

# FRT 構成法の一般化とその応用

北海道大学大学院 理学院 数学専攻

乙戸勇大 (Yudai OTSUTO)

## 概要

ヤン・バクスター方程式は、双代数の研究において重要な役割を果たす。余擬三角と呼ばれる性質を持つ双代数からはヤン・バクスター方程式の解を構成でき、ヤン・バクスター方程式の解からは余擬三角な双代数を構成できる (FRT 構成法)。この結果は林 (1993) により、有向グラフ上のヤン・バクスター方程式の解と余擬三角な面代数の関係性へと一般化された。本ポスターでは林の結果のさらなる一般化として、有向グラフ上のヤン・バクスター方程式を用いた左双代数の構成法、およびその応用について紹介する。本ポスターの一部内容は澁川陽一氏 (北海道大学) との共同研究に基づく。

## 1 導入

ヤン・バクスター方程式 [1, 9] (YBE) は、双代数やホップ代数の研究において重要な役割を果たしてきた。余擬三角と呼ばれる性質を持つ双代数により YBE の解 (R-行列) が得られる事はよく知られた事実である。これに対し、Faddeev-Reshetikhin-Takhtajan は、R-行列を用いて、双代数を構成した (FRT 構成法 [6])。この双代数は余擬三角であり、上で述べた事実と対をなす主張が得られる。後に FRT 構成法は様々な研究がなされ、林による有限集合上の quiver とその YBE による弱双代数の構成 [7], Etingof-Varchenko による YBE にパラメータを付け加えて一般化したダイナミカル・ヤン・バクスター方程式およびその解 (ダイナミカル R-行列) を用いた  $\mathfrak{h}$ -双代数の構成、およびその表現のなすテンソル圏の研究 [5] がある。一方、Drinfel'd [4] の提唱により、YBE の集合論的解 (ヤン・バクスター写像) の研究も始まり、のちに澁川によりダイナミカル・ヤン・バクスター写像 (DYBM) へと一般化された [13, 14]。また、澁川および竹内は不変条件を持つ有限集合上の DYBM を用いた左双代数の構成およびその表現のなすテンソル圏の研究を行った [15, 16]。

本稿では林の結果 [7] のさらなる一般化、及びその応用について紹介する。[7] の結果は、quiver 上の YBE の解を用いた左双代数の構成法へと拡張できる。また、松本-清水は澁川および竹内 ([13, 14]) による弱双代数、およびそれと同様の設定で構成される林 [7] の弱双代数との間に準同型写像を構成した [8]。本稿では、[7] の結果の拡張を用いた [8] の一般化についても述べる。

本稿は次のように構成される。2 節では [6] に従い、FRT 構成法について紹介する。3 節では [10] に従い、[7] における weak bialgebra の構成法の一般化を行う。具体的には、有限集合  $\Lambda$  上の quiver  $Q$  (source map を  $s$ , target map を  $t$  で表す)、およびそのファイバー積  $Q^{(m)} = Q \times_{\Lambda} \cdots \times_{\Lambda} Q$  ( $m$  は正整数) に関する記号  $\mathbf{e} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$  ( $p, q \in Q^{(m)}, m$  は正整数) を基底とする体  $\mathbb{K}$  上のベクトル空間  $\mathfrak{G}(Q)$  に積を定義し、ある条件を満たす  $\mathbb{K}$ -algebra  $R$  の元の族  $w$  に関する両側イデアル  $\mathfrak{I}_w$  で割つ

たもの  $\mathfrak{A}(w) := R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{A}(w) / \mathfrak{J}_w$  に余積, 余単位射を定義することで左双垂代数が得られる. ただし,  $R^{op}$  は  $R$  の opposite  $\mathbb{K}$ -algebra とする. 4 節では, 3 節の結果を用いた応用について紹介する. 4.1 節では [11] に従い, [15, 16] における左双垂代数の構成法の一般化を行う.  $X$  を有限集合,  $M_{\Lambda}(R)$  を  $\Lambda$  から  $R$  への写像全体のなす  $\mathbb{K}$ -algebra とし,

$$HX := (M_{\Lambda}(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_{\Lambda}(R)^{op}) \bigsqcup \{L_{ab} \mid a, b \in X\} \bigsqcup \{(L^{-1})_{ab} \mid a, b \in X\}$$

とする.  $\mathbb{K}$ -free algebra  $\mathbb{K}\langle HX \rangle$  のある条件を満たす  $M_{\Lambda}(R)$  の元の族  $\sigma$  に関する両側イデアル  $I_{\sigma}$  に関する商を  $A_{\sigma} := \mathbb{K}\langle HX \rangle / I_{\sigma}$  とする. この  $A_{\sigma}$  には左双垂代数の構造が与えられる. 4.2 節では [10] に従い, 4.1 節の左双垂代数  $A_{\sigma}$  と同様の設定のもとで構成される 3 節の左双垂代数  $\mathfrak{A}(w_{\sigma}) := \mathfrak{A}(w)$  との間に準同型写像  $\Phi : \mathfrak{A}(w_{\sigma}) \rightarrow A_{\sigma}$  を構成する. この結果は, [8] の一般化となっている.

