

対蹠集合の連結性と等質性

筑波大学大学院数理物質科学研究科数学専攻

佐々木優 (Yuuki SASAKI)

概要

コンパクトリーマン対称空間の対蹠集合に関してある種の連結性を導入することで、極大対蹠集合が等質であるための十分条件を得られたのでこれを紹介する。

1 問題と目的

この節では、今回の結果を述べる上で必要になる定義や基本的な性質および例などをまとめる。

1.1 定義

定義 1.1 (対称空間). リーマン多様体 M が対称空間であるとは、各点 $x \in M$ に対して M 上の等長変換 s_x で次を満たすものが存在することをいう。

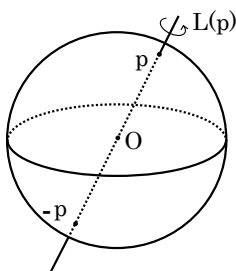
- s_x は対合的 ($s_x^2 = \text{id}_M$).
- x は s_x の孤立固定点.

定義 1.2 (対蹠性, 対蹠集合). $p, q \in M$ を M 上の 2 点とし, $S \subset M$ を M の部分集合とする.

- M の 2 点 $p, q \in M$ が対蹠的とは, $s_p(q) = q (\Leftrightarrow s_q(p) = p)$ をみたすことをいう.
- M の部分集合 S が対蹠集合であるとは, S の任意の 2 点が対蹠的であることをいう.
- M の対蹠集合 S が極大対蹠集合であるとは, 対蹠集合全体の包含関係による順序に関して S が極大になることをいう.
- M の対蹠集合で濃度が対蹠集合全体の中で最大になるものを大対蹠集合という. 大対蹠集合の濃度を M の 2-number といい $\#_2 M$ とかく.

対蹠集合は Chen-Nagano[1] により導入された. 簡単な例として球面をみる.

例 1. 球面 S^2 について



- 各 $p \in S^2$ における点対称 s_p は, p と $\mathbb{R}^3$ の原点 o を通る直線 $L(p)$ を回転軸とした 180 度回転で与えられる.
- s_p の不動点集合は, $\{p, -p\}$ となる. これより, $\#_2 S^2 = 2$ を得る.

対蹠集合に関するいくつかの注意をしておく.

注意 1.3. (1) M が連結であれば, 任意の対蹠的な 2 点に関してその 2 点を通るような閉測地線が存在する.

(2) M が非コンパクト型リーマン対称空間であるとき対蹠集合は常に 1 点集合である. そこで以下は M をコンパクトリーマン対称空間であるとする.

(3) 対蹠集合は有限集合である.

以下, 考える対称空間はコンパクトリーマン対称空間とする.

1.2 対蹠集合の性質

ここでは, 対蹠集合に関していくつかの性質をみていく.

コンパクト対称空間の特別なクラスとして対称 R 空間がある. 例えば, 球面 S^{n-1} , 実・複素・四元数グラスマン多様体, 特殊直交群 $SO(n)$, ユニタリ群 $U(n)$, シンプレクティック群 $Sp(n)$ などは対称 R 空間になっている.

定理 1.4. [4]

M を対称 R 空間とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\#_2 M = \sum_i \dim(H_i(M, \mathbb{Z}_2))$$

この定理より, 対蹠集合はコンパクト対称空間の位相的な性質を反映していると考えられる.

対称空間の特別なクラスとしてコンパクト型エルミート対称空間がある. このクラスに含まれる対称空間たちはケーラー多様体にもなっている. 例えば, 複素グラスマン多様体やランク 2 の有向実グラスマン多様体はコンパクト型エルミート対称空間である. M をコンパクト型エルミート対称空間とする.

定義 1.5 (実形). M の対合的反正則等長変換の不動点集合 N を M の実形という.

一般に, リーマン多様体の等長変換の不動点集合は全測地的部分多様体になることが知られている. また, 対称空間の全測地的部分多様体は再び対称空間である. したがって, 実形 N は M の全測地的部分多様体になり, N 自体もコンパクト対称空間である. これより, 実形 N 上の対蹠集合も考えられる.

N_1, N_2 を M の 2 つの実形とする. さらに, $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$ であるとする.

