介した古典的な $X = \operatorname{Spec} K$ のセッティングで見ると，$H_{\mathcal{D}}^1(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{R}(1)) = \prod_{\sigma \in X(\mathbb{C})} \mathbb{R}$ から $H_{\mathcal{D}}^1(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(1)) = \left[\prod_{\sigma \in X(\mathbb{C})} \mathbb{R}\right]^+$ を取ったことに対応している．

今，上で定義した写像 $\tilde{r} : H_{\mathcal{M}}^i(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(j)) \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^i(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(j))$ に対して，さらに

$$H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j)) \longrightarrow H_{\mathcal{M}}^i(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(j)) \xrightarrow{\tilde{r}} H_{\mathcal{D}}^i(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(j)) \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^i(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{R}(j)) \tag{13}$$

を合成すると，その像は Deligne コホモロジーの実部分に入り，レギュレーター写像

$$r : H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j)) \longrightarrow H_{\mathcal{D}}^i(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j)) \tag{14}$$

が定義される．これが上で見た $r : K^\times \longrightarrow \left[\prod_{\sigma \in X(\mathbb{C})} \mathbb{R}\right]^+$ に対応している．$O_K^\times \subset K^\times$ という $K^\times$ の部分加群の像は値域において格子になっていたことを思い出すと，Beilinson 予想の前半の部分は次のように定式化できる．

Conjecture 2.1. (Beilinson 予想 1) X の $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 上のモデル $\mathcal{X}$ に由来するような**整数部分**と呼ばれるモチヴィックコホモロジーの部分 $\mathbb{Q}$ 線型空間 $H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}}$ を考える．この時，$\frac{i+1}{2} < j$ ならば，レギュレーター写像 (14) による整数部分の像を考えると，Deligne コホモロジーに $\mathbb{Q}$ 構造[*6]が入る．また，$\frac{i+1}{2} = j$ の時は，

[*6] $\mathbb{R}$ 線形空間 V に対して，$\mathbb{Q}$ 構造とは V の部分 $\mathbb{Q}$ 線形空間 W で，$W \otimes \mathbb{R} \simeq V$ となるものである．

余次元 $j-1$ の X 上の代数的サイクルをホモロジカル同値で割った $N^{j-1}(X)$ という加群を用いて，レギュレーター写像を少し修正した

$$H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j)) \oplus (N^{j-1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \longrightarrow H^i_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j)) \tag{15}$$

という写像を考え，整数部分 $H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}}$ および $N^{j-1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の基底の像を考えると，これは同じく Deligne コホモロジーに $\mathbb{Q}$ 構造を定める．

$\frac{i+1}{2} = j$ の時の修正は，古典的なセッティングにおいて，$O_K^{\times}$ の像が $\left[\prod_{\sigma \in X(\mathbb{C})} \mathbb{R}\right]^+$ 全体ではなく，そのトレース 0 の部分空間 H の完全格子になっていたことの類似である．これにより，(12) の各項に $\mathbb{Q}$ 構造が入る[*7]．(12) の各項を次元の回数だけウェッジ積をとることで定まる自然な同型

$$\bigwedge^{\max} F^j H^{i-1}_{dR}(X_{\mathbb{R}}) \otimes_{\mathbb{R}} \bigwedge^{\max} H^i_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j)) \simeq \bigwedge^{\max} H^{i-1}_B(X, \mathbb{R}(j-1))^{(-1)^{j-1}} \tag{16}$$

を通じて両辺の $\mathbb{Q}$ 構造を比較すると，値 $c \in \mathbb{R}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times}$ が得られる．すると，Beilinson 予想の後半は次のように述べられる．

Conjecture 2.2. (Beilinson 予想 2) モチーフのゼータ関数 $L(h^{i-1}(X), s)$ の $s = i - j$ における Laurent 展開の先頭項は c と $\mathbb{Q}^{\times}$ 倍のズレを除いて一致する．

Beilinson 予想が成り立つことが確かめられているのは，Beilinson 自身によるモジュラー曲線の場合や Bloch による虚数乗法を持つ楕円曲線の場合など数少ない．それらのケースについては，次の 3 つのステップによりなされている．