なお, 本稿 4.1 節は澁川陽一氏 (北海道大学) との共同研究に基づいている.

## 2 先行研究：双代数の定義と FRT 構成法

本節では [6] に従い, ヤン・バクスター方程式 (YBE) の解を用いた双代数の構成法 (FRT 構成法) を紹介する. なお, この節以降,  $\mathbb{K}$  を体とする.

**定義 2.1.**  $V$  を  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間とする. 線形同型  $R : V \otimes_{\mathbb{K}} V \rightarrow V \otimes_{\mathbb{K}} V$  が以下の関係式を満たすとき, ヤン・バクスター方程式 (YBE) の解であるという.

$$(R \otimes \text{id}_V) \circ (\text{id}_V \otimes R) \circ (R \otimes \text{id}_V) = (\text{id}_V \otimes R) \circ (R \otimes \text{id}_V) \circ (\text{id}_V \otimes R)$$

$\dim_{\mathbb{K}} V = n < \infty$ ,  $V$  の基底を  $\{v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  とする.  $R$  の  $V \otimes_{\mathbb{K}} V$  の基底に関する像を

$$R(v_i \otimes v_j) = \sum_{1 \leq k, l \leq n} c_{kl}^{ij} (v_k \otimes v_l) \quad (1 \leq i, j \leq n, c_{kl}^{ij} \in \mathbb{K})$$

とかく.

集合  $\{t_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$  で生成される  $\mathbb{K}$ -free algebra を  $\mathbb{K}\langle t_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n \rangle$  とする. また, 以下の元により生成される  $\mathbb{K}\langle t_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n \rangle$  の両側イデアルを  $I_R$  とし, その商を  $A_R := \mathbb{K}\langle t_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n \rangle / I_R$  とおく.

$$\sum_{1 \leq x, y \leq n} c_{ik}^{xy} t_{yj} t_{xl} - \sum_{1 \leq x, y \leq n} c_{xy}^{lj} t_{ky} t_{ix} \quad (1 \leq \forall i, j, k, l \leq n)$$

**定義 2.2.**  $B$  を  $\mathbb{K}$ -algebra とする. 3 つ組  $(B, \Delta, \varepsilon)$  が双代数であるとは,  $\Delta : B \rightarrow B \otimes_{\mathbb{K}} B$ ,  $\varepsilon : B \rightarrow \mathbb{K}$  が  $\mathbb{K}$ -algebra の準同型写像であり, 以下の可換図式を満たすことである.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\Delta} & B \otimes_{\mathbb{K}} B \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes \text{id}_B \\ B \otimes_{\mathbb{K}} B & \xrightarrow{\text{id}_B \otimes \Delta} & B \otimes_{\mathbb{K}} B \otimes_{\mathbb{K}} B \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & \swarrow \simeq & \downarrow \Delta & \searrow \simeq & \\ \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} B & \xleftarrow{\varepsilon \otimes \text{id}_B} & B \otimes_{\mathbb{K}} B & \xrightarrow{\text{id}_B \otimes \varepsilon} & B \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} \end{array}$$

定理 2.3 ([6]).  $(A_R, \Delta, \varepsilon)$  は双代数.

$$\begin{aligned}\Delta(t_{ij} + I_R) &= \sum_{1 \leq k \leq n} t_{ik} + I_R \otimes t_{kj} + I_R \\ \varepsilon(t_{ij} + I_R) &= \delta_{i,j}\end{aligned}$$

ここで  $\delta_{i,j} \in \mathbb{K}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) は Kronecker のデルタを意味する.

例 2.4.  $R(v \otimes w) = w \otimes v$  ( $v, w \in V$ ) は YBE の解となる. このとき,  $I_R$  の生成元は

$$t_{ij}t_{kl} - t_{kl}t_{ij} \quad (1 \leq \forall i, j, k, l \leq n)$$

となり.  $A_R$  は  $n^2$ -変数多項式環  $\mathbb{K}[t_{ij} | 1 \leq i, j \leq n]$  と同型である.

### 3 主結果 : 左双垂代数 $\mathfrak{A}(w)$

定理 2.3 の結果は, のちに林 [7] により, 有向グラフ上のヤン・バクスター方程式の解を用いた弱双代数  $\mathfrak{A}(w)$  の構成法へと一般化された. 本節では [7] の結果を左双垂代数  $\mathfrak{A}(w)$  の構成法へと拡張する.