定理 1.6. [3]

N_1 と N_2 は各交点で横断的に交わっているとする. このとき, $N_1 \cap N_2$ は N_1, N_2 それぞれの対蹠集合となっている.

この定理により対蹠集合は, 対称空間の全測地的部分多様体の交叉を考える上でも意味がある.

1.3 問題と目的

以上 2 つの性質からもわかるように、対蹠集合とくに大対蹠集合や極大対蹠集合は対称空間の様々な構造を調べる上で重要な対象であると考えられる。そこで、次のような問題を考える。

問題 1. 極大対蹠集合は対称空間でどのような配置をしているか。

この問題を考える上で、次の 2 つの例を見る。

例 2. [1]

G をコンパクトリー群とする。 G には両側不変計量が存在し、それにより G はコンパクト対称空間になる。各 $g \in G$ における点対称は、 $s_g : G \rightarrow G; h \mapsto gh^{-1}g$ となる。 $e \in G$ を単位元とする。このとき、 e を含む任意の極大対蹠集合 A は部分群となっている。実際、任意の $x \in A$ について

$$x = s_e(x) = x^{-1}$$

よりとくに $x^{-1} \in A$ である。また、 $x, y, z \in A$ について

$$y = s_x(y) = xy^{-1}x$$

であるので $xy = yx$ である。したがって、

$$s_z(xy) = z(xy)^{-1}z = zy^{-1}x^{-1}z = zyxz = xz^2y = xy.$$

これより、 z と xy は対蹠的であるので、 A が極大対蹠集合であることから $xy \in A$ 。よって A は部分群である。

とくに、コンパクトリー群 G においては、等長変換群の部分群で A に推移的に作用するものが存在している。

例 3. [2]

対称 R 空間とその極大対蹠集合は次のようにして実現される。 (G, K) をコンパクト半単純対称対とする。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を (G, K) に対応する G のリー環 $\mathfrak{g}$ の直和分解とする。 $X \in \mathfrak{m}$ を通る線形イソトローピー作用の軌道 $M = \text{Ad}(K)(X)$ が、 $\mathfrak{m}$ の $\text{Ad}(K)$ -不変内積により対称空間構造を持つとき、 M を対称 R 空間という。

$\mathfrak{a}$ を X を含む $\mathfrak{m}$ の極大可換部分空間とし、 $N_K(\mathfrak{a})$ を $\mathfrak{a}$ に関する K の正規化群とする。このとき、 M 上の任意の極大対蹠集合は $A = N_K(\mathfrak{a})(X)$ と合同となる。

とくに、対称 R 空間 M においても等長変換群の部分群で、 A に推移的に作用するものが存在している。

以下、対蹠集合に関して、それに推移的に作用する等長変換群の部分群が存在するとき単に等質ということにする。いまみた 2 つの例により、極大対蹠集合の配置を考える上で次の問題を考えることができる。

問題 2. 任意のコンパクト対称空間の任意の極大対蹠集合は等質であるか？

そこで、本講演では対蹠集合にある種の連結性の概念を導入することで、極大対蹠集合が等質であるための十分条件を与える。

2 準備

M を連結コンパクトリーマン対称空間であるとする。

M の閉測地線たちの長さは、離散的な値をとることに注意しておく。これより、 M 上には最短の長さの閉測地線、すなわち最短閉測地線がある。また、任意の対蹠的な 2 点には、この 2 点を通る閉測地線が必ず存在することにも注意しておく。

定義 2.1 (対蹠的な 2 点の連結性). $p, q \in M$ を対蹠的な 2 点とする。 p, q を通る M 上の最短閉測地線が存在するとき、 p と q は連結であると定める。

例 4 (球面について). 球面 S^n において、 $p \in S^n$ に対して $p, -p$ は対蹠的な 2 点だった。 また、 S^n の測地線はすべて大円によって与えられる。 とくに、大円は閉測地線であるので、すべての大円は最短閉測地線であるといえる。したがって、 p と $-p$ は連結である。

