算術的離散集合の点の分布とその数論的な応用

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
小野公亮 (Kosuke ONO)

概要

算術的離散集合とは合同不定方程式を満たすという意味で算術的に定義される離散集合を指す．先行研究では，原始的格子点 $\Gamma(d)$ および $\Gamma_{\mathrm{PPT}} = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid \gcd(m,n)=1,\ m-n \equiv 0 \pmod 2\}$ に対する点の分布に関連する定理およびその数論的な応用の結果が示されている．本発表では先行研究の結果を少し述べ，$\Gamma_{\mathrm{PET}} = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid \gcd(m,n)=1,\ m-n \equiv 0 \pmod 3\}$ の点の分布と原始的 Eisenstein 数の漸近挙動との関連を述べる．最後に準結晶との関連も多少ではあるが述べる．

1 序

物質，特に固体には原子配列に周期的な構造を持つ結晶 (例：ダイヤモンド)，全く規則性が存在しないアモルファス (例：ガラス) の 2 種類しか存在しないとされてきた．しかし，1986 年に D. Shechtman によって結晶でもアモルファスでもない構造を持つ物質 (Al-Mn 合金)，すなわち結晶ほど原子配列が強固ではないにしろ，アモルファスほど無規則でないような構造をもつ物質が発見され，今日それを準結晶という．準結晶は物理や化学の分野で物性等が研究されている一方で未だわからないことも多い．

準結晶は物質であるので物理的，化学的な対象だが原子を「点」とすることで物質を離散集合として捉えることができるから数学的な対象になる．数学的に構造を考察する際に重要なのは，与えられた離散集合の点が平面や空間内でどのように分布しているかを明らかにすることである．実は数学の範囲でも「準結晶とは何か？」という問の答えに合意はなされていないものの，ここでは「Poisson の和公式」の一般化を満足する離散集合とする (定義には様々な流儀がある)．

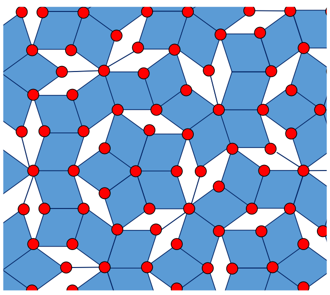

図 1　ペンローズ・タイル

準結晶の数学的例としては，ペンローズ･タイル (図 1) のような高次元結晶から「cut and projection method」により得られるクラス，結晶構造の非通約的な摂動により得られるクラスなどがあるが，砂

田 [1] は「算術的」な構成により得られるクラスを扱い，以下の 2 つの離散集合の点の分布を調べた．

$$\Gamma(d) := \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid \gcd(x_1, \ldots, x_d) = 1\},$$
$$\Gamma_{\mathrm{PPT}} := \{(m, n) \in \Gamma(2) \mid m - n \equiv 0 \pmod 2\}$$

$\Gamma(d)$ は原始的格子点と呼ばれる集合で，砂田 [1] は $\Gamma(d)$ が準結晶でないにしろ近い構造を持つこと，Γ_{PPT} が上記の意味で準結晶であることを示した．さらに，そのフィードバックとして $\Gamma(d)$ の点の分布と Gauss の数学日記の既約分数に対する問題 (1796/9/6) との関連，Γ_{PPT} の点の分布と Lehmer の原始的 Pythagoras 数の漸近挙動定理 [2] との関連を示した．

本研究では，

$$\Gamma_{\mathrm{PET}} := \{(m, n) \in \Gamma(2) \mid m - n \equiv 0 \ (\mathrm{mod} 3)\}$$

の点の分布を考察し，そのフィードバックとして原始的 Eisenstein 数の漸近挙動を与えた．ここで，自然数の三つ組 (x, y, z) が $x^2 + xy + y^2 = z^2$，$\gcd(x, y, z) = 1$ を満たすとき原始的 Eisenstein 数 (PET) であるという．原始的 Pythagoras 数 (PPT) については $x^2 + y^2 = z^2$，$\gcd(x, y, z) = 1$ を満たす自然数の三つ組 (x, y, z) を指し，直角三角形の辺の長さに対する等式であるのに対して，PET は 1 つの角が $120°$ であるような鈍角三角形の辺の長さに対する等式である．