1. モチヴィックコホモロジーの整数部分の元をランクの分だけ構成する．
2. 構成した元のレギュレーター写像による像 $(+\alpha)$ が $H^i_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$ において $\mathbb{R}$ 基底となっていることを確かめる．
3. その基底による $\mathbb{Q}$ 構造と，de Rham コホモロジー，Betti コホモロジーの $\mathbb{Q}$ 構造を比較して，モチーフの L 関数の特殊値と $\mathbb{Q}^{\times}$ 倍の差を除いて一致することを確かめる．

一般の多様体について Beilinson 予想を考えると，そもそもモチーフの L 関数の解析接続性は現状多様体のモジュラー性がわかっていないと確かめることが出来ないため，それが未解決である以上，そもそも (3) は一般の多様体に対しては問題として well-defined であるかどうかすらわかっていない．

そこで (3) は一旦置いておき，モチヴィックコホモロジーの整数部分の元のレギュレーターによる像の値はどうなるか？という問題を考えてみる．もしそのレギュレーターの値がある特殊関数の特殊値で書けたとすると，Beilinson 予想が正しいとすれば，それらはモチーフの L 関数の特殊値と関連づけられるはずなので，その特殊関数は数論的に興味深い性質を持つことが期待される．本稿の一番最初に出てきた log がその最も簡単な例だが，ポリログ関数 [Neu88] や超幾何関数 [AO18] なども，レギュレーターの値として現れることが分かっている．特に虚数乗法を持つ楕円曲線の場合は，一旦超幾何関数を用いてレギュレーターの値を表し，超幾何関数と L 関数の特殊値を比較して Beilinson 予想を確かめるという別証明が知られている [Ito18] ことからも，このことが本来の Beilinson 予想へのアプローチになりうるということがわかる．

そこで本稿の残りの部分では，「レギュレーターの値として現れる特殊関数はどのようなものか？」ということを念頭に，ある種の $K3$ 曲面のモチヴィックコホモロジーの元を構成し，そのレギュレーターによる値の

[*7] de Rham コホモロジーには，同型 $F^j H^i_{alg,dR}(X_{\mathbb{R}}) \simeq F^j H^i_{alg,dR}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ から定まる $\mathbb{Q}$ 構造が，Betti コホモロジーには係数拡大 $H^{i-1}_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(j-1)) \simeq H^{i-1}_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}(j-1)$ から定まる $\mathbb{Q}$ 構造が入る．

計算例を紹介する．これらの結果は筆者の修士論文 [Sat19] の結果であり，より良い結果が [Sat20] において載る予定なので興味を抱かれた方は一瞥していただけると幸いである．

3 Bloch の高次 Chow 群と高次 Chow サイクルの構成例

高次 K 群を用いたモチヴィックコホモロジーの定義は，レギュレーターの定義が自然に定まるというメリットがある一方で，具体的な元の構成には向かない．そこで，Bloch により構成された高次 Chow 群 [Blo86] を用いる．高次 Chow 群を用いたモチヴィックコホモロジーの定義は後述するように高次 K 群を用いた定義と (良い条件のもとで) 同値であるだけでなく，K 群を用いたものよりも精密な $\mathbb{Z}$ 係数のモチヴィックコホモロジー $H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Z}(j))$ であると考えられている [Gei14]. この節では高次 Chow 群の定義および具体的な元の構成の方法を説明する．なお，高次 Chow 群の定義は位相幾何における特異ホモロジー群と似ているところがあり，以下はそれを念頭に読まれるとわかりやすいかもしれない．

以下 k を体とし，X を k 上有限型で，同余次元的な分離的スキーム ([SS12] 定義 0.2.6) とする．非負整数 q に対し，

$$\Delta^q = \operatorname{Spec} k[T_0, \ldots, T_q]/(T_0 + \cdots + T_q - 1) \simeq \mathbb{A}^q_k \tag{17}$$

と置く．これは特異ホモロジーにおける q 単体の類似である．さらに，$\partial_i : \Delta^{q-1} \hookrightarrow \Delta^q$ を，T_i に 0 を代入する，という環の射から定まる正則閉埋め込みとし，その像が定める閉部分スキームを Δ^q の面という．特異ホモロジーでは，q 単体から位相空間への連続写像によって生成される自由加群からなる複体を考えるが，代数幾何では射の条件が強く，それでは足りないため，$X \times_k \Delta^q$ の閉部分スキームが生成する自由加群[*8]から複体を作る．より正確には

$$Z^p(X, q) = \mathbb{Z}\{Z \subset X \times_k \Delta^q : Z \text{ は余次元 } p \text{ の integral 閉部分スキームで，各面と正しく交わる }\}$$
$$d_i = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\partial_i \times_k \mathrm{id})^* : Z^p(X, q) \longrightarrow Z^p(X, q-1)$$