定義 3.1.  $\Lambda$  を空でない集合とする. 2 つの写像  $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}: Q \rightarrow \Lambda$  を持つ集合  $Q$  を  $\Lambda$  上の quiver と呼ぶ.  $\mathfrak{s}$  および  $\mathfrak{t}$  はそれぞれ source map, target map と呼ばれる.

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し, ファイバー積と呼ばれるものを  $Q^{(0)} := \Lambda$  および  $Q^{(m)} := \{q = (q_1, \dots, q_m) \in Q^m \mid \mathfrak{t}(q_i) = \mathfrak{s}(q_{i+1}), 1 \leq \forall i \leq m-1\}$  ( $m > 0$ ) と定義する.  $Q^{(m)}$  ( $m > 0$ ) は  $\mathfrak{s}(q) = \mathfrak{s}(q_1)$ ,  $\mathfrak{t}(q) = \mathfrak{t}(q_m)$  と定義することにより  $\Lambda$  上の quiver となる.  $Q^{(0)}$  も  $\mathfrak{s} = \mathfrak{t} = \text{id}_\Lambda$  により  $\Lambda$  上の quiver である.

$\Lambda$  を空でない有限集合,  $Q$  を  $\Lambda$  上の有限な quiver とする.  $\mathfrak{G}(Q)$  を記号  $\mathbf{e} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$  ( $p, q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) を基底とする  $\mathbb{K}$ -ベクトル空間とする:

$$\mathfrak{G}(Q) := \bigoplus_{p, q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{K} \mathbf{e} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$\mathfrak{G}(Q)$  は以下の積により  $\mathbb{K}$ -algebra となる:

$$\begin{aligned}\mathbf{e} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \mathbf{e} \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} &= \delta_{\mathfrak{t}(p), \mathfrak{s}(p')} \delta_{\mathfrak{s}(q), \mathfrak{t}(q')} \mathbf{e} \begin{bmatrix} pp' \\ qq' \end{bmatrix} \\ 1_{\mathfrak{G}(Q)} &= \sum_{\lambda, \mu \in \Lambda} \mathbf{e} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ただし,  $p, q \in Q^{(m)}, p', q' \in Q^{(n)}, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  である.  $\mathbb{K}$ -algebra  $R$  に対し,  $M_\Lambda(R)$  を  $\Lambda$  から  $R$  への写像全体のなす  $\mathbb{K}$ -algebra,  $\mathbf{w} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in R$  ( $(a, b), (c, d) \in Q^{(2)}$ ) と定義する. また,  $\mathfrak{I}_w$  を以下

の元で生成される  $\mathbb{K}$ -algebra  $\mathfrak{H}(Q) := R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{G}(Q)$  の両側イデアルとする.

$$\begin{aligned} & \sum_{(x,y) \in Q^{(2)}} \mathbf{w} \begin{bmatrix} x & y \\ a & b \end{bmatrix} \otimes 1_R \otimes \mathbf{e} \begin{bmatrix} x \\ c \end{bmatrix} \mathbf{e} \begin{bmatrix} y \\ d \end{bmatrix} \\ & - \sum_{(x,y) \in Q^{(2)}} 1_R \otimes \mathbf{w} \begin{bmatrix} x & c \\ y & d \end{bmatrix} \otimes \mathbf{e} \begin{bmatrix} a \\ x \end{bmatrix} \mathbf{e} \begin{bmatrix} b \\ y \end{bmatrix} \quad (\forall (a,b), (c,d) \in Q^{(2)}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

ただし,  $R^{op}$  は  $R$  の opposite  $\mathbb{K}$ -algebra である.  $w = \{\mathbf{w} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\}_{(a,b),(c,d) \in Q^{(2)}}$  とし,  $\mathfrak{A}(w)$  を商  $\mathfrak{A}(w) := \mathfrak{H}(Q)/\mathfrak{I}_w$  で定義する.

**定義 3.2.** 左双垂代数  $A_L := (A, L, s_L, t_L, \Delta_L, \pi_L)$  は, 以下を満たす 6 つ組である:

1.  $A, L$  は環であり, 環準同型写像  $s_L : L \rightarrow A, t_L : L^{op} \rightarrow A$  は

$$s_L(l)t_L(l') = t_L(l')s_L(l) \quad (\forall l, l' \in L) \quad (3.2)$$

を満たす. また, 以下で左作用と右作用を定義し,  $A$  を  $(L, L)$ -両側加群とみなす.

$$l \cdot a \cdot l' := s_L(l)t_L(l')a \quad (l, l' \in L, a \in A) \quad (3.3)$$