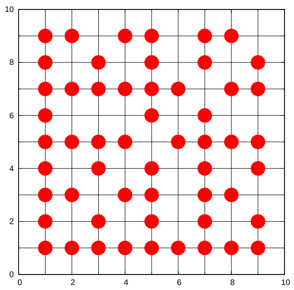

図 2　$\Gamma(2)$

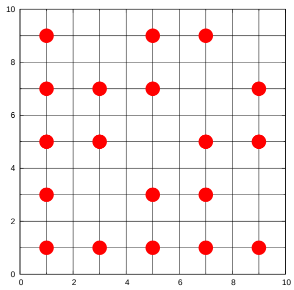

図 3　Γ_{PPT}

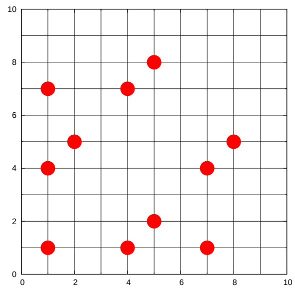

図 4　Γ_{PET}

2　結果

定理 2.1 (Sunada-O. [7])**.** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ を台がコンパクトな Riemann 可積分関数とするとき，次が成り立つ．

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sum_{\boldsymbol{z} \in \Gamma_{\mathrm{PET}}} \varepsilon^2 f(\varepsilon \boldsymbol{z}) = \frac{3}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}. \tag{1}$$

これは Γ_{PET} の点の分布に関連する結果で，この定理 2.1 の f として $D_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ に対する指示関数をとることにより，確率的表現になおす事ができる．

系 2.2. 次が成り立つ．

1. $\displaystyle\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \#\{(x, y, z)\ \mathrm{PET} \mid z \leq N\} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0.1378322 \cdots,$
2. $\displaystyle\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \#\{(x, y, z)\ \mathrm{PET} \mid x + y + z \leq N\} = \frac{9}{2\pi^2} \log \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0.065576 \cdots.$

2 については，PET から誘導される鈍角三角形の周長の漸近挙動である．

3　Γ_{PET} の点の分布について

本節では前節での結果の 1 つである定理 2.1 が Γ_{PET} の点の分布と関連するということを解説する．定理 2.1 の f として正方領域 $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x, y \le 1\}$ に対する指示関数をとる．すなわち

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \in D_1) \\ 0 & (\boldsymbol{x} \notin D_1) \end{cases}$$

とする．また，Γ_{PET} の元を $\boldsymbol{z} = (m,n)$ と書き，$\varepsilon\boldsymbol{z} = (\varepsilon m, \varepsilon n) \in D_1$ のときのみの和を考えれば良いということに注意すると

$$(\text{LHS of (1)}) = \lim_{\varepsilon \to +0} \sum_{\boldsymbol{z} \in \Gamma_{\mathrm{PET}}} \varepsilon^2 f(\varepsilon \boldsymbol{z}) = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^2 \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ \gcd(m,n)=1 \\ m-n \equiv 0 \pmod 3 \\ 0 \le m,n \le \varepsilon^{-1}}} 1$$

となる．ここで，$N := \varepsilon^{-1}$ とすれば，

$$(\text{LHS of (1)}) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \#\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid \gcd(m,n) = 1,\ m - n \equiv 0 \pmod 3,\ m,n \le N\} \quad (2)$$

となる．一方で，右辺は $3/(2\pi^2)$ であるから，

系 3.1. $\displaystyle \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \#\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid \gcd(m,n) = 1,\ m - n \equiv 0 \pmod 3,\ 0 \le m,n \le N\} = \frac{3}{2\pi^2}$

を得る．この系 3.1 は $\mathbb{Z}^2$ 平面上の第 1 象限に任意に点をとったとき，その座標が互いに素でかつ差が 3 で割り切れる確率が $3/(2\pi^2)$ であるということであり，$\mathbb{Z}^2$ 平面上の第 1 象限上に Γ_{PET} の点がおおよそ $3/(2\pi^2)$ の割合で存在するということを主張しているので，そういう意味で定理 2.1 は Γ_{PET} の点の分布と関連するのである．

4　原始的 Eisenstein 数 (PET) について

本節では PET に対する結果の概略を説明する．

4.1　PET とそれへの観察

原始的 Eisenstein 数を再度定義しておこう．

定義 4.1 (原始的 Eisenstein 数, PET)**.** 自然数の三つ組 (x,y,z) が $x^2+xy+y^2 = z^2, \gcd(x,y,z) = 1$ を満たすとき原始的 Eisenstein 数 (PET) という．