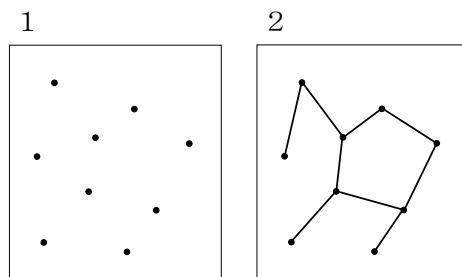
対蹠集合の連結性を次で定める。

定義 2.2. A を M 上の対蹠集合とする。 任意の $p, q \in A$ に対して、 p, q を含む A 上の点列 $\{p_i\}_{i=1}^k$ で各 $1 \leq i \leq k-1$ に対して、 p_i, p_{i+1} が連結であるものが存在するとき、 A を連結な対蹠集合と定める。

対蹠集合の連結性に関して、

- 1 対蹠集合の各点を点として配置する。
- 2 連結な 2 点を線でつないでグラフをつくる。

こうしてグラフが得られるがこのグラフが連結であることと、その対蹠集合が連結であることが同値になる。このグラフを、単に対蹠集合のグラフということにする。



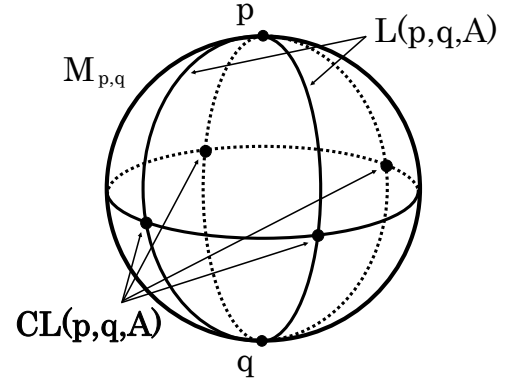
命題 2.3. A を M の任意の対蹠集合で、連結な 2 点を含むとする。 $p, q \in A$ を連結な 2 点とする。このとき、次が成り立つ。

- (1) 各点对称 $s_r(r \in A)$ について不変であるような、 p, q を通る M 上の最短閉測地線が存在する。
- (2) p, q を通る M 上の任意の最短閉測地線を含む、全測地的球面 $M_{p,q}$ が存在する。

定義 2.4. A を連結な 2 点を含む対蹠集合とする。 $p \in A$ とし、 $A_p := \{r \in A; r, p \text{ は連結} \}$ とおく。

- $L(p, q, A) : p, q$ を通る最短閉測地線で各 $s_r(r \in A)$ について不変なものの全体
- $L(p, A) := \bigcup_{q \in A_p} L(p, q, A)$
- $L(A) := \bigcup_{p, q \in A} L(p, q, A)$ ただし、 $p, q \in A$ は A 上の連結な 2 点全体を動くものとする。

- $CL(p, q, A) : L(p, q, A)$ の各測地線の p と q の中点全体
- $CL(p, A) := \bigcup_{q \in A_p} CL(p, q, A)$
- $CL(A) := \bigcup_{p, q \in A} CL(p, q, A)$ ただし, $p, q \in A$ は A 上の連結な 2 点全体を動くものとする.



$W \subset CL(A)$ を任意の部分集合とする.

- G_W : 各点对称 $s_x (x \in W)$ により生成される群.
- $W = CL(A)$ のとき G_W を G_A , $W = CL(p, A)$ のとき G_W を $G_{p,A}$ とかく.

$G_A \neq \phi$ であることと A が連結な 2 点を持つことは同値である. 連結な 2 点に関して, 次の補題が成り立つことが知られている.

補題 2.5. A を対蹠集合とし, 連結な 2 点をもつとする. このとき, 次が成り立つ.

- (1) 任意の $p \in A, x \in CL(q, A) (q \in A)$ に対して次が成り立つ.

$$s_p s_x = s_x s_p \quad \text{または} \quad s_p s_x = s_q s_x s_q s_p$$

- (2) $m \in M$ を A の各点と対蹠的な点とし, $x \in CL(q, A)$ とする. このとき, 次が成り立つ.

$$s_q s_x s_q (m) = s_x (m)$$

3 主結果

命題 3.1. A を M の対蹠集合とし, 連結な 2 点をもつとする. このとき, 任意の $g \in G_A$ について $A \cup g(A)$ は対蹠集合である.