2.  $(L, L)$ -両側加群の準同型写像  $\Delta_L : A \rightarrow A \otimes_L A, \pi_L : A \rightarrow L$  は, 以下の可換図式を満たす.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\Delta_L} & A \otimes_L A & \xrightarrow{\Delta_L \otimes \text{id}_A} & (A \otimes_L A) \otimes_L A \\ \Delta_L \downarrow & & & \nearrow \simeq & \\ A \otimes_L A & \xrightarrow{\text{id}_A \otimes \Delta_L} & A \otimes_L (A \otimes_L A) & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \swarrow \simeq & \downarrow \Delta_L & \searrow \simeq & \\ L \otimes_L A & \xleftarrow{\pi_L \otimes \text{id}_A} & A \otimes_L A & \xrightarrow{\text{id}_A \otimes \pi_L} & A \otimes_L L \end{array}$$

3.  $\Delta_L, \pi_L$  は以下を満たす.

$$a_{[1]}t_L(l) \otimes a_{[2]} = a_{[1]} \otimes a_{[2]}s_L(l) \quad (3.4)$$

$$\Delta_L(1_A) = 1_A \otimes 1_A \quad (3.5)$$

$$\Delta_L(ab) = \Delta_L(a)\Delta_L(b) \quad (3.6)$$

$$\pi_L(1_A) = 1_L \quad (3.7)$$

$$\pi_L(as_L(\pi_L(b))) = \pi_L(ab) = \pi(at_L(\pi_L(b))) \quad (\forall l \in L, \forall a, b \in A) \quad (3.8)$$

ただし,  $\Delta_L(a) = a_{[1]} \otimes a_{[2]}$ . (3.6) の右辺は, (3.4) により well-defined となる.

**定理 3.3** ([10]). 以下の条件を満たすとき,  $\mathfrak{A}(w)$  は左双垂代数.

$$\begin{cases} \mathbf{w} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Z(R) \quad (\forall (a,b), (c,d) \in Q^{(2)}) \\ \mathfrak{s}(a) \neq \mathfrak{s}(c) \text{ or } \mathfrak{t}(b) \neq \mathfrak{t}(d) \Rightarrow \mathbf{w} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

ただし,  $Z(R)$  は  $R$  の中心を表す.

写像  $s_{M_\Lambda(R)} : M_\Lambda(R) \rightarrow \mathfrak{A}(w), t_{M_\Lambda(R)} : M_\Lambda(R)^{op} \rightarrow \mathfrak{A}(w)$  を以下で定義する.

$$\begin{aligned} s_{M_\Lambda(R)}(f) &= \sum_{\lambda, \mu \in \Lambda} f(\lambda) \otimes 1_R \otimes \mathbf{e} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} + \mathfrak{I}_w \\ t_{M_\Lambda(R)}(f) &= \sum_{\lambda, \mu \in \Lambda} 1_R \otimes f(\lambda) \otimes \mathbf{e} \begin{bmatrix} \mu \\ \lambda \end{bmatrix} + \mathfrak{I}_w \quad (f \in M_\Lambda(R)) \end{aligned}$$

これらの写像は (3.2) を満たす  $\mathbb{K}$ -algebra の準同型写像である．よって， $\mathfrak{A}(w)$  は (3.3) の作用により  $(M_\Lambda(R), M_\Lambda(R))$ -両側加群となる．

$\mathfrak{I}_2$  を元  $t_{M_\Lambda(R)}(f) \otimes 1_{\mathfrak{A}(w)} - 1_{\mathfrak{A}(w)} \otimes s_{M_\Lambda(R)}(f)$  ( $\forall f \in M_\Lambda(R)$ ) で生成される  $\mathfrak{A}(w) \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{A}(w)$  の右イデアルとする．写像  $\Delta_{M_\Lambda(R)}$  の構成の準備として， $\mathbb{K}$ -線形写像  $\bar{\nabla}: \mathfrak{H}(Q) \rightarrow \mathfrak{A}(w) \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{A}(w)$  を以下で定義する．

$$\bar{\nabla}(r \otimes r' \otimes \mathbf{e} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}) = \sum_{u \in Q^{(m)}} (r \otimes 1_R \otimes \mathbf{e} \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix} + \mathfrak{I}_w) \otimes (1_R \otimes r' \otimes \mathbf{e} \begin{bmatrix} u \\ q \end{bmatrix} + \mathfrak{I}_w)$$

ただし， $r, r' \in R, p, q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ． $\bar{\nabla}$  は積構造を保つ写像である．

