

ヒッチン系のフーリエ向井変換の幾何ラングランズへの変形

東京大学大学院 数理科学研究科
奥田伸樹 (Nobuki OKUDA)

概要

ヒッグス束のモジュライ空間は、アーベル多様体をファイバーとして持つファイブレーションの構造を持つ。構造群をラングランズ双対群に置き換えると、ファイバーは双対アーベル多様体となり、元のモジュライとの間にフーリエ・向井変換による導来同値が存在する。本稿では、この導来同値の、ヒッグス束のモジュライの非可換無限小変形族と、ラングランズ双対群のヒッグス束のモジュライの無限小ツイスター変形族の間の導来同値への拡張についての研究について述べる。

1 導入

Σ をリーマン面、 G を簡約代数群とする。[Hit87] にて、ヒッチンは自己双対方程式のモジュライ空間と呼ばれる空間 $H(\Sigma, G)$ を定義し、この空間は安定ヒッグス束のモジュライ、および既約平坦接続のモジュライと微分同相であることを示した。また、 $H(\Sigma, G)$ は標準的なハイパーケーラー構造を持つこと、ヒッチン系と呼ばれる可積分系の構造を持つことが明らかにされた。その後、[BD91] によって、ヒッチン系の量子化、すなわちヒッチン系を表象にもつ互いに可換な微分作用素系の構成と、それらの同時固有化としてヘッケ固有層が定義され、これがオパーから誘導される平坦接続と一対一対応することが示された。これが契機となって、主 G 束のモジュライの $\mathcal{D}$ -加群の圏と、 G のラングランズ双対群と呼ばれる簡約代数群 ${}^L G$ 値の局所系のモジュライの準連接層の圏の導来同値を主張する幾何ラングランズ予想が成立した。[DP12] にて、この幾何ラングランズ予想の古典極限として、 G -ヒッグス束のモジュライと ${}^L G$ -ヒッグス束のモジュライの導来同値が予想され、[DP12] においてヒッチン系の非特異なファイバーにおいてはアーベル多様体のフーリエ・向井変換としてこの導来同値が構成された。主 G 束のモジュライの $\mathcal{D}$ -加群は、 G -ヒッグス束のモジュライの非可換変形であり、 ${}^L G$ 値の局所系のモジュライは、 ${}^L G$ -ヒッグス束のモジュライのツイスター変形であることから、我々は、[DP12] のヒッグス束のモジュライの導来同値を、ヒッグス束のモジュライの非可換無限小変形の族と、ラングランズ双対群のヒッグス束のモジュライの無限小ツイスター変形の族の導来同値への拡張を試みることにした。導来同値の構成の方針は、[DP12] の導来同値のフーリエ・向井核の無限小変形を具体的に構成するというものである。

1.1 幾何ラングランズ双対性

K_Σ を Σ の標準直線束として、 Σ 上の主正則 G 束 $\mathcal{P}$ と、ヒッグス場 $\Phi \in H^0(\Sigma, (\mathcal{P} \times_{ad} \mathfrak{g}) \otimes K_\Sigma)$ の組 $(\mathcal{P}, \Phi)$ を、 Σ 上の G -ヒッグス束と呼ぶ。 $\mathcal{H}(\Sigma, G)$ を Σ 上の G -ヒッグス束のモジュライ、 $\mathcal{B}(\Sigma, G)$ を Σ 上の正則主 G 束のモジュライ、 $\mathcal{L}(\Sigma, G)$ を G に値を持つ局所系のモジュライとする。 G のラングランズ双対群 ${}^L G$ とは、 G のルートと余ルート、指標格子と余指標格子を入れ替えることで構成される簡約代数群である。幾何ラングランズ双対性とは、 $\mathcal{B}(\Sigma, G)$ 上の $\mathcal{D}$ 加群の導来圏 $D(\text{Mod } \mathcal{D}_{\mathcal{B}(\Sigma, G)})$ と、 $\mathcal{L}(\Sigma, {}^L G)$ 上の準連接層の導来圏 $D(\text{Qcoh } \mathcal{L}(\Sigma, {}^L G))$ の圏同値のことである。現在では、この主張はこのままの形では正しくなく、両者の圏に修正が必要であることがわかっている。[AG15] では、修正された圏が定義された。

