

KP 方程式のソリトン解のグラフとソリトングラフの比較

津田塾大学大学院 理学研究科 数学専攻

齋藤千尋 (Chihiro SAITO)

概要

Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式は、浅水波を記述する非線形波動方程式の 1 つとして知られており、ソリトン解と呼ばれる指数関数で表される解をもつ。最近の研究ではソリトン解の形は、従来考えられていたよりも複雑な形をしていることが発見された。本講演では、KP 方程式のソリトン解の形を考察する。また、Kodama-Williams の論文で導入されたソリトングラフと、ソリトン解の形を比較して得られた結果を紹介する。

1 導入

非線形偏微分方程式の厳密解を求めることは一般には大変難しく、解の存在すら保証されないものが多い。しかし、非線形可積分方程式系と呼ばれる、具体的に解を求めることのできる一群の方程式が存在する。本講演で扱う KP 方程式が、その代表的なものである。KP 方程式は浅水波 (浅い水面を進行するソリトン) を記述する非線形波動方程式の 1 つとして知られている。ソリトンとは孤立波の一種である。ソリトンは、同じ形を保ったまま伝播し、さらにソリトン同士が衝突してもそれぞれの形は変化しない、という性質をもつ。

KP 方程式は、 $2 + 1$ 次元 (空間 2 次元 (x, y) + 時間 1 次元 t) の非線形偏微分方程式であり、

$$(-4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3u_{yy} = 0 \quad (1)$$

で表される (下付の添字は、その変数での微分を表す)。KP 方程式 (1) において u を

$$u = 2(\log \tau)_{xx} \quad (2)$$

とすると、 τ に関する双線形方程式

$$(D_x^4 - 4D_x D_t + 3D_y^2)\tau \cdot \tau = 0 \quad (3)$$

に変換できる。ただし、 D_* は広田微分とする。(3) を KP 方程式の双線形形式という。

1.1 ソリトン解のグラフ

自然数 N, M は $N < M$ をみたすとする. 以下で使う記号 $\binom{[M]}{N}$ を導入する. この記号は, $[M] := \{1, \dots, M\}$ の集合の中の N 個の元からなる部分集合のなす集合である.

$N \times M$ 行列 $A := (a_{ij})$ と, M 個のパラメータ $\kappa_1 < \dots < \kappa_M$ に対して, 次の定理が成り立つ.

定理 1.1. 次で与えられる関数 τ は, KP 方程式の双線形形式 (3) の解である :

$$\tau(x, y, t) = \sum_{I \in \binom{[M]}{N}} \Delta_I(A) K_I e^{\sum_{i \in I} \theta_i(x, y, t)}, \quad \theta_i(x, y, t) = \kappa_i x + \kappa_i^2 y + \kappa_i^3 t. \quad (4)$$

これを, ソリトン解という. ここで, $\Delta_I(A)$ は $I = \{i_1, i_2, \dots, i_N\}$ に対応する列を選んで作成した, 行列 A の $N \times N$ 小行列式であり, K_I は $\{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N\}$ の差積である. つまり,

$$\Delta_I(A) = \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{Ni_1} & \cdots & a_{Ni_N} \end{vmatrix}, \quad K_I := \prod_{1 \leq m < l \leq N} (\kappa_{i_l} - \kappa_{i_m})$$

である.

ソリトン解は, 指数関数の和で表すことができるのが特徴である. ここで, ソリトン解 τ の正値性について考える.

$$\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_M \quad (5)$$

より $K_I > 0$ ゆえ, 行列 A を

$$\Delta_I(A) \geq 0 \quad \forall I \in \binom{[M]}{N} \quad (6)$$

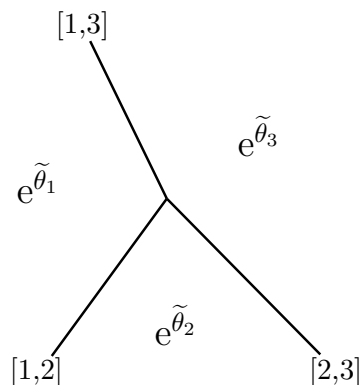
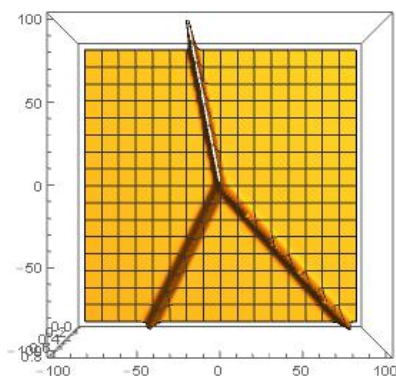
をみたすようにとれば, すべての x, y, t に対して, $\tau(x, y, t) \geq 0$ となる. このとき, 元の $u = 2(\log \tau)_{xx}$ は特異点をもたないので, 物理的に起こり得る解である. したがって, 「 $\Delta_I(A) \geq 0$ をみたす行列 A が決まれば, ソリトン解が決まる」といえる. $\Delta_I(A) \geq 0$ をみたす行列 A は, 後述する I-diagram と呼ばれる組合せ論的に定義された図形から構成される.