ここで, 集合 A に対して，$\mathbb{Z}A$ は A が生成する自由加群を表し，正則閉埋め込み f に対して，f^* はサイクルの引き戻し写像を表す．これより q 番目の項を $Z^p(X, q)$ とする複体

$$\cdots \xrightarrow{d_{q+2}} Z^p(X, q+1) \xrightarrow{d_{q+1}} Z^p(X, q) \xrightarrow{d_q} Z^p(X, q-1) \xrightarrow{d_{q-1}} \cdots$$

を作り，その q 番目のホモロジー群を高次 Chow 群 $\mathrm{CH}^p(X, q)$ と定める．Bloch により次が示されている．

Theorem 3.1. X が k 上スムーズな準射影多様体の時，$H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j)) \simeq \mathrm{CH}^j(X, 2j - i) \otimes \mathbb{Q}$.

これにより，少なくともスムーズな準射影多様体の時は，高次 Chow 群は整数係数のモチヴィックコホモロジーを与えていると考えられている．

以下では X を k 上正則な 2 次元の多様体として，高次 Chow 群 $\mathrm{CH}^2(X, 1)$ の元を「目に見える形で」表示することを目標する．高次 Chow 群に関する次の結果を使う．

1. $\mathrm{CH}^0(X, i) = 0$ $(i > 0)$．([SS12] 例 8.1.2)
2. X が正則の時 $\mathrm{CH}^1(X, i) = 0$ $(i > 1)$.([SS12] 定理 8.3.1)
3. 局所化スペクトル系列 $E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{[p]}} \mathrm{CH}^{r-p}(\operatorname{Spec} \kappa(x), -p - q) \Rightarrow \mathrm{CH}^r(X, -p - q)$.

   ここで，$X^{[i]}$ は X の余次元 i の点全体の集合,$\kappa(x)$ で x における剰余体を表す．([SS12] 8.4.10)

[*8] 例えば $f : \Delta^q \to X$ という射はグラフを考えることによって，$X \times_k \Delta^q$ の閉部分スキームとみなせる．

これらより，実際にスペクトル系列を書いてみると，$\mathrm{CH}^2(X,1)$ は次の複体のホモロジー群と同型であることがわかる．

$$\mathrm{CH}^2(\operatorname{Spec}\kappa(\eta),2) \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{[1]}} \mathrm{CH}^1(\operatorname{Spec}\kappa(x),1) \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{[2]}} \mathrm{CH}^0(\operatorname{Spec}\kappa(x),0)$$

ここで，η は X の生成点である．一般に $\mathrm{CH}^0(X,0)$ は X の既約成分で生成される自由加群で，X が正則なら $\mathrm{CH}^1(X,1)=\Gamma(X,\mathscr{O}_X^\times)$(可逆関数の層の大域切断) であることを用いると，より簡単に次のように書ける．

$$\mathrm{CH}^2(\operatorname{Spec}\kappa(\eta),2) \longrightarrow \bigoplus_{x\in X^{[1]}} \kappa(x)^\times \xrightarrow{\mathrm{div}} \bigoplus_{x\in X^{[2]}} \mathbb{Z} \tag{18}$$

さらに，局所化スペクトル系列の導出を考えると，複体の 2 番目の射は因子類群における div と同様に，$\mathrm{div}(f)=\sum_p \mathrm{ord}_p(f)p$ というように，重複度こみで零点と極を足し合わせるような射となっている．これより $\mathrm{CH}^2(X,1)$ の元は，X 上の曲線 C_j および C_j の関数体の 0 でない元 f_j 達の組であって，$\sum_j \mathrm{div}(f_j)=0$ を満たすものを用いて，

$$\xi = \left[\sum_j (f_j, C_j)\right]$$

と表せることがわかる．要は曲面上に曲線を何本か描き，それらの交点で極と零点をうまく打ち消すように曲線上の有理関数を定めることが出来れば高次 Chow 群の元を作ることが出来るのである．簡単な構成は [Lew13] などを見るとしっくりくると思う．