1.2 幾何ラングランズ双対性の変形族への拡張

この節では、幾何ラングランズ双対性が導来圏の族の導来同値に拡張されることを述べる。この節の議論は、[DP12] にもとづいている。 $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}(\Sigma, G)}$ を、 $\mathcal{O}_{\mathcal{B}(\Sigma, G) \times \mathbb{A}^1}$ と、 $\mathcal{B}(\Sigma, G)$ 方向のベクトル場の層で生成され、 $\mathcal{O}_{\mathcal{B}(\Sigma, G) \times \mathbb{A}^1}$ を部分環として持ち、任意のベクトル場 X, Y , 任意の正則関数 $f, \mathbb{A}^1$ の座標関数 t に対して、 $XY - YX = t[X, Y], Xf - fX = tX(f), Xt = tX, fX = f \times X$ (ただし、 fX は f と X の $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}(\Sigma, G)}$ における積、 $f \times X$ はベクトル場の層への $\mathcal{O}_{\mathcal{B}(\Sigma, G) \times \mathbb{A}^1}$ の作用による f と X の積) という関係によって定義される $\mathcal{B}(\Sigma, G) \times \mathbb{A}^1$ 上の (非可換) 環の層として定義する。 $t \in \mathbb{A}^1$ に対して、 $i_t: \mathcal{B}(\Sigma, G) \rightarrow \mathcal{B}(\Sigma, G) \times \mathbb{A}^1, x \mapsto (x, t)$ として、 $t \neq 0$ に対して $i_t^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}(\Sigma, G)} \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{B}(\Sigma, G)}$ であるから、 $D(\text{Mod}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}(\Sigma, G)}))$ は、“ $D(\text{Mod}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}(\Sigma, G)}))$ を含む導来圏の $\mathbb{A}^1$ 族をまとめたもの” と解釈できる。続いて、“ $D(\text{Qcoh } \mathcal{L}(\Sigma, {}^L G))$ を含む導来圏の $\mathbb{A}^1$ 族をまとめたもの” を定義する。階数 r の正則ベクトル束 $\mathcal{E}, \lambda \in \mathbb{C}$ と、ベクトル空間の層の射 $\nabla: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes K_\Sigma$ であって、任意の正則関数 f 、任意の $\mathcal{E}$ の切断 s に対して、 $\nabla(fs) = f\nabla s + \lambda s \otimes df$ を満たすものの組 $(\mathcal{E}, \lambda, \nabla)$ を、 ${}^L G = GL(r)$ に対する (ドリーニュの) λ 接続と呼ぶ。一般の G に対しては主束の接続の定義にならって定義する。 $\tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, {}^L G)$ を、 λ 接続のモジュライとする。射 $\tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, {}^L G) \rightarrow \mathbb{A}^1, (\mathcal{P}, \lambda, \nabla) \mapsto \lambda$ によって、 $\tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, {}^L G)$ は $\mathbb{A}^1$ 上のスタックの族になっている。この射の $t \neq 0$ のファイバーは $\mathcal{L}(\Sigma, {}^L G)$ と同型であることから、 $D(\text{Qcoh } \tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, {}^L G))$ は “ $D(\text{Qcoh } \mathcal{L}(\Sigma, {}^L G))$ を含む導来圏の $\mathbb{A}^1$ 族をまとめたもの” と解釈できる。このことから、幾何ラングランズ双対性は、 $D(\text{Mod}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}(\Sigma, G)}))$ と $D(\text{Qcoh } \tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, {}^L G))$ の圏同値に拡張されることが期待される。

