

Piatetski-Shapiro 列からなる等差数列の分布について

齋藤 耕太 (Kota Saito)

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
博士後期課程 1 年

m17013b@math.nagoya-u.ac.jp

概要

本講演では、 $n^\alpha, (n+r)^\alpha, \dots, (n+(k-1)r)^\alpha$ の整数部分が等差数列になるような正整数 n の分布について議論する。ただし、 r は固定された正整数で α は $1 < \alpha < 2$ を満たす固定された実数である。そのような n を集めてきた集合の N 以下の個数に関して、漸近式を与える。本研究は吉田裕哉氏 (名古屋大学) との共同研究である。

1 はじめに

実数列 $(s_j)_{j=0}^{k-1}$ が長さ k の等差数列であるとは、実数 s と正の実数 $r > 0$ が存在して、

$$s_j = s + rj$$

が任意の $j = 0, 1, \dots, k-1$ に対して成り立つことをいう。また、実数の集合 P が長さ k の等差数列であるとは、小さい順に P の元を $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$ と並べたとき、 $(s_j)_{j=0}^{k-1}$ が数列の意味で長さ k の等差数列となることを言う。本講演では、与えられた集合がどのくらい長い等差数列を含むかという問題について扱う。例えば、平方数全体の集合が与えられたとしよう：

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \dots$$

平方数からなる長さ 3 の等差数列は存在するだろうか？答えは存在する。実際、 $\{1, 25, 49\}$ が平方数からなる長さ 3 の等差数列として挙げられる。ちなみに、任意の自然数 n に対して、 $\{n^2, (5n)^2, (7n)^2\}$ は平方数からなる長さ 3 の等差数列となることから、平方数全体の集合は長さ 3 の等差数列を無限個含むことがわかる。一方で、長さ 4 の平方数からなる等差数列は存在しない。Dickson の本 [1, pp. 440 and 635] によると、この問題は Fermat によって 1640 年に挙げられ、1780 年に Euler によって解決された。

そこで、本講演では、 α を $1 \leq \alpha < 2$ を満たす実数とし、数列 $(\lfloor n^\alpha \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ について議論する。ただし、 $\lfloor x \rfloor$ を実数 x を越えない最大の整数と定義する。また、数列 $(a_n)_{n=1}^\infty$ が長さ k の等差数列を含むとは、 $P \subseteq \{a_n : n = 1, 2, \dots\}$ となる長さ k の等差数列 P が存在するこ

とをいう．一般に数列 $(\lfloor n^\alpha \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ は α が整数でない正の実数のとき、**Piatetski-Shapiro** 列という．例えば、

$$\begin{aligned}\{\lfloor n^{1.3} \rfloor : n = 1, 2, \dots\} &= \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 17, \dots\} \\ \{\lfloor n^{1.9} \rfloor : n = 1, 2, \dots\} &= \{1, 3, 8, 13, 21, 30, 40, 51, 65, \dots\}\end{aligned}$$

が例として挙げられる．Piatetski-Shapiro 列という名前は、 $1 < \alpha < 12/11$ のとき、数列 $(\lfloor n^\alpha \rfloor)_{n=1}^\infty$ が無限個の素数を含むことを示した Piatetski-Shapiro にちなんで名付けられている [3]．では、 $1 \leq \alpha < 2$ のとき、Piatetski-Shapiro 列はどのくらい長い等差数列を含むだろうか？先の研究 [4] で、講演者と共同研究者の吉田氏は、各 $1 \leq \alpha < 2$ に対して、Szemerédi の定理を Piatetski-Shapiro 列に拡張し、Piatetski-Shapiro 列が任意の長さの等差数列を含むことを証明した．より厳密には次を示した：

定理 1 ([4, Theorem 1.4]). 各整数 $k \geq 3$ と、実数 $1 \leq \alpha < 2$,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\max_{M \in \mathbb{N}} |A \cap [M, M + N - 1]|}{N} > 0$$

を満たす任意の自然数の部分集合 A に対して、 $P \subset A$ なる長さ k の等差数列が存在して、 $\{\lfloor n^\alpha \rfloor : n \in P\}$ も等差数列となる．特に、 $\{\lfloor n^\alpha \rfloor : n \in A\}$ は任意の長さの等差数列を含む．

