周期境界を含む条件下での Zakharov-Kuznetsov 方程式の大域解

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
大澤哲史 (Satoshi OSAWA)

概要

KdV 方程式の拡張版の一つである, 2 次元 Zakharov-Kuznetsov 方程式の初期値問題の時間局所適切, 時間大域適切を考える. この方程式は非線形分散型の発展方程式であり, 時間経過後の解の滑らかさ, 大きさを適切なノルムを用いて評価する. Bilinear Estimate により局所解における適切性を示したあとに, その結果とエネルギー評価を用いて大域解における適切性を吟味する.

1 はじめに（初学者向け）

とある状態が時間経過とともに変化していく微分方程式を, 発展方程式という. “とある状態” の例としては変位や圧力, 温度などさまざまなものが挙げられる.
波動現象を描写する発展方程式のひとつとして, 浅水波を描写する KdV 方程式というものがある. 以下の式で表現される.

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u = 0 \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$$

u は (x,t) に関する未知関数である. $u\partial_x u$ という非線形項を含む偏微分方程式であり, 一般的に非線形の偏微分方程式は, 解を書き表すことが非常に困難となる.
発展方程式の初期値問題とは. 初期関数 u_0 を与えた際に, 時間発展を施したあとでどのような挙動へと移り変わるか, というのを研究する分野である, 本来であれば時間 T が経過した後の解の形が具体的に書き表せればいいが, 困難なことが多い. したがって研究の種目としては, コンピュータで近似解を求めるための手法を求めたり, 解の形が最終的に初等的な関数に収束していくか吟味したり, あるいは解の形にはあまり触れずに, その関数のサイズや滑らかさを観察したり, ということが挙げられる.
3 つ挙げたうちの最後の手法が, “初期値問題の適切性” を扱う問題である. 関数のサイズや滑らかさは, 適切なノルムを用いれば測ることが可能だ. 特に正則性を測るために, Sobolev ノルムが導入される. 関数 $f(x)$ に対して,

$$\|f\|_{H^s}^2 := \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

と表示されるのが Sobolev ノルムである. ただし $\hat{f}$ が f の Fourier 変換, ξ は x の Fourier 変換後の変数である. s 階の Sobolev ノルムが収束している関数の集合を s 階の Sobolev ノルムという. 大雑把に言うと, 関数が s 階の Sobolev 空間に属しているということは, 広い意味で s 回微分することが

でき, それが有界であるということである. 同様に多変数へと拡張することも可能である.
我々の興味の対象は, 初期関数がある Sobolev 空間に属していると仮定したとき, 同様に時間発展後の関数も同じ Sobolev 空間に属しているかどうか ということである. これがある T において $[0,T]$ で成り立っているなら (H^s における) 時間局所適切といい, すべての T で成り立っているなら時間大域適切という. たとえば KdV 方程式の時間局所適切であれば, $s > -3/4$ で成り立っていることが知られている [4].

さて, この KdV 方程式を 2 次元空間に拡張したものを考える. そのバリエーションのうちのひとつが Zakharov-Kuznetsov 方程式である. 空間としては $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ という, 周期境界を含むものを考える.

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \Delta u + u\partial_x u = 0 \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \end{cases} \qquad (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}, \quad t\in[0,\infty) \tag{ZK}$$

磁化プラズマ中におけるイオン音波を記述する方程式として知られているこの方程式は, 非線形項を含むことに加え, 元々 3 階微分だった部分が (x,y) について非対称な微分回数となっている. これらの要因で難解性を孕んでいるこの方程式について, 初期値問題の局所適切, 大域適切を考えていく.

2 Zakharov-Kuznetsov 方程式について

この方程式に関する特徴をまとめながら, 解析していくためのツールを導入する. Zakharov-Kuznetsov 方程式（以下 ZK 方程式）の特徴としては, KdV 方程式や KP 方程式 (KdV の多次元拡張の他バージョン) と異なり, 可積分系ではないことがひとつ挙げられる. また, 大域解の構成などで頻繁に用いられる保存則については, L^2 保存 (質量保存) と H^1 保存 (エネルギー保存) が成り立っている.