証明. 任意の $p, q \in A$ に対して, p と $g(q)$ が対蹠的になることを示せばよい. $g \in G_A$ は $g = s_{x_m} \cdots s_{x_1} (x_i \in CL(A))$ と書けるので, m に関する帰納法で示す. $x_i \in CL(p_i, q_i, A) (p_i, q_i \in A)$ とする.

$m = 1$ のとき補題 2.5 より

$$s_p(s_{x_1}(q)) = \begin{cases} s_{x_1} s_p(q) = s_{x_1}(q) \\ s_{p_1} s_{x_1} s_{p_1} s_p(q) = s_{p_1} s_{x_1} s_{p_1}(q) = s_{x_1}(q). \end{cases}$$

$m-1$ まで成り立つとする．やはり補題 2.5 より次のようにできる．

$$\begin{aligned}
s_p(s_{x_m} \cdots s_{x_1}(q)) &= (\epsilon_m s_{x_m} \epsilon_m)(\epsilon_{m-1} s_{x_{m-1}} \epsilon_{m-1}) \cdots (\epsilon_1 s_{x_1} \epsilon_1) s_p(q) \\
&= (\epsilon_m s_{x_m} \epsilon_m)(\epsilon_{m-1} s_{x_{m-1}} \epsilon_{m-1}) \cdots (\epsilon_1 s_{x_1} \epsilon_1)(q) \\
&= (\epsilon_m s_{x_m} \epsilon_m)(s_{x_{m-1}} \cdots s_{x_1}(q)) \\
&= s_{x_m} s_{x_{m-1}} \cdots s_{x_1}(q)
\end{aligned}$$

ただし, $\epsilon_i = s_{p_i}$ または $\text{id}|_M$ である．これより, 主張は示せた．

□

この定理により, 次の系を得られる．

系 3.2. 任意の部分集合 $W \subset CL(A)$ に対して, $G_W(A)$ は対蹠集合である．

系 3.3. A を極大対蹠集合で連結な 2 点を持つものとする．このとき, $G_W(A) \subset A$ ．

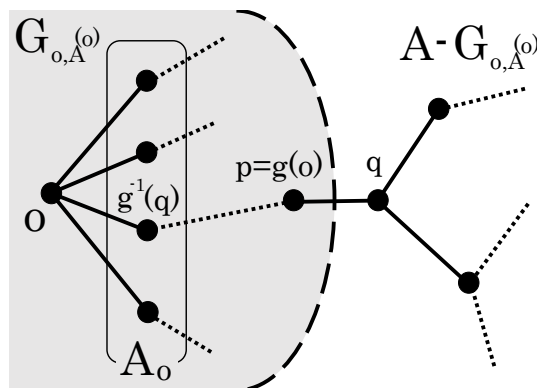
系 3.3 を応用して, 極大対蹠集合が等質であるための十分条件を考えていく．

命題 3.4. A を連結な対蹠集合で, $G_{o,A}$ の作用により不変であるとする．このとき, $G_{o,A}(o) = A$ となる．

証明．

$A_o \cup \{o\} \subset G_{o,A}(o)$ がわかる． $A - G_{o,A}(o) \neq \emptyset$ であるとする．

A の連結性から, ある $p \in G_{o,A}(o), q \in A - G_{o,A}(o)$ で p と q が連結になるようなものが存在する． $p \in G_{o,A}(o)$ であるので, ある $g \in G_{o,A}$ により $p = g(o)$ とかける． $G_{o,A}$ の元による作用は M 上の等長変換でもあるので, 対蹠的な 2 点の連結性を保つ．したがって, $g^{-1}(q) \in A_o$ となる．いま, $A_o \subset G_{o,A}(o)$ であるので $q \in G_{o,A}(o)$ となる．しかし, これは矛盾．よって, $A = G_{o,A}(o)$ となる．



□

連結な極大対蹠集合は, この定理の条件を満たしていることがわかる．したがって, 次を得る．

定理 3.5. 極大対蹠集合は連結であるなら等質である．

参考文献

- [1] B.Y. Chen, T.Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., **308**(1988), 273-297
- [2] M.S.Tanaka, H.Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math, **50**(2013), 161-169
- [3] M.S.Tanaka, H.Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan, 64 no.4 (2012), 1297-1332
- [4] M.Takeuchi, Two-number of symmetric R-spaces, Nagoya Math.J., **115**(1989), 43-46