以下では, $N = 1, M = 3$ を例にソリトン解の構造を考える. このとき, ソリトン解は

$$\tau = a_{11}e^{\theta_1} + a_{12}e^{\theta_2} + a_{13}e^{\theta_3}, \quad \theta_j = \kappa_j x + \kappa_j^2 y + \kappa_j^3 t$$

である. ここで, $\tilde{\theta}_j = \theta_j + \log a_{1j}$ とおくと, $\tau = e^{\tilde{\theta}_1} + e^{\tilde{\theta}_2} + e^{\tilde{\theta}_3}$ となる. ソリトンの形は, ソリトン解の主要項 (τ に含まれる指数関数の中で一番大きい項) に注目して解析することができる. τ

の主要項が $e^{\tilde{\theta}_i}$ ($i = 1, 2, 3$) の場合, $\tau \approx e^{\tilde{\theta}_i}$ と近似できるので, $u = 2(\log \tau)_{xx} \approx 2(\tilde{\theta}_i)_{xx} = 0$ となる. つまり, 主要項が現れる部分では, 高さがほぼ 0 に等しい. $e^{\tilde{\theta}_i}$ が主要項になる領域と $e^{\tilde{\theta}_j}$ が主要項になる領域の境界に直線 $\tilde{\theta}_i = \tilde{\theta}_j$ が現れ, $\tilde{\theta}_i = \tilde{\theta}_j$ の近くのみグラフが見える. $e^{\tilde{\theta}_i}$ が主要項になる領域と $e^{\tilde{\theta}_j}$ が主要項になる領域の境界に現れるソリトンのことを $[i, j]$ -ソリトンと呼ぶ.



1.2 ソリトングラフ

ソリトングラフは, ソリトン解の主要項 (τ に含まれる指数関数の中で最大の項) に注目して解析することから発想を得ている. 主要項があるところでは, $u \approx 0$ となるので, 主要項の境界がソリトンとして見えるのである. これを数学的に議論するために, 以下では tropical limit という極限を導入して主要項を取り出し, ソリトングラフを定義する.

$N \times M$ 行列 A に対して, $\mathcal{M}(A) := \{I \in \binom{[M]}{N} : \Delta_I(A) \neq 0\}$ とする. 変数 (x, y, t) を $\varepsilon > 0$ を用いて $x \rightarrow \frac{x}{\varepsilon}$, $y \rightarrow \frac{y}{\varepsilon}$, $t \rightarrow \frac{t}{\varepsilon}$ と変換すると, (4) より

$$\tau_A \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon} \right) = \sum_{J \in \mathcal{M}(A)} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \Theta_J(x, y, t) + \log \Delta_I(A) K_I \right\},$$

$$\Theta_J(x, y, t) = \sum_{j \in J} \theta_j(x, y, t)$$

となる.

定義 1. 関数 $\tau_A(x, y, t)$ の tropical limit [5] を

$$f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\varepsilon \log \tau_A)$$

で定義する.

例えば, $\tau(x, y, t) = ae^{\theta_1} + be^{\theta_2} + ce^{\theta_3}$ ($a, b, c > 0$) の場合で考えると,

$$\tau_A \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon} \right) = ae^{\frac{\theta_1(x, y, t)}{\varepsilon}} + be^{\frac{\theta_2(x, y, t)}{\varepsilon}} + ce^{\frac{\theta_3(x, y, t)}{\varepsilon}}$$

であるので, $\theta_1 > \theta_2, \theta_3$ の場合,

$$\begin{aligned} \varepsilon \log \tau_A &= \varepsilon \log \left(ae^{\frac{\theta_1}{\varepsilon}} + be^{\frac{\theta_2}{\varepsilon}} + ce^{\frac{\theta_3}{\varepsilon}} \right) \\ &= \varepsilon \log e^{\frac{\theta_1}{\varepsilon}} \left(a + be^{\frac{\theta_2 - \theta_1}{\varepsilon}} + ce^{\frac{\theta_3 - \theta_1}{\varepsilon}} \right) \\ &= \theta_1 + \varepsilon \log \left(a + be^{\frac{\theta_2 - \theta_1}{\varepsilon}} + ce^{\frac{\theta_3 - \theta_1}{\varepsilon}} \right) \end{aligned}$$