以下では具体的な曲面上で高次 Chow サイクルを構成し，そのレギュレーターによる像を計算することを目的にする．k を $\mathbb{C}$ の部分体とし，楕円曲線 $y^2=x(x-1)(ax-1)$ で表される楕円曲線を E_a と表すことにする．楕円曲線 E_a, E_b の直積に付随する Kummer 曲面 $X=\mathrm{Km}(E_a\times E_b)$ を考える．ここで，Abel 曲面 A に対して，A に付随する Kummer 曲面 $\mathrm{Km}(A)$ とは，ι を $x\mapsto -x$ という A 上の群構造から定まるインヴォリューションとして，

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr] & & \mathrm{Km}(A) \arrow[dl] \\ & A/\iota & \end{tikzcd}$$

から定まる曲面のことである．ここで，左側の射は ι による商で，右側の射は商で生じた有理 2 重点のブローアップである．

X は次のように具体的に構成出来る．楕円曲線 E_a は $x=0,1,\frac{1}{a},\infty$ で分岐する 2 重被覆 $E_a\longrightarrow\mathbb{P}^1$ を持つことに注意する．今 $Y=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ の下図にあるメッシュのような因子で分岐する 2 重被覆 $\widetilde{Y}$ を考えると，$\widetilde{Y}$ は 16 個の特異点を持つ．これらの特異点をブローアップすると $X=\mathrm{Km}(E_a\times E_b)$ が得られる．

次に，$Y=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 上の対角線 D を $\widetilde{Y}$ に引き戻したものを $\widetilde{D}$ とし，さらにブローアップ $X\longrightarrow\widetilde{Y}$ に関する $\widetilde{D}$ の strict transformation を C とする．

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & \widetilde{Y} & \longrightarrow & Y \\ \cup & & \cup & & \cup \\ C & \longrightarrow & \widetilde{D} & \longrightarrow & D \end{array}$$

対角線 D は $(x,y)=(0,0),(1,1)$ を通り，かつこれらの 2 点は $\widetilde{Y}$ 上の特異点になっているので，C はこれらの特異点をブローアップした 2 本の例外曲線と下図のように交わる．$C\longrightarrow D$ は 2 重被覆だから，C は有理曲線であり，また例外曲線は定義より有理曲線である．登場する曲線が全て有理曲線であることから，各曲線上の有理関数を，交点で極と零点が上手く打ち消し合うように選んでくることが出来，高次 Chow 群の元 $\xi_{a,b}$ を構成することが出来る．

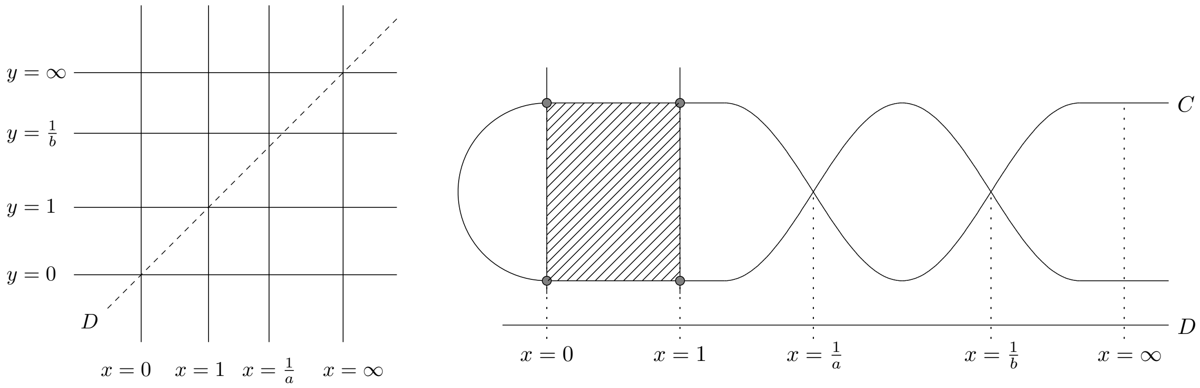

図 1　左図:分岐する因子と対角線, 右図:対角線の引き戻し

4　レギュレーターの計算例の紹介

この節では前の節で構成した $X = \mathrm{Km}(E_a \times E_b)$ 上の高次 Chow サイクル $\xi_{a,b}$ のレギュレーターの「値」を $a, b \in \mathbb{C}$ の正則関数として表すことを目標とする．「値」というのはどういう意味かを説明しよう．まず，考えるべきレギュレーター写像は，次の写像である．

$$\tilde{r} : \mathrm{CH}^2(X_{\mathbb{C}}, 1) = H^3_{\mathcal{M}}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}(2)) \longrightarrow H^3_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(2)) \tag{19}$$