定義 2.1.

$$\begin{cases} E(u) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} (|\nabla u(x,y,t)|^2 - \dfrac{1}{3}u(x,y,t)^3)dxdy \\ M(u) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} u(x,y,t)^2 dxdy \end{cases}$$

これらは u が ZK 方程式の解であれば, 時間 t によらず常に一定である. さらに, H^s での適切性を調べるために, 補助的に用いられる以下のノルムを導入しよう.

定義 2.2.

$$\|u\|_{X^{s,b}} := \|\langle\tau - w(\xi,q)\rangle^b \langle|(\xi,q)|\rangle^s |\hat{u}(\xi,q,\tau)|\|_{L^2_{\xi,\tau},l^2_q}$$

$$\|u\|_{X^{s,b}_T} := \{\inf \|\tilde{u}\|_{X^{s,b}};\quad \tilde{u}:\mathbb{R}\times\mathbb{T}\to\mathbb{C},\quad \tilde{u}|_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}\times[0,T]} = u\}$$

ここで, $\xi\in\mathbb{R}$ は x の Fourier 変換, $q\in\mathbb{Z}$ は周期境界由来の y の Fourier 係数に基づく変数である.
$w(\xi,q) = \xi^3 + \xi q^2$, $|(\xi,q)|^2 = 3\xi^2 + q^2$, $\langle x\rangle = 1 + |x|$ として, 絶対値やブラケットを定義する.

注 2.3. $X^{s,b}$ の特徴づけとして, 以下が成り立っている.

$$\|f\|_{X^{s,b}} = \|e^{t\partial_x\Delta} f\|_{H_t^b, H_{xy}^s}$$

$$\mathcal{F}_{xy}(e^{-t\partial_x\Delta} f)(\xi,\mu) = e^{itw(\xi,\mu)}\mathcal{F}_{xy}(f)(\xi,\mu)$$

ただし $\mathcal{F}_{xy}$ は, (x,y) のみにおける Fourier 変換を指す.

ここで, ZK 方程式について既知のことをまとめる.
2 次元 ZK 方程式の時間局所適切, 時間大域適切については, $\mathbb{R}^2$ 上における H^s での適切性が中心的に議論されてきた. Molinet-Pilod により $s > 1/2$ における時間局所適切と $s \geq 1$ における時間大域適切が証明された [1] あと, H^1 の手法を H^s に落とし込む I-method を用いた Shan による $s > 5/7$ による時間大域適切 [7], 緻密な領域分割に基づく Kinoshita による $s > -1/4$ における時間局所適切と L^2 における時間大域適切 [5] といったふうに, ここ最近で急速に研究が進んでいる. 周期境界における ZK 方程式についての研究は, たとえば Linares-Panthee-Robert-Tzvetkov の $\mathbb{T}^2$ における $s > 5/3$ での時間局所適切などが挙げられる [6]. $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ の場合は, $s \geq 1$ における時間局所適切と $s = 1$ における時間大域適切が示された [1] が, 本稿ではこの空間における $s < 1$ での時間局所適切, 時間大域適切を議論するものとする.

3 主結果

$s < 1$ における時間局所適切として以下を示す.

定理 3.1. $s > 9/10$ とする. $\forall u_0 \in H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ について $T = T(\|u_0\|_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}})$ が存在し, 解 u が一意に存在して

$$u \in C([0,T] : H^s((\mathbb{R}\times\mathbb{T})) \cap X_T^{s,\frac{1}{2}+}$$

が成立する. また, u_0 を u に対応させる写像は連続である.

定理 3.1. を用いて, H^s における時間大域適切性も示す.

定理 3.2. $s < 29/31$ において, (ZK) の初期値問題は H^s において時間大域適切性が成り立つ.

定理 3.2. の証明にはエネルギー法を用いるが, その評価は L^2 を元にした定理 3.1, の証明を基礎とする. なお, このような適切性を議論するノルム評価の際に用いられる道具として Strichartz 評価式と呼ばれるものがある. $X^{s,b}$ や H^s のサイズを L^p などを用いて評価する手法であるが, $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ においてはまだこの体系が整備されていない. $\mathbb{R}^2$ における大域解構成よりも難解である所以の一つである.