ただし，(x,y,z) が PET であれば (y,x,z) も PET だが，これらは区別しない．

ここで，PET の作り方の一つを紹介する．

補題 4.2. PET (x, y, z) に対して，次の

$$m > n,\ \gcd(m, n) = 1,\ m - n \not\equiv 0 \pmod 3 \tag{$*$ 1}$$

を満たす $m, n \in \mathbb{N}$ が一意的に存在して

$$\begin{aligned}(x, y, z) =& (m^2 - n^2, n^2 + 2mn, m^2 + mn + n^2) \text{ または} \\ & (n^2 + 2mn, m^2 - n^2, m^2 + mn + n^2)\end{aligned} \tag{$*$ 2}$$

が成り立つ．逆に ($*$ 1) を満たすような $m, n \in \mathbb{N}$ で表現される ($*$ 2) は PET である．

では，PET を例を挙げるとともに観察してみよう．以下は PET(x, y, z) の z に対する昇順に並べた表で，(x_N, y_N, z_N) は N 番目の PET を表す．また，この表は先の補題 4.2 を用いて作成しており，PET(x, y, z) と (y, x, z) を区別していないことから $(m^2 - n^2, n^2 + 2mn, m^2 + mn + n^2)$ で表現される形の PET を表示している．

表 1　原始的アイゼンシュタイン数の表

N	x_N	y_N	z_N		N	x_N	y_N	z_N		N	x_N	y_N	z_N	
1	3	5	7		991	5336	2839	7189		2491	17680	807	18097	
2	8	7	13		992	3264	4991	7201		2492	13432	7155	18103	
3	5	16	19		993	6319	1521	7201		2493	15933	3752	18103	
4	24	11	31		994	392	7003	7207		2494	2945	16456	18109	
5	7	33	37	$\cdots$	995	2425	5688	7213	$\cdots$	2495	7191	13409	18109	$\cdots$
6	35	13	43		996	784	6795	7219		2496	12136	8679	18109	
7	16	39	49		997	4085	4264	7231		2497	17399	1345	18109	
8	9	56	61		998	6120	1859	7231		2498	14065	6384	18121	
9	45	32	67		999	6873	680	7237		2499	17112	1883	18127	
10	63	17	73		1000	5115	3173	7243		2500	11473	9432	18133	
11	40	51	79		1001	1568	6355	7267		2501	3565	16104	18151	

この表の N と z_N に注目してみると，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{73}\#\{(x, y, z) \text{ PET} \mid z \leq 73\} = \frac{10}{73} = 0.1369863\cdots, \\ &\frac{1}{7243}\#\{(x, y, z) \text{ PET} \mid z \leq 7243\} = \frac{1000}{7243} = 0.13806434\cdots, \\ &\frac{1}{18133}\#\{(x, y, z) \text{ PET} \mid z \leq 18133\} = \frac{2500}{18133} = 0.13787018\cdots\end{aligned}$$

であるから，$\#\{(x, y, z) \text{ PET} \mid z \leq N\}/N\ (N \to \infty)$ が存在することを示唆している．

4.2　PET の漸近挙動について

本小節では系 2.2 の証明の概略を説明する．ただし，2. については 1. と同様の手法のため省略する．先行研究 [1] において，次が明らかにされている．

定理 4.3 (Sunada [1])**.** $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ を台がコンパクトな Riemann 可積分関数とするとき，次が成り立つ．

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \sum_{\boldsymbol{z}\in\Gamma(d)} \varepsilon^d f(\varepsilon\boldsymbol{z}) = \zeta(d)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x}.$$

特に，

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \sum_{\boldsymbol{z}\in\Gamma(2)} \varepsilon^2 f(\varepsilon\boldsymbol{z}) = \frac{6}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x}$$

である．

この定理 4.3 および定理 2.1 を用いれば，

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \sum_{\boldsymbol{z}\in\Gamma(2)\setminus\Gamma_{\mathrm{PET}}} \varepsilon^2 f(\varepsilon\boldsymbol{z}) = \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{3}{2\pi^2}\right) \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x} = \frac{9}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x} \tag{3}$$

が成り立つ．この (3) に $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y,\ x^2 + xy + y^2 \le 1\}$ に対する指示関数を適用させる．