となる. ここで, $\theta_2 - \theta_1 > 0, \theta_3 - \theta_1 > 0$ より, $e^{\frac{\theta_2 - \theta_1}{\varepsilon}} \rightarrow 0, e^{\frac{\theta_3 - \theta_1}{\varepsilon}} \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow +0$) ゆえ,

$$f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\varepsilon \log \tau_A) = \theta_1$$

とわかる. つまり,

$$f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t) = \max_{J \in \mathcal{M}(A)} \{ \Theta_J(x, y, t) \}$$

といえる.

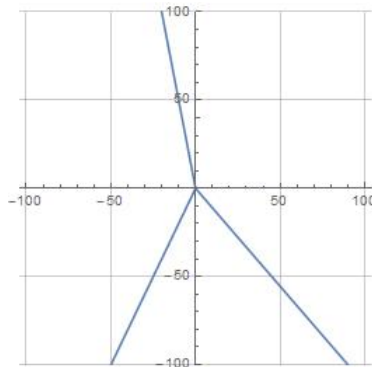
定義 2 (ソリトングラフ). 各 t に対して, ソリトングラフ (Soliton Graphs) を,

$$\{(x, y) \mid \exists I \neq J, f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t) = \Theta_I(x, y, t) = \Theta_J(x, y, t)\}$$

で定義する. つまり, 「2つ以上の $\Theta_J(x, y, t)$ が最大値をとる点」である.

以上より, ソリトングラフは, 主要項でない指数項を省いて, さらに 0 でない $\Delta_I(A)K_I$ がすべて 1 になった場合を考えていることになる. 一方でソリトン解は, 主要項でない指数項も係数 $\Delta_I(A)K_I$ も考慮している. ゆえにソリトン解とソリトングラフは同じものではない. したがって, それがどの程度似ているのかを比較することは興味ある問題である.

下のグラフは, $N = 1, M = 3$ に対応するソリトングラフである. ソリトングラフの構成方法については, 後ほど説明する.



2 Le-diagram から行列 A の構成

以下では、 $\Delta_I(A) \geq 0$ をみたす行列 A を構成する方法を説明する。

定義 3 (ヤング図形). $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l \geq 0$ をみたす $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ に対して、上から順に λ_i ($i = 1, \dots, l$) 個ずつ箱を左詰めにならべたものをヤング図形という。ヤング図形を $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ とかく。横の並びを行といい、上から第 1 行、第 2 行などと呼ぶ。縦の並びを列といい、左から第 1 列、第 2 列などと呼ぶ。

以下では、 $1 \leq N < M$ をみたす (N, M) を 1 つ固定し、縦 N 横 $(M - N)$ の長方形の中に入るヤング図形を考える。縦 N 横 $(M - N)$ の長方形より真に小さな長方形には含まれないようなヤング図形のことを、既約なヤング図形という。

定義 4 (既約な J-diagram). ヤング図形の箱の中に \circ をいくつか配置した図形を考える。それが J-diagram であるとは、配置した \circ の左側全部もしくは上側全部が \circ であることである。J-diagram が既約であるとは、次の条件をみたすときをいう：

(a) J-diagram を構成するヤング図形 λ が既約である

(b) λ の各行、各列は、少なくとも 1 つ空箱を含む

定義 5 (reading order). ヤング図形 λ の各箱に、各行で右から左に数が狭義増大、各列で下から上に数が狭義増大というルールで、1 から箱の総数までの自然数を並べたものを、reading order という。

定義 6 (s_i の入ったヤング図形). ヤング図形 λ の各箱に、 s_i ($1 \leq i \leq M - 1$) を次のルールで配置する。まず左上角の箱には、 s_{M-N} を入れる。 s_{M-N} の右隣の箱には s_{M-N-1} を、すぐ下の箱には s_{M-N+1} を入れる。このように、 s_i の右隣の箱には s_{i-1} を入れ、すぐ下の箱には s_{i+1} を入れる、という作業をヤング図形の箱がすべて埋まるまで続ける。これは 1 つのヤング図形に対して、1 通りに決まる。

定義 7 (行列 ϕ_i). $1 \leq i \leq M - 1$ に対して、 $M \times M$ の単位行列の中に 2×2 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を埋め込んだものを、行列 ϕ_i と定義する。つまり、

$$\phi_i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a & b & \\ & & c & d & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