4 証明の概略

定理 3.1. の証明は, Molinet らが導入した ZK における Bilinear Estimates に基づく. 時間局所適切を示すにあたって, 他の分散型方程式と同様に積分方程式をつくって非線形項を評価していくことになるが, その際に以下の命題が要求される

命題 4.1. $9/10 < s < 1$ において, 以下が成立.

$$\|\partial_x(uv)\|_{X^{s,-\frac{1}{2}+}} \lesssim \|u\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}}\|v\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}}$$

ここで $\|f\| \lesssim \|g\|$ であるとは, ある $c > 0$ が存在して $\|f\| \le c\|g\|$ が成り立っているということを指す. 上の命題が $s > 9/10$ で成り立てば, Duhamel の原理によって書き換えられた (ZK) の解の, $\|\partial_x(u^2)\||_{X^{s,-\frac{1}{2}+}}$ の評価が可能になる ($v = u$ とすればよい). $s > 9/10$ において時間局所適切性が成り立っているといえるようになる.

関数 u, v は波動に由来するものであり, 一般に高周波帯の波と低周波帯の波が入り混じったものである. 関数を周波数ごとに調べられるのが Fourier 変換であるので, これを用いたうえで Littlewood-Palay 分解と呼ばれる二進分解を行い, 高周波, 低周波ごとに解析ができるようにする.
カットオフ関数を用いて, 分解を以下で定める.

$$P_N(u) := \mathcal{F}_{xy}^{-1}(\phi_N \mathcal{F}_{xy}(u)), \quad Q_L(u) := \mathcal{F}^{-1}(\psi_L \mathcal{F}(u))$$

ただし,

$$\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 \le \eta \le 1, \quad \eta_{[-1,1]} = 1, \quad supp(\eta) \subset [-2, 2]$$

$$\phi(\xi) = \eta(\xi) - \eta(2\xi), \quad \phi_{2^k}(\xi, q) = \phi(2^{-k}|(\xi, q)|), \quad \psi_{2^k}(\xi, q, \tau) = \phi(2^{-k}(\tau - (\xi^3 + \xi q^2))).$$

とする.

さて, 定理 4.1. の主張を, 双対性を用いて以下のように書き換える.

$$\sum_{q,q_1} \int \Gamma_{\xi,q,\tau}^{\xi_1,q_1,\tau_1} \hat{u}(\xi_1, q_1, \tau_1)\hat{v}(\xi_2, q_2, \tau_2)\hat{w}(\xi, q, \tau)d\nu \lesssim \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\|w\|_{L^2}$$

$$\Gamma_{\xi,q,\tau}^{\xi_1,q_1,\tau_1} = |\xi|\langle\zeta\rangle^s\langle\zeta_1\rangle^{-s}\langle\zeta_2\rangle^{-s}\langle\tau - w(\xi, q)\rangle^{-\frac{1}{2}+}\langle\tau_1 - w(\xi_1, q_1)\rangle^{-\frac{1}{2}-}\langle\tau_2 - w(\xi_2, q_2)\rangle^{-\frac{1}{2}-}$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \qquad q = q_1 + q_2 \qquad \tau = \tau_1 + \tau_2 \qquad d\nu = d\xi d\xi_1 d\tau d\tau_1$$

3 つの関数の積になっている左辺をばらばらにするにあたって, 一度は Cauchy-Schwarz の不等式を用いることで L^2 ノルム同士に分けることができる. しかしもう一度, 関数の積の形になっている L^2 ノルムを分けて評価する手立てが必要である. そのために用いる手法は Bilinear Estimates と呼ばれる.
$u \to P_{N_1}Q_{L_1}u$, $v \to P_{N_2}Q_{L_2}v$, $w \to P_{N_0}Q_{L_0}w$ と分解を行うことにより, 以下の補題を適用できるようにする.

補題 4.2 (Molinet-Pilod, 2015)**.** $N_2 \leq 4N_1$, または $N_1 \leq 4N_2$ が成り立つとき, 以下が成立.

$$\|(P_{N_1}Q_{L_1}u)(P_{N_2}Q_{L_2}v)\| \lesssim \frac{(N_1 \wedge N_2)^{1/2}}{N_1 \vee N_2}(L_1 \wedge L_2)^{1/2}(L_1 \vee L_2)^{1/2}\|P_{N_1}Q_{L_1}u\|\|P_{N_2}Q_{L_2}v\|$$

ただし　$a \wedge b = min(a,b),\ \ a \vee b = max(a,b).$

この不等式評価により, 分母にある $(N_1 \vee N_2)$ だけ評価が良くなることが期待される. N_1 や N_2 は $|(\xi,q)|$ をある一定の範囲で区切るために用いられる二進数なので, $|(\xi,q)|$ の大きさの代わりとしてこのあとの評価で用いられる.