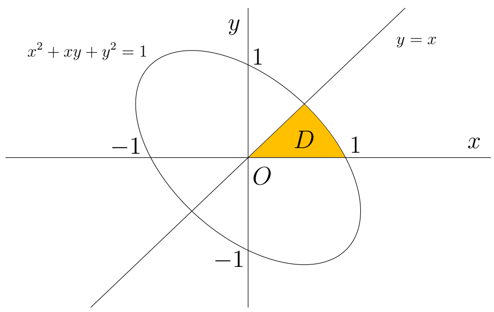

図 5　D

第 3 節と同様に，$\Gamma(2) \setminus \Gamma_{\mathrm{PET}}$ の元を $\boldsymbol{z} = (m, n)$ と書き，$\varepsilon\boldsymbol{z} = (\varepsilon m, \varepsilon n) \in D$ のときのみの和を考えれば良いということに注意すると，

$$(\text{LHS of }(3)) = \lim_{\varepsilon\to+0} \sum_{\boldsymbol{z}\in\Gamma_{\mathrm{PET}}} \varepsilon^2 f(\varepsilon\boldsymbol{z}) = \lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon^2 \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ m>n>0 \\ \gcd(m,n)=1 \\ m-n\not\equiv 0 \pmod 3 \\ m^2+mn+n^2\le\varepsilon^{-2}}} 1$$

となる．$N := \varepsilon^{-2}$ とおき，補題 4.2 を用いれば，

$$\begin{aligned}(\text{LHS of }(3)) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m > n,\ \gcd(m, n) = 1, \\ &\qquad\qquad m - n \not\equiv 0 \pmod 3,\ m^2 + mn + n^2 \le N\} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\{(x, y, z)\ \mathrm{PET} \mid z \le N\}\end{aligned}$$

となる．一方で，

$$(\text{RHS of }(3)) = \frac{9}{2\pi^2} \int_D 1\ d\boldsymbol{x} = \frac{9}{2\pi^2} \cdot \mathrm{vol}(D) = \frac{9}{2\pi^2} \cdot \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

であるから，系 2.2 の 1 が成り立つ．補題 4.2 から，任意の PET に対して $(\ast\ 1)$ を満たす $m, n \in \mathbb{N}$ が「一意的に」存在することから，PET を数え上げるということは $(\ast\ 1)$ を満たす $m, n \in \mathbb{N}$ を数え上げるということ同義になるということに注意する．

補題 4.2 の 2. の場合は (3) に $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y,\ 2x^2 + 3xy + y^2 \leq 1\}$ に対する指示関数を適用させれば良い．

5　主定理

前節まで本研究の結果およびその概略を記してきたが，本節では定理 2.1 をどのように導出したかということの概略を説明する．定理 2.1 は以下の定理から得られるが，その証明のアイデアは次の節で述べる．

定理 5.1 (Sunada-O. [7])**.** f を台がコンパクトな $\mathbb{R}^2$ 上の関数とし，μ を Möbius 関数とする．すなわち，

$$\mu(k) = \begin{cases} 1 & (k = 1) \\ (-1)^r & (k = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_r} : p_{i_1} < p_{i_2} < \cdots < p_{i_r} \text{は素数}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

であるとする．ただし，$p_1 < p_2 < \cdots$ は素数全体を表す．このとき，

$$\sum_{\boldsymbol{z} \in \Gamma_{\mathrm{PET}}} f(\boldsymbol{z}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{w} \in (3\mathbb{Z}+1)^2} f(k 3^h \boldsymbol{w}) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{w} \in (3\mathbb{Z}-1)^2} f(k 3^h \boldsymbol{w})$$

が成り立つ．

この定理 5.1 の $f(\boldsymbol{z})$ として $\varepsilon^2 f(\varepsilon \boldsymbol{z})$ $(\varepsilon > 0)$ をとり，$\varepsilon \to +0$ とすると

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sum_{\boldsymbol{z} \in \Gamma_{\mathrm{PET}}} \varepsilon^2 f(\varepsilon \boldsymbol{z}) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{w} \in (3\mathbb{Z}+1)^2} \varepsilon^2 f(\varepsilon k 3^h \boldsymbol{w}) \right) + \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{w} \in (3\mathbb{Z}-1)^2} \varepsilon^2 f(\varepsilon k 3^h \boldsymbol{w}) \right)$$

となるので，和と極限の順序を交換し Riemann 和と Riemann 積分の関係を用いれば，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sum_{\boldsymbol{z} \in \Gamma_{\mathrm{PET}}} \varepsilon^2 f(\varepsilon \boldsymbol{z}) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2h}} \cdot \frac{1}{9} \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x}$$