**命題 3.4** ([10]).  $\bar{\nabla}(\mathfrak{I}_w) \subset \mathfrak{I}_2$ .

本命題により  $\mathbb{K}$ -線形写像  $\tilde{\nabla}(\alpha + \mathfrak{I}_w) = \bar{\nabla}(\alpha) + \mathfrak{I}_2$  ( $\alpha \in \mathfrak{H}(Q)$ ) が導かれる． $\mathfrak{A}(w) \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{A}(w)/\mathfrak{I}_2$  と  $\mathfrak{A}(w) \otimes_{M_\Lambda(R)} \mathfrak{A}(w)$  は  $\mathbb{Z}$ -加群として同型であるため， $\mathbb{Z}$ -加群の準同型写像  $\Delta_{M_\Lambda(R)}: \mathfrak{A}(w) \rightarrow \mathfrak{A}(w) \otimes_{M_\Lambda(R)} \mathfrak{A}(w)$  を  $\tilde{\nabla}$  から構成できる． $\Delta_{M_\Lambda(R)}$  は  $(M_\Lambda(R), M_\Lambda(R))$ -両側加群の準同型写像である．

続いて，写像  $\pi_{M_\Lambda(R)}: \mathfrak{A}(w) \rightarrow M_\Lambda(R)$  を構成する．まず  $\mathbb{K}$ -線形写像  $\bar{\zeta}: \mathfrak{H}(Q) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M_\Lambda(R))$  を以下で定義する．

$$\bar{\zeta}(r \otimes r' \otimes \mathbf{e} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix})(f) = \delta_{p,q}(rf(\mathbf{t}(q))r')_M \delta_{\mathbf{s}(q)} \quad (f \in M_\Lambda(R))$$

ここで  $r_M, \delta_\lambda \in M_\Lambda(R)$  ( $r \in R, \lambda \in \Lambda$ ) は  $r_M(\mu) = r, \delta_\lambda(\mu) = \delta_{\lambda,\mu}$  ( $\mu \in \Lambda$ ) なる写像である．

**命題 3.5** ([10]).  $\bar{\zeta}(\mathfrak{I}_w) = \{0\}$ .

本命題により，写像  $\zeta(\alpha + \mathfrak{I}_w) = \bar{\zeta}(\alpha)$  ( $\alpha \in \mathfrak{H}(Q)$ ) は well-defined であり，さらに  $\mathbb{K}$ -algebra の準同型写像である．この  $\zeta$  により写像  $\pi_{M_\Lambda(R)}$  を以下で定義する．

$$\pi_{M_\Lambda(R)}: \mathfrak{A}(w) \ni a \mapsto \zeta(a)(1_{M_\Lambda(R)}) \in M_\Lambda(R)$$

この  $\pi_{M_\Lambda(R)}$  は  $(M_\Lambda(R), M_\Lambda(R))$ -両側加群の準同型写像である．

$\Delta_{M_\Lambda(R)}, \pi_{M_\Lambda(R)}$  は定義 3.2 の可換図式，および (3.4) - (3.8) を満たす．よって，6 つ組  $(\mathfrak{A}(w), M_\Lambda(R), s_{M_\Lambda(R)}, t_{M_\Lambda(R)}, \Delta_{M_\Lambda(R)}, \pi_{M_\Lambda(R)})$  は左双歪代数である．

## 4 応用

### 4.1 左双歪代数 $A_\sigma$

この節では [11] に従い，[15, 16] における左双歪代数の構成法の一般化を行う．

$\Lambda$  を空でない有限集合， $X$  を有限集合とする． $\sigma_{cd}^{ab} \in M_\Lambda(R)$  ( $a, b, c, d \in X$ )， $\sigma = \{\sigma_{cd}^{ab}\}_{a,b,c,d \in X}$ ， $G$  を  $\Lambda$  から  $\Lambda$  への全単射全体のなす群の opposite group とする． $G$  は  $\Lambda$  に次のようにして右から作用する:  $\lambda\alpha = \alpha(\lambda)$  ( $\lambda \in \Lambda, \alpha \in G$ )．

$$HX := (M_\Lambda(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_\Lambda(R)^{op}) \bigsqcup \{L_{ab} \mid a, b \in X\} \bigsqcup \{(L^{-1})_{ab} \mid a, b \in X\}$$

とし,  $\mathbb{K}\langle HX \rangle$  を  $HX$  で生成される  $\mathbb{K}$ -free algebra とする. また,  $I_\sigma$  を以下の元 (1)~(5) で生成される  $\mathbb{K}\langle HX \rangle$  の両側イデアルとし,  $A_\sigma := \mathbb{K}\langle HX \rangle / I_\sigma$  と定める.