ここで 2 節で定義したレギュレーター写像 r ではなく，$\tilde{r}$ を用いているのが気になる方もおられるかもしれないが，これは値域を $H^3_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{R}(2))$ に落としてしまうと，正則関数ではなくなってしまい，パラメーター a, b で微分といったテクニックが使えなくなってしまうという理由による．値域の Deligne コホモロジーは

$$H^3_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(2)) \simeq H^2_{dR}(X(\mathbb{C}))/(F^2 H^2_{dR}(X(\mathbb{C})) \oplus H^2_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(2))) \tag{20}$$

と表せるが，カップ積による双対*9 $(H^{2,0})^\vee \simeq H^{0,2}$,$(H^{1,1})^\vee \simeq H^{1,1}$ および

$$\begin{aligned} H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) &\longrightarrow H^2_{dR}(X(\mathbb{C}))^\vee \\ \gamma &\longmapsto \left([\omega] \mapsto \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_\gamma \omega \right) \end{aligned}$$

の像が $H^2_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ であることを踏まえると，

$$H^3_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(2)) \simeq (F^1 H^2_{dR}(X(\mathbb{C})))^\vee / H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(2)) \tag{21}$$

と表せる．この表示のもとにレギュレーター $\tilde{r}$ を表す公式は，Levine[Lev88] や Kerr,Lewis,Müller-Stach[KLM06] によって得られていて，

$$\begin{aligned} \tilde{r} : \mathrm{CH}^2(X, 1)_{\mathrm{hom}} &\longrightarrow (F^1 H^2_{dR}(X(\mathbb{C})))^\vee / H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(2)) \\ \left[\sum_j (f_j, C_j) \right] &\longmapsto \left([\omega] \mapsto \sum_j \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{D_j - \gamma_j} \log(f_j)\omega + \int_\Gamma \omega \mod H_2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(2)) \right) \end{aligned}$$

*9 線型空間 V に対し $V^\vee$ は V の双対空間を表すものとする．

となる．$\mathrm{CH}^2(X,1)_{\mathrm{hom}}$ は $\mathrm{CH}^2(X,1)$ の null-homologous サイクル[*10]からなる部分群であるが，$H^1(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})=0$ であるような曲面 (例えば $K3$ 曲面) については $\mathrm{CH}^2(X,1)$ と一致する．上の記号において，γ_j は f_j を C_j から $\mathbb{P}^1$ への写像と見たときの，0 から ∞ へ実軸に沿って進む道の f_j によるひきもどし $f_j^{-1}([0,\infty])$ である．Γ は $\partial\Gamma=\sum_j \gamma_j$ を満たす位相的 2 チェインである. ただし，このような Γ が存在することは，$\sum_j \mathrm{div}(f_j)=0$ という条件から $\sum_j \gamma_j$ は X 内の閉路となることと，null-homologous という条件からわかる．

レギュレーターの値を正則関数として表したいので，$[\omega]$ を正則 2 形式で代表されるコホモロジー類とし，$\tilde{r}(\xi_{a,b})([\omega])$ を計算する．楕円曲線 E_a の周期は超幾何関数を用いて書けることと，Γ を上手く取って $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ に射影することで，次の結果を得る．

Proposition 4.1. [Sat19]

$$\tilde{r}(\xi_{a,b})([\omega]) = 2\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(s-1)(as-1)}}\int_0^s \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(bt-1)}} \in \mathbb{C}/\left\langle F_i(a)F_j(b) : i,j=1,2\right\rangle_{\mathbb{Q}} \tag{22}$$

ここで, $\langle F_i(a)F_j(b):i,j=1,2\rangle_{\mathbb{Q}}$ は $F_i(a)F_j(b)$ によって生成される $\mathbb{C}$ の部分 $\mathbb{Q}$ 線型空間を表し, $F_1(z), F_2(z)$ は Gauss の超幾何関数を使って，

$$\begin{aligned} F_1(z) &= {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1;z\right) \\ F_2(z) &= {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1;1-z\right) \end{aligned} \tag{23}$$

と表せる正則関数である．

これより，2 変数関数 $G(a,b)$ を

$$G(a,b) = 2\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(s-1)(as-1)}}\int_0^s \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(bt-1)}} \tag{24}$$