2 つの波の高周波帯と低周波帯, およびそれらが相互作用しあった結果に応じて, 場合分けして定理 4.1. の評価を行っていく. 特に評価が悪くなってしまうのが高周波帯同士の相互作用が起こるところであり, そこで $s > 9/10$ という臨界が出現し, 命題 3.1. が証明される. 本来は記載したいところではあるが, 本稿では割愛するものとする.

以上の定理を用いて時間局所適切を示した後は, 時間大域適切について議論するための準備を行う. エネルギーを用いて大域解を構成するために, I-method と呼ばれる手法を用いる [3]. その根幹を成す作用素を導入する.

定義 4.3. $s < 1,\ N = 2^k \ \ (k \in \mathbb{N})$: fixed とする.

$$m(\zeta) = \begin{cases} 1 & (|\zeta| \leq N) \\ \left(\frac{|\zeta|}{N}\right)^{s-1} & (|\zeta| \geq 2N) \end{cases}$$

として,　$\widehat{Iu} := m\hat{u}$　を定義する.

以降, $\zeta = (\xi,q)$ として, $|\zeta| = |(\xi,q)| = \sqrt{3\xi^2 + q^2}$ が成り立つものとする.

演算子 I を導入することによって, 定義により $u \in H^s \Rightarrow Iu \in H^1$ が成り立つ. H^1 における保存則を H^s について用いるための工夫というわけだ. しかし u についてエネルギー保存則が成り立っているのに対し, Iu に対してはそれを言うことができない. 証明にあたっては Iu のエネルギー計算を行うことになるが, それを補助するために以下の補題を導入する.

補題 4.4 (Shan, 2018)**.**

$$|E(Iu)(t)| \lesssim N^{2(1-s)}\|u(t)\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} + \|u(t)\|^3_{L^3(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}$$

$$\|u(t)\|^2_{H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} \lesssim |E(Iu)(t)| + \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} + \|u_0\|^4_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}$$

補題 4.5 (Shan, 2018)**.** $|E(Iu_0)(t)| \leq 1$ とする. ある $\delta > 0$ が存在して, $[0,\delta]$ において一意な解が存在し,

$$\|Iu\|_{X_\delta^{1,\frac{1}{2}+}} \lesssim 1$$

が成り立つ.

以上で準備は整った. 時間局所適切の結果と, エネルギー評価を元に大域解の適切性を考察していく.

$$E(Iu)(\delta) - E(Iu)(0) = \int_0^\delta \frac{dE(Iu)(t)}{dt} dt$$

であるが, 上の右辺は, 直接計算と方程式の主張により以下のように変形できる.

$$\frac{dE(Iu)}{dt}(t) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} [(\partial_x(I\Delta u))((Iu)^2 - Iu^2) + (\partial_x(Iu^2))((Iu)^2 - Iu^2)] dxdy \qquad (*)$$

この前半の項は, Cauchy-Schwarz の不等式で L^2 の問題に落とし込むことで以下のように評価することができる.

命題 4.6. $0 < \alpha < \frac{1}{10}$ で以下が成立.

$$\|\nabla Iu\|_{X_\delta^{0,\frac{1}{2}+}} \|\partial_x((Iu)^2 - Iu^2)\|_{X_\delta^{1,-\frac{1}{2}+}} \lesssim N^{-\alpha} \|Iu\|^3_{X_\delta^{1,\frac{1}{2}+}}$$

$\|\partial_x((Iu)^2 - Iu^2)\|_{X_\delta^{1,-\frac{1}{2}+}} \lesssim N^{-\frac{1}{10}+} \|Iu\|^2_{X_\delta^{1,\frac{1}{2}+}}$ を示すために, 先ほどの定理 4.1. の証明と同じ手法, Bilenear Estimates を用いることができる. すなわち先の不等式を書き換えることで,

$$\sum_{q,q_1} \int \widetilde{\Gamma^{\xi_1,q_1,\tau_1}_{\xi,q,\tau}} \left(1 - \frac{m(\zeta)}{m(\zeta_1)m(\zeta_2)}\right) \hat{u}(\xi_1,q_1,\tau_1)\hat{v}(\xi_2,q_2,\tau_2)\hat{w}(\xi,q,\tau) d\nu \lesssim N^{-\frac{1}{10}+} \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\|w\|_{L^2}$$