とする。ここで、 a は右下角から数えて $(i+1)$ 番目の対角成分である。さらに、この ϕ_i を用いて 2つの行列を

$$y_i(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}, \quad z_i = \phi_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義する。ここで、 $p > 0$ はパラメータである。

定義 8 (J-diagram から行列 g)。J-diagram を 1つ考えて、それを構成するヤング図形 λ の reading order を 1つ決める。ヤング図形 λ の箱の総数を m とする。行列 g を、 g_l ($l = 1, \dots, m$) の積で

$$g := g_1 g_2 \cdots g_m$$

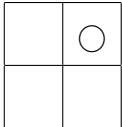

と定義する。このとき、J-diagram の箱が \square なら $g_l = y_{i_l}(p_l)$ 、 \circ なら $g_l = z_{i_l}$ とする。ここで、 l は reading order であり、 i_l は l に対応する s_i の添字である。

定義 9 (行列 g から行列 A)。縦 N 横 $(M-N)$ の長方形の中に入る J-diagram から作成した $M \times M$ 行列 g において、第 1 列から第 N 列の列ベクトルを取ってきて、第 $(N-k+1)$ 列の要素を下から読み、それを左から並べて行ベクトルを作る。その行ベクトルを k 行とする行列を A とする。つまり、

$$g = \begin{pmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{N,1} & \cdots & g_{M,1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{1,M} & \cdots & g_{N,M} & \cdots & g_{M,M} \end{pmatrix} \mapsto A = \begin{pmatrix} g_{N,M} & \cdots & g_{N,1} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{1,M} & \cdots & g_{1,1} \end{pmatrix}$$

である。得られる行列 A は、 $N \times M$ 行列である。

例 1.

J-diagram が  で、reading order が  の場合 $\begin{pmatrix} s_2 & s_1 \\ s_3 & s_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} g &= y_2(p_1) y_3(p_2) z_1 y_2(p_4) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & p_1 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ & p_2 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & & p_4 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & 1 & 0 & 0 \\ p_1 p_2 & p_1 & 0 & -1 \\ 0 & p_4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、 $A = \begin{pmatrix} p_4 & p_1 & 1 & 0 \\ 0 & p_1 p_2 & p_2 & 1 \end{pmatrix}$ を得る。構成した行列 A は $\Delta_I(A) \geq 0$ をみたしている。

3 Le-diagram からソリトングラフの構成

Kodama-Williams のアルゴリズムを用いると, J-diagram からソリトングラフを構成できる.

まず J-diagram からソリトングラフを構成する過程で用いる, pipedream を導入する:

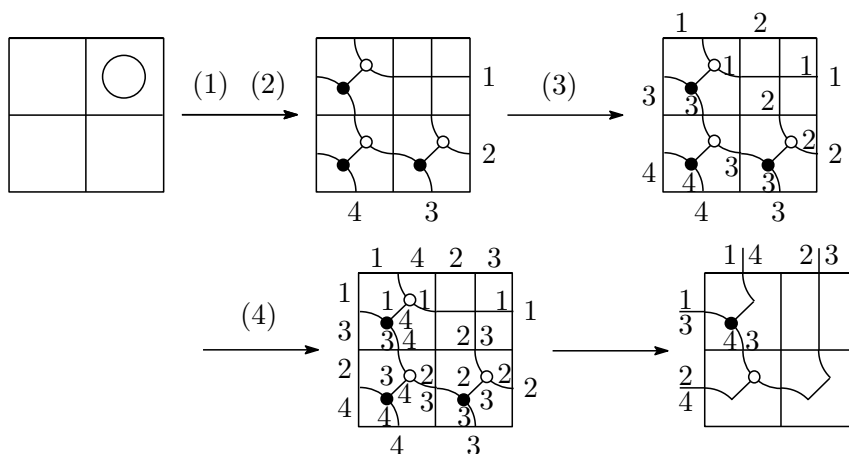
1. J-diagram から始めて, 空箱と○の入った箱を次のように置き換える.



2. J-diagram の右・下の境界に沿って, 右上角から左下角まで時計回りに 1 から M までラベルをつける.
3. まずは, 右・下の境界から始めて bridge を通らず pipe のみを通して左・下の境界にたどりつくまで進む. その際, 1 つの箱を出るたびに 2. でつけたラベルを pipe につけていく.
4. 次に, 右・下の境界から始めて ●なら右に曲がり○なら左に曲がるというルールで, 左・下の境界にたどりつくまで進む. その際, 1 つの箱を出るたびに 2. でつけたラベルを pipe につけ, さらに, bridge を通るたびに bridge にもつける.

pipedream の, 3. と 4. でつけた添字が 1 つだけの pipe を削除する. さらに, 出ている pipe と bridge の数の和が 2 である ●と○を消去する. こうしてできた図を reduced pipedream という.