- (1)  $\xi + \xi' - (\xi + \xi'), c\xi - (c\xi), \xi\xi' - (\xi\xi') \ (\forall c \in \mathbb{K}, \forall \xi, \xi' \in M_\Lambda(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_\Lambda(R)^{op}).$   
 $\xi + \xi'$  は,  $\mathbb{K}\langle HX \rangle$  の和,  $(\xi + \xi')$  は,  $M_\Lambda(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_\Lambda(R)^{op}$  の和を表す. 積やスカラー倍についても同様.
- (2)  $\sum_{c \in X} L_{ac}(L^{-1})_{cb} - \delta_{a,b}, \sum_{c \in X} (L^{-1})_{ac}L_{cb} - \delta_{a,b} \ (\forall a, b \in X).$
- (3)  $(T_{\deg(a)}(f) \otimes 1_{M_\Lambda(R)})L_{ab} - L_{ab}(f \otimes 1_{M_\Lambda(R)}),$   
 $(1_{M_\Lambda(R)} \otimes T_{\deg(b)}(f))L_{ab} - L_{ab}(1_{M_\Lambda(R)} \otimes f),$   
 $(f \otimes 1_{M_\Lambda(R)})(L^{-1})_{ab} - (L^{-1})_{ab}(T_{\deg(b)}(f) \otimes 1_{M_\Lambda(R)}),$   
 $(1_{M_\Lambda(R)} \otimes f)(L^{-1})_{ab} - (L^{-1})_{ab}(1_{M_\Lambda(R)} \otimes T_{\deg(a)}(f)) \ (\forall f \in M_\Lambda(R), \forall a, b \in X).$   
 $\deg$  は  $X$  から  $G$  への写像.
- (4)  $\sum_{x,y \in X} (\sigma_{ac}^{xy} \otimes 1_{M_\Lambda(R)})L_{yd}L_{xb} - \sum_{x,y \in X} (1_{M_\Lambda(R)} \otimes \sigma_{xy}^{bd})L_{cy}L_{ax} \ (\forall a, b, c, d \in X).$
- (5)  $\emptyset - 1_{M_\Lambda(R)} \otimes 1_{M_\Lambda(R)}$   
 $\emptyset$  は空語を表す.

**定理 4.1** ([11]). 以下の条件を満たすとき,  $A_\sigma$  は左双歪代数.

$$\begin{cases} \sigma_{cd}^{ab}(\lambda) \in Z(R) \ (\forall \lambda \in \Lambda, \forall a, b, c, d \in X) \\ \lambda \deg(d) \deg(b) \neq \lambda \deg(c) \deg(a) \Rightarrow \sigma_{ac}^{bd}(\lambda) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

写像  $s_{M_\Lambda(R)} : M_\Lambda(R) \rightarrow A_\sigma, t_{M_\Lambda(R)} : M_\Lambda(R)^{op} \rightarrow A_\sigma$  を以下で定義する.

$$\begin{aligned} s_{M_\Lambda(R)}(f) &= f \otimes 1_{M_\Lambda(R)} + I_\sigma \\ t_{M_\Lambda(R)}(f) &= 1_{M_\Lambda(R)} \otimes f + I_\sigma \ (f \in M_\Lambda(R)) \end{aligned}$$

$s_{M_\Lambda(R)}, t_{M_\Lambda(R)}$  は (3.2) を満たす  $\mathbb{K}$ -algebra の準同型写像である. したがって, (3.3) により,  $A_\sigma$  は  $(M_\Lambda(R), M_\Lambda(R))$ -両側加群となる.

$I_2$  を元  $t_{M_\Lambda(R)}(f) \otimes 1_{\mathfrak{A}(w)} - 1_{\mathfrak{A}(w)} \otimes s_{M_\Lambda(R)}(f) \ (\forall f \in M_\Lambda(R))$  で生成される  $A_\sigma \otimes_{\mathbb{K}} A_\sigma$  の右イデアルとする. 写像  $\Delta_{M_\Lambda(R)}$  の構成の準備として,  $\mathbb{K}$ -algebra の準同型写像  $\bar{\Delta} : \mathbb{K}\langle HX \rangle \rightarrow A_\sigma \otimes_{\mathbb{K}} A_\sigma$  を, 以下で定義する.

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\xi) &= s_{M_\Lambda(R)} \otimes t_{M_\Lambda(R)}(\xi) \ (\xi \in M_\Lambda(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_\Lambda(R)^{op}) \\ \bar{\Delta}(L_{ab}) &= \sum_{c \in X} L_{ac} + I_\sigma \otimes L_{cb} + I_\sigma \ (a, b \in X) \\ \bar{\Delta}((L^{-1})_{ab}) &= \sum_{c \in X} (L^{-1})_{cb} + I_\sigma \otimes (L^{-1})_{ac} + I_\sigma \end{aligned}$$