とおけば，$G(a,b)$ はレギュレーターの値になっているのではないかと期待できる．ただ，$G(a,b)$ が得体の知れない部分 $\mathbb{Q}$ 線型空間 $\langle F_i(a)F_j(b):i,j=1,2\rangle_{\mathbb{Q}}$ に入ってしまったら，$\tilde{r}(\xi_{a,b})([\omega])=0$ となり何の情報も得られない．現状で得られている結果としては $a,b\in\mathbb{C}$ が十分一般の時，$\tilde{r}(\xi_{a,b})([\omega])\neq 0$ というものがある．これは G が微分方程式

$$a(1-a)\frac{\partial^2 G}{\partial a^2} + (1-2a)\frac{\partial G}{\partial a} - \frac{1}{4}G = \frac{2}{b-a}\left(\sqrt{\frac{b-1}{a-1}}+1\right) \tag{25}$$

を満たすことから，$F_i(a)F_j(b)$ 達と正則関数として一次独立ということから従う．この $G(a,b)$ という特殊関数については既知の特殊関数で表すことは出来ていないが，上の微分方程式が示しているように，超幾何関数と何らかの関わりがあるように見え，興味深い．

参考文献

[AO18] M. Asakura; N. Otsubo, CM periods, CM regulators and hypergeometric functions, I, Canadian Journal of Mathematics, 70(3) (2018), 481-514.

[Bei84] A. A. Beilinson, Higher regulators and values of L-functions, J.Soviet Math.30 (1985),2036-2070.

[Blo80] S. Bloch, The dilogarithm and extensions of Lie algebras, Algebraic K-theory, Evanston 1980 (Proc. Conf., Northwestern Univ.,Evanston, Ill., 1980).

[Blo86] S. Bloch, Algebraic cycles and higher K-theory, Adv. in Math. 61 (1986), no. 3, 267–304.

[*10] 古典的な Abel-Jacobi 写像の定義域でも $\deg=0$ の部分群を取っていたことを思い出す．

[Bo77] A. Borel, Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zeta aux points entiers, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 4 (1977), no. 4, 613–636.

[Del77] P. Deligne, Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales.With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos.Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, pp. 313–346, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Gei14] T. Geisser, モチビック・コホモロジー, その応用 と重要な予想, 数学, 67 (2014), 225 - 245.

[Ito18] R. Ito, The Beilinson conjectures for CM elliptic curves via hypergeometric functions, Ramanujan J (2018) 45: 433-449.

[Ka82] 加藤和也, 代数的 K 理論-その整数論的側面-, 数学, 34 (1982), 97 - 115.

[KLM06] M. Kerr; J. D. Lewis; S. Müller-Stach, The Abel-Jacobi map for higher Chow groups, Compos. Math. 142 (2006), no. 2, 374–396.

[Lev88] M. Levine, Localization on singular varieties, Invent. Math. 91 (1988), no. 3, 423–464.

[Lew13] J. D. Lewis, Transcendental methods in the study of algebraic cycles with a special emphasis on Calabi-Yau varieties, Arithmetic and geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau threefolds, 29 - 69, Fields Inst. Commun., 67, Springer, New York, 2013.

[Nek91] J. Nekovář, Beilinson's conjectures, Motives (Seattle, WA, 1991), 537 - 570, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Neu88] J. Neukirch, The Beilinson conjecture for algebraic number fields, Beilinson's conjectures on special values of L-functions, 193–247, Perspect. Math., 4, Academic Press, Boston, MA, 1988.

[Neu99] J. Neukirch, Algebraic number theory, Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher. With a foreword by G. Harder.Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 322. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Sch88] P. Schneider, Introduction to the Beilinson conjectures, Beilinson's conjectures on special values of L-functions,1–35, Perspect. Math., 4, Academic Press, Boston, MA, 1988.

[Sat19] K. Sato, Indecomposable parts of higher Chow groups of a certain type of Kummer surfaces, 東京大学修士論文,2019 .

[Sat20] K. Sato, Construction of higher Chow cycles on a certain type of Kummer surfaces, To appear.

[SS12] 斎藤秀司; 佐藤周友, 代数的サイクルとエタールコホモロジー, シュプリンガー現代数学シリーズ，17，丸善出版，2012.

[Voi07] C. Voisin, Hodge theory and complex algebraic geometry I, Reprint of the 2002 English edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 76. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.