$$\widetilde{\Gamma^{\xi_1,q_1,\tau_1}_{\xi,q,\tau}} = |\xi| \langle\zeta\rangle \langle\zeta_1\rangle^{-1} \langle\zeta_2\rangle^{-1} \langle\tau - w(\xi,q)\rangle^{-\frac{1}{2}+} \langle\tau_1 - w(\xi_1,q_1)\rangle^{-\frac{1}{2}-} \langle\tau_2 - w(\xi_2,q_2)\rangle^{-\frac{1}{2}-}$$

を証明すればよいことがわかる.

$(1 - \frac{m(\zeta)}{m(\zeta_1)m(\zeta_2)})$ について, $|\zeta| \sim |\zeta_1| \sim |\zeta_2| \gg 1$ のときに $(\frac{N}{N_1})^{s-1}$ となり, 足し合わせの際に $N_i \leq N$ と $N_i \geq N$ に分けることにより, N に関する収束の条件を見ることができる. 結局ここの条件は, 時間局所適切の正則性の限界である 9/10 と, 実際いま解析している空間の正則性である $s = 1$ の差にあたる, $N^{-\frac{1}{10}+}$ が実際に出現することになる. すなわち $(*)$ の前半の項についての評価が主張通り成り立つことになる.

$(*)$ の後半の項については, Sobolev の埋め込み定理と, 同じ L^2 評価を用いることで, $N^{-\frac{1}{10}+}$ よりも良い評価を得ることができる. これらを統合することで, 命題 4.6. が示される.

最後に, 定理 3.2. の正則性の限界である $s > 29/31$ を導く.
u が H^s において, ある $T > 0$ が存在して $[0, T]$ の区間では解の適切性が言えているとする.
このとき, u をスケーリングした関数

$$u_\lambda(x) = \lambda^{-2} u(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}y, \lambda^{-3}t)$$

は方程式を満たし, $[0, \lambda^3 T]$ で well-posed である.

u_λ に I を施してエネルギー計算を行う. 補題 4.4. より以下が成り立つ.

$$E(Iu_\lambda)(0) \lesssim (N^{2(1-s)}\lambda^{-2(1+s)} + \lambda^{-4})(1 + \|u_0\|_{H^s})^3$$

すなわち, $\lambda \sim N^{\frac{1-s}{1+s}}$ とすると, これをある定数以下とすることができる.

命題 4.6. を用いて, さらに補題 4.5. が成り立つように δ を選べば,

$$E(Iu_\lambda)(\delta) = E(Iu_\lambda)(0) + CN^{-\frac{1}{10}+} \quad \exists C > 0$$

を得ることができる.
解はエネルギーが発散しない範囲の, $t \in [0, N^{\frac{1}{10}-}\delta]$ で, 適切性を保ったまま拡張されることがわかる.
$[0, \lambda^3 T]$ と $[0, N^{\frac{1}{10}-}\delta]$ を比較することにより, $N^{\frac{1}{10}-}\delta > \lambda^3 T \sim N^{\frac{3(1-s)}{1+s}}T$ が要請されるため,
これを比較することで $s > 29/31$ を得ることができる.

参考文献

[1] L. Molinet, D. Pilod, *Bilinear Strichartz estimates for the Zakharov-Kuznetsov equation and applications.* Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire, **32** (2015), 347–371.

[2] A. Grunrock, S. Herr, *The Fourier restriction norm method for the Zakharov-Kuznetsov equation.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, **34** (2014), 2061–2068.

[3] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao, *Global well-posedness for KdV in Sobolev spaces of negative index.* Electronic Journal of Differential Equations, **26** (2001), 1–7.

[4] F. Linares, G. Ponce, *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.* Springer.

[5] S. Kinoshita, *Global well-posedness for the Cauchy problem of the Zakharov-Kuznetsov equation in 2D.* Preprint.

[6] F. Linares, M. Panthee, T. Robert, and N. Tzvetkov, *On the periodic Zakharov-Kuznetsov equation.* Preprint.

[7] M. Shan, *Global Well-Posedness and Global Attractor for Two-dimensional Zakharov-Kuznetsov Equation.* Preprint.