$\bar{\nabla}(I_\sigma) \subset I_2$  であることから,  $\mathbb{K}$ -線形写像  $\tilde{\Delta}(\alpha + I_\sigma) = \bar{\Delta}(\alpha) + I_2 \ (\alpha \in \mathfrak{H}(Q))$  が導かれる.  $\mathbb{Z}$ -加群として  $A_\sigma \otimes_{\mathbb{K}} A_\sigma / I_2 \cong A_\sigma \otimes_{M_\Lambda(R)} A_\sigma$  であるため,  $\mathbb{Z}$ -加群の準同型写像  $\Delta_{M_\Lambda(R)} : A_\sigma \rightarrow A_\sigma \otimes_{M_\Lambda(R)} A_\sigma$  を  $\tilde{\Delta}$  から構成できる.  $\Delta_{M_\Lambda(R)}$  は  $(M_\Lambda(R), M_\Lambda(R))$ -両側加群の準同型写像である.

続いて,  $\pi_{M_\Lambda(R)}$  の構成を行う.  $\mathbb{K}$ -algebra の準同型写像  $\bar{\chi}: \mathbb{K}\langle HX \rangle \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M_\Lambda(R))$  を, 以下で定義する.

$$\begin{aligned}\bar{\chi}(\xi) &= \zeta(\xi) \quad (\xi \in M_\Lambda(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_\Lambda(R)^{op}) \\ \bar{\chi}(L_{ab}) &= \delta_{a,b} T_{\deg(a)} \\ \bar{\chi}((L^{-1})_{ab}) &= \delta_{a,b} T_{\deg(a)^{-1}} \quad (a, b \in X)\end{aligned}$$

ただし,  $\zeta(f \otimes g) = \rho_l(f)\rho_r(g)$ ,  $\rho_l(f)(h) = fh$ ,  $\rho_r(g)(h) = hg$  ( $f, g, h \in M_\Lambda(R)$ ) である. この  $\bar{\chi}$  は  $\bar{\chi}(I_\sigma) = \{0\}$  を満たす. よって,  $\chi(\alpha + I_\sigma) = \bar{\chi}(\alpha)$  ( $\alpha \in \mathbb{K}\langle HX \rangle$ ) は well-defined な  $\mathbb{K}$ -algebra の準同型写像となる.

$\chi$  を用いて, 写像  $\pi_{M_\Lambda(R)}: A_\sigma \rightarrow M_\Lambda(R)$  を以下で定義する.

$$\pi_{M_\Lambda(R)}(a) = \chi(a)(1_{M_\Lambda(R)})$$

これは,  $(M_\Lambda(R), M_\Lambda(R))$ -両側加群の準同型である.

$\Delta_{M_\Lambda(R)}, \pi_{M_\Lambda(R)}$  は定義 3.2 の可換図式, および (3.4) - (3.8) を満たす. よって, 6 つ組  $A_\sigma := (A_\sigma, M_\Lambda(R), s_{M_\Lambda(R)}, t_{M_\Lambda(R)}, \Delta_{M_\Lambda(R)}, \pi_{M_\Lambda(R)})$  は左双垂代数である.

## 4.2 左双垂代数の準同型写像 $\Phi: \mathfrak{A}(w_\sigma) \rightarrow A_\sigma$

この節では [10] に従い, 4.1 節の左双垂代数  $A_\sigma$  と同様の設定のもとで構成される 3 節の左双垂代数  $\mathfrak{A}(w_\sigma) := \mathfrak{A}(w)$  との間に準同型写像  $\Phi: \mathfrak{A}(w_\sigma) \rightarrow A_\sigma$  を構成する. 本節の結果は [8] の一般化である.

$A_\sigma$  を 4.1 節で構成された左双垂代数とする.  $\Lambda$  上の quiver  $Q$  を,  $Q := \Lambda \times X$ ,  $\mathfrak{s}(\lambda, x) = \lambda$ ,  $\mathfrak{t}(\lambda, x) = \lambda \deg(x)$  ( $\lambda \in \Lambda, x \in X$ ) と定める. また,  $R$  の元の族  $w_\sigma := w$  は以下を満たすと仮定する.

$$\mathbf{w} \begin{bmatrix} (\lambda, a) & (\lambda', b) \\ (\mu, c) & (\mu', d) \end{bmatrix} = \delta_{\lambda, \mu} \sigma_{dc}^{ba}(\lambda) \quad (\forall ((\lambda, a), (\lambda', b)), ((\mu, c), (\mu', d)) \in Q^{(2)})$$

この条件により, (3.9) を満たし, 左双垂代数  $\mathfrak{A}(w_\sigma) := \mathfrak{A}(w)$  が構成できる.