定理 1 で $\alpha = 1$ とすると、これは Szemerédi の定理と同じもので Szemerédi が 1975 年に証明した [5]．定理 1 に $A = \mathbb{N}$ を適用することで、 $1 \leq \alpha < 2$ のとき、任意の $k \geq 3$ に対して、長さ k の等差数列 P が存在して、 $\{\lfloor n^\alpha \rfloor : n \in P\}$ もまた等差数列となることがわかる．しかし、証明に Szemerédi の定理を使っている影響で、どの等差数列 P 上で Piatetski-Shapiro 列が等差数列になるかはわからなかった．そこで、本講演では次の関数を考える：

$$P_{\alpha,r,k}(N) := \#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : (\lfloor (n + jr)^\alpha \rfloor)_{j=0}^{k-1} \text{ は等差数列}\}.$$

結果として、次の極限を得た：

定理 2. 任意の実数 $1 < \alpha < 2$ と整数 $k \geq 3$ と整数 $r \geq 1$ に対して、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P_{\alpha,r,k}(N)}{N} = \frac{1}{k-1}. \quad (1)$$

ここで、 $\alpha = 1$ のとき、(1) の左辺の値は 1 になり、 $\alpha = 2$ のときは 0 となる．しかし、定理 2 により、 $1 < \alpha < 2$ のとき、 α に依らず (1) の左辺の値が $1/(k-1)$ となることがわかった．実際には定理 2 よりも強い結果を得たが、それについてはセクション 2 で述べる．

2 主結果

定理 3. 実数 $1 < \alpha < 2$ と整数 $k \geq 3$ と整数 $r \geq 1$ を固定する．このとき、

$$P_{\alpha,r,k}(N) = \frac{1}{k-1}N + O_{\alpha,r,k}\left(N^{(4+\alpha)/6} \log^{1/2} N + N^{(3-\alpha)/2}\right)$$

が任意の $N \geq 1$ に対して成り立つ．

定理 3 から $P_{\alpha,r,k}(N)/N$ の極限が $1/(k-1)$ に収束することがわかる．すなわち，(1) が成立する．さらに，小区間での分布についても次の結果を得た．

定理 4. 実数 $1 < \alpha < 2$ ，整数 $k \geq 3$ と整数 $r \in \mathbb{N}$ を固定する．このとき，ある $c = c(\alpha, r, k) > 0$ が存在して，各 $x \geq 1$ に対して，小区間 $[x, x+cx^{2-\alpha}]$ は数列 $(\lfloor (n+rj)^\alpha \rfloor)_{j=0}^{k-1}$ が等差数列になるような自然数 n を少なくとも 1 つ含む．

極限 (1) は一様分布論を用いて一般化することができる．主張を述べる前に一様分布の定義について述べよう．混乱のない限り， $\{x\}$ を $x \in \mathbb{R}$ の小数部分と定義し，任意の $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\{\mathbf{x}\} = (\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_d\})$$

とおく．点列 $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を各 $n \in \mathbb{N}$ に対して， $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$ を満たすものとしたとき， $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が法を 1 として一様に分布するとは

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \# \left\{ n \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \{\mathbf{x}_n\} \in \prod_{i=1}^d [a_i, b_i) \right\} = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$$

が任意の $0 \leq a_i < b_i \leq 1$ に対して成り立つことをいう．一様分布論については [2] が詳しい．

定理 5. 関数 $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を 2 階微分可能な関数とし， $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$ と $\inf_{x \geq 1} f'(x) \geq 1$ を満たすものとする．点列 $((f(n), f'(n)))_{n \in \mathbb{N}}$ が法を 1 として一様に分布するとき，任意の $r \geq 1$ と $k \geq 3$ に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \# \{ n \in \{1, 2, \dots, N\} : (\lfloor f(n+rj) \rfloor)_{j=0}^{k-1} \text{ が等差数列} \} = \frac{1}{k-1}$$

が成立する．

定理 3 のような漸近式を得るためにはより詳細な f の微分の情報が必要となるだろう．講演では時間の許す限り，証明や今後の展望について述べたいとおもう．

謝辞

本研究は名古屋大学の吉田裕哉氏との共同研究である．また，本研究は JSPS の課題番号 19J20878 の援助を受けた．

参考文献

- [1] L. E. Dickson. *History of the Theory of Numbers. Vol. II: Diophantine Analysis*, Chelsea Publishing Co., 1966.

- [2] L. Kuipers and H. Niederreiter, Uniform distribution of sequences. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1974. xiv+390 pp.
- [3] I. I. Piatetski-Shapiro. On the distribution of prime numbers in sequences of the form $[f(n)]$, *Mat. Sbornik N.S.* **33** (75) (1953), 559–566.
- [4] Arithmetic progressions in the graphs of slightly curved sequences. *J. Integer Seq.* **22** (2019), no. 2, Art. 19.2.1, 25 pp.
- [5] E. Szemerédi. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, *Acta Arith.* **27** (1975), 199–245.