例 2.



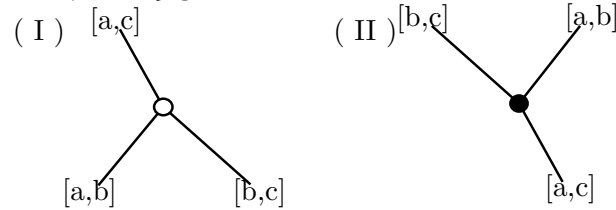
reduced pipedream によりグラフの概形が決まる. 得られた reduced pipedream からソリトングラフを描くには, 「直線の傾き」と「○と●で表される頂点の座標」が必要である. 直線 $[i, j]$ は, $\theta_i = \theta_j$ で与えられ,

$$[i, j]: x + (\kappa_i + \kappa_j)y + (\kappa_i^2 + \kappa_i\kappa_j + \kappa_j^2)t = 0$$

で表される。頂点の座標 $v_{[a,b,c]}$ は, $\theta_a = \theta_b = \theta_c$ で与えられ,

$$v_{[a,b,c]} = ((\kappa_a \kappa_b + \kappa_a \kappa_c + \kappa_b \kappa_c)t, -(\kappa_a + \kappa_b + \kappa_c)t)$$

で表される。 $a < b < c$ となる $[a, b], [a, c], [b, c]$ は, ある 1 点 $v_{[a,b,c]}$ で交わる Y ソリトンを構成する。 Y ソリトンには 2 つのタイプがある :

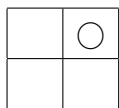


ソリトングラフを構成する Kodama-Williams のアルゴリズムを導入する :

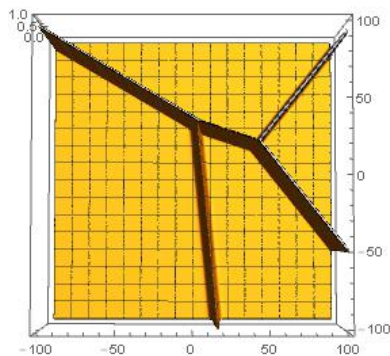
アルゴリズム 10 (既約な J-diagram からソリトングラフ). [1]

1. J-diagram から reduced pipedream を描く.
2. $v_{[a,b,c]} = ((\kappa_a \kappa_b + \kappa_a \kappa_c + \kappa_b \kappa_c)t, -(\kappa_a + \kappa_b + \kappa_c)t$ ($a < b < c$) の形で, \circ と \bullet に座標を与える.
3. xy 平面上にこれらの点をプロットし, それぞれの点に 3 本の直線をひく. もし \circ なら (I) のように, もし \bullet なら (II) のように直線 $[i, j]$ をひく.
4. もし 1. の図形で, \circ や \bullet をもたない線で添字をもつものがあれば, 無限の直線 $[i, j]$ をかく.

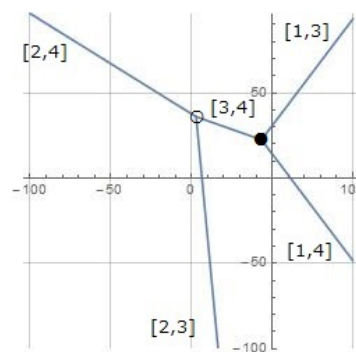
4 ソリトン解のグラフとソリトングラフの比較



: ソリトン解のグラフ



ソリトングラフ



ソリトン解のグラフとソリトングラフは, グラフの概形は似ており, グラフを構成しているそれぞれの直線の傾きはほぼ同じである.

参考文献

- [1] Yuji Kodama and Lauren Williams, KP Solitons and total positivity for the Grassmannian, *Inventiones Mathematicae* 198, 637-699(2014).
- [2] Yuji Kodama, KP Solitons and Grassmannians Combinatorics and Geometry of Two-Dimensional Wave Patterns, Springer(2017).
- [3] Yuji Kodama, Solitons in Two-Dimensional Sallow Water, SIAM(2018).
- [4] 広田 良吾, 直接法によるソリトンの数理, 岩波書店 (1992).
- [5] T.Tokihiro, D.Takahashi, J.Matsukidaira and J.Satsuma, From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure, *Physical Review Letters* 76, 3247-3250(1996).