となる．ここで，等比級数の和の公式および $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)/k^2 = \zeta(2)^{-1}$ を用いれば

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sum_{\boldsymbol{z} \in \Gamma_{\mathrm{PET}}} \varepsilon^2 f(\varepsilon \boldsymbol{z}) = \frac{1}{4} \zeta(2)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x} = \frac{3}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x}$$

を得る．

6　包含排除の原理

包含排除の原理 (Inclusion-Exclusion Principle，IEP で表す) は定理 5.1 を証明するためのアイデアの一つであると同時に，様々な問題を解決するための誠に有用な定理の一つである．この IEP は集合の要素の数に関する式としてよく知られている等式

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

(ただし，A，B および C は有限集合) の一般化となっている．

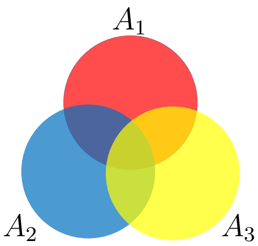

図 6　集合の要素の数

定理 6.1. 集合 X の部分集合族 $\{A_h\}_{h=1}^{\infty}$ を考える．ただし，X および A_h は必ずしも有限でない．f は supp f が有限な X 上の関数とする．また，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$h > N$ ならば $A_h \cap$ supp $f = \emptyset$，すなわち $x \in A_h$ に対して $f(x) = 0$ とする．このとき次が成り立つ．

$$\sum_{x \in \bigcap_{h=1}^{\infty} A_h^c} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{h_1 < \cdots < h_k} \sum_{x \in A_{h_1} \cap \cdots \cap A_{h_k}} f(x)$$
$$\left(= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \sum_{h_1 < \cdots < h_k} \sum_{x \in A_{h_1} \cap \cdots \cap A_{h_k}} f(x) \right)$$

ただし，$k = 0$ のとき $\displaystyle\sum_{h_1 < \cdots < h_k} \sum_{x \in A_{h_1} \cap \cdots \cap A_{h_k}} f(x)$ の部分は $\displaystyle\sum_{x \in X} f(x)$ としてとらえる．

この IEP において，

$$X := \coprod_{l=1}^{\infty} l\Gamma_{\mathrm{PET}},\ A_h := \{(x, y) \in X \mid p_h | x,\ p_h | y\}$$

を適用させ変形することで定理 5.1 が得られる．ただし，p_h はある素数を表す．

本稿では述べないが，この定理 2.1 は「Γ_{PET} が準結晶であるか」という議論をする上で用いる．

7　結

本研究の現時点での結果は，

1. Γ_{PET} の点の分布に関連する定理の導出，

2. PET の漸近挙動

の 2 つである．結果 1 は $\Gamma(2)$ の点の 4 つに 1 つ $(3/92\pi^2) = 1/(4\zeta(2)))$ が Γ_{PET} の点であるということを意味し，結果は 2 は $\mathrm{PET}(x, y, z)$ に対して z 及び周長がおおよそ線形に増加していくということを意味している．

序で述べたとおり，本研究のモチベーションは準結晶である．今後は Γ_{PET} が準結晶であるかを議論するとともに，本研究の結果を d 次元に一般化したい．さらに数論の諸問題，特に Diophantus 方程式との関連を見出すことを目標とする．

参考文献

[1] T. Sunada, *Generalized Riemann sums*, From Riemann to differential geometry and relativity, Springer, Cham, 2017, pp. 457–479.

[2] D. N. Lehmer, *Asymptotic Evaluation of Certain Totient Sums*, Amer. J. Math. **22** (1900), no. 4, 293–335.

[3] J. Marklof and A. Strömbergsson, *Visibility and directions in quasicrystals*, Int. Math. Res. Not. IMRN **15** (2015), 6588–6617.

[4] T. Sunada, *Lecture On Elementary Number Theory In View Of Crystallography -Pythagorean Triples Revisited-*. lecture note (2017).

[5] U. P. Nair, *Elemantary results on the binary quadratic form* a^2+ab+b^2. preprint (2004), arXiv:math/0408107.

[6] L. Fukshansky, D. Moore, R. A. Ohana, and W. Zeldow, *On well-rounded sublattices of the hexagonal lattice*, Discrete Math. **310** (2010), no. 23, 3287–3302.

[7] K. Ono, T. Sunada, *Have fun with Eisenstein Triples*, in preparation.