**定義 4.2.**  $A_L = (A, L, s_L, t_L, \Delta_L, \pi_L)$ ,  $A'_{L'} = (A', L', s_{L'}, t_{L'}, \Delta_{L'}, \pi_{L'})$  を左双垂代数とする. 環準同型写像の組  $(\Phi: A \rightarrow A', \phi: L \rightarrow L')$  が左双垂代数の準同型写像  $A_L \rightarrow A'_{L'}$  であるとは, 以下の条件を満たすことである.

$$s_{L'} \circ \phi = \Phi \circ s_L \tag{4.2}$$

$$t_{L'} \circ \phi = \Phi \circ t_L \tag{4.3}$$

$$\pi_{L'} \circ \Phi = \phi \circ \pi_L \tag{4.4}$$

$$\Delta_{L'} \circ \Phi = (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_L \tag{4.5}$$

写像  $\Phi \otimes \Phi: A \otimes_L A \rightarrow A' \otimes_{L'} A'$  は, 条件 (4.2), (4.3) により, well-defined となる.

**定理 4.3** ([10]).  $\mathbb{K}$ -線形写像  $\bar{\Phi}: \mathfrak{H}(Q) \rightarrow A_\sigma$  を, 以下で定義する.

$$\bar{\Phi}(r \otimes r' \otimes \mathbf{e} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}) = (r_M \delta_{\mathfrak{s}(p)} \otimes r'_M \delta_{\mathfrak{s}(q)}) L_{x_1 y_1} \dots L_{x_m y_m} + I_\sigma \quad (r, r' \in R, p, q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

ただし,  $p = ((\lambda_1, x_1), \dots, (\lambda_m, x_m))$ ,  $q = ((\mu_1, y_1), \dots, (\mu_m, y_m))$ . このとき,  $\overline{\Phi}(\mathfrak{I}_{w_\sigma}) = \{0\}$  であり, 左双歪代数の準同型写像  $(\Phi : \mathfrak{A}(w_\sigma) \rightarrow A_\sigma, \text{id}_{M_\Lambda(R)})$  ( $\Phi(\alpha + \mathfrak{I}_{w_\sigma}) = \overline{\Phi}(\alpha), \alpha \in \mathfrak{A}(w_\sigma)$ ) を導く.

## 参考文献

- [1] R. J. Baxter, “*Partition function of eight-vertex lattice model*”, Ann. Physics, 70, 193-228, 1972.
- [2] G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, “*Weak Hopf algebras I. Integral theory and  $C^*$ -structure*”, J. Algebra, 221, 385-438, 1999.
- [3] G. Böhm, K. Szlachányi, “*Hopf algebroids with bijective antipodes: axioms, integrals, and duals*”, J. Algebra, 274, 708-750, 2004.
- [4] V. G. Drinfel’d, “*On some unsolved problems in quantum group theory*”, In Quantum groups (Leningrad, 1990), volume 1510 of Lecture Notes in Math., 1-8, 1992.
- [5] P. Etingof, A. Varchenko, “*Solutions of the quantum dynamical Yang-Baxter equation and dynamical quantum groups*”, Comm. Math. Phys., 196, 591-640, 1998.
- [6] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, A. Takhtajan, “*Quantization of Lie groups and Lie algebras*”, in: Algebraic analysis, Academic Press, Inc., Boston, 129-139, 1989.
- [7] T. Hayashi, “*Quantum groups and Quantum semigroups*”, J. Algebra, 204, 225-254, 1998.
- [8] D. K. Matsumoto, K. Shimizu, “*Quiver-theoretical approach to dynamical Yang-Baxter maps*”, J. Algebra, 507, 47-80, 2018.
- [9] J. B. McGuire, “*Study of exactly soluble one-dimensional  $N$ -body problems*”, J. Mathematical Phys., 5, 622-636, 1964.
- [10] Y. Otsuto, “*Two FRT bialgebroids and their relations*”, in preparation.
- [11] Y. Otsuto, Y. Shibukawa, “*Construction of Hopf algebroids*”, arXiv:1908.09643 [math.RA], 2019.
- [12] P. Schauenburg, “*Weak Hopf algebras and quantum groupoids*”, In Noncommutative geometry and quantum groups (Warsaw, 2001), volume 61 of Banach Center Publ., 171-188, 2003.
- [13] Y. Shibukawa, “*Dynamical Yang-Baxter maps*”, Int. Math. Res. Not., (36), 2199-2221, 2005.
- [14] Y. Shibukawa, “*Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition*”, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 43(4), 1157-1182, 2007.
- [15] Y. Shibukawa, M. Takeuchi, “*FRT construction for dynamical Yang-Baxter maps*”, J. Algebra, 323, 1698-1728, 2010.
- [16] Y. Shibukawa, “*Hopf algebroids and rigid tensor categories associated with dynamical Yang-Baxter maps*”, J. Algebra, 449, 408-445, 2016.