これらの導来圏の $\mathbb{A}^1$ 族の 0 のファイバーについて考える。 $i_0^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}(\Sigma, G)} = \text{Sym } T_{\mathcal{B}(\Sigma, G)}$ かつ $\text{Spec}_{\mathcal{B}(\Sigma, G)} \text{Sym } T_{\mathcal{B}(\Sigma, G)} \simeq T^* \mathcal{B}(\Sigma, G)$ であり、[Hit87] などにより $T^* \mathcal{B}(\Sigma, G) \simeq \mathcal{H}(\Sigma, G)$ であることが知られているので、 $D(\text{Mod}(i_0^* \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}(\Sigma, G)})) \simeq D(\text{Qcoh } \mathcal{H}(\Sigma, G))$ である。一方、 $\tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, {}^L G)$ の 0 のファイバーは $\mathcal{H}(\Sigma, {}^L G)$ である。 $(\nabla$ が $\mathcal{O}_\Sigma$ -module の射となるため。) このことから、[DP12] において、 $D^b(\text{coh } \mathcal{H}(\Sigma, G))$ と $D^b(\text{coh } \mathcal{H}(\Sigma, {}^L G))$ の圏同値が予想され、次節で定義される S のファイバー上でこの導来同値が構成された。本稿の研究においては、この $D^b(\text{coh } \mathcal{H}(\Sigma, G))$ と $D^b(\text{coh } \mathcal{H}(\Sigma, {}^L G))$ の圏同値を、“導来圏の $\mathbb{A}^1$ 族” $D(\text{Mod}(\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}(\Sigma, G)}))$ と $D(\text{Qcoh } \tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, {}^L G))$ の “ $\text{Spec } \mathbb{C}[t]/(t^2)$ への制限” の圏同値へと拡張することを目標とする。

1.3 ヒッチン系

$(\xi_i)_{i=1}^r$ を、 $\mathfrak{g}$ 上の G 不変斉次多項式であって、 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G \simeq \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r]$ が成り立つものとする。 $d_i := \deg \xi_i$ とおく。ヒッチンファイブレーション π を、

$$\pi: \mathcal{H}(\Sigma, G) \rightarrow B := \bigoplus_{i=1}^r H^0(\Sigma, K_{\Sigma}^{\otimes d_i}) \quad (1)$$

$$(\mathcal{P}, \Phi) \mapsto (\xi_i(\Phi))_{i=1}^r \quad (2)$$

で定義する。

すべてのルートの積によって、判別式 $D \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G$ を定義できる。 $D = d(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ を満たす多項式 d をとり、 B の開部分集合 S を、

$$S := \{(b_1, b_2, \dots, b_r) \in B \mid d(b_1, b_2, \dots, b_r) \in H^0(\Sigma, K_{\Sigma}^{\otimes \deg D}) \text{ has zeros of order less than } 2\} \quad (3)$$

とおく。

1.4 アーベル化

以下では、 $G = GL(r)$ として議論する。 $(\xi_i)_{i=1}^r$ として、

$$\det(1 + A) = 1 + \xi_1(A) + \xi_2(A) + \dots + \xi_r(A) \quad (4)$$

$$\deg \xi_i = i \quad (5)$$

という条件によって定義されるものをとる。 $b = (b_1, b_2, \dots, b_r) \in S$ に対して、スペクトル被覆 $\tilde{\Sigma}_b$ を、

$$\tilde{\Sigma}_b = \{u \in \text{Tot } K_{\Sigma} \mid u^r - b_1(\varpi(u))u^{r-1} + b_2(\varpi(u))u^{r-2} - \dots + (-1)^r b_r(\varpi(u)) = 0\} \quad (6)$$

で定義する。ただし、 $\varpi: \text{Tot } K_{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ を自然な射影とする。すると、 $\pi^{-1}(b)$ は、 $\tilde{\Sigma}_b$ 上の直線束のモジュライ $\mathcal{P}ic(\tilde{\Sigma}_b)$ と同型である。詳細は、[Hit87]などを参照せよ。

さらに、この同型をファイバーごとではなく $\pi^{-1}(S)$ 全体に拡張できる。すなわち、 $\pi^{-1}(S)$ は、 $b \in S$ と、 $\tilde{\Sigma}_b$ 上の直線束の組のモジュライと同型である。この同型によって自明束に対応する $\pi: \pi^{-1}(S) \rightarrow S$ の切断はヒッチン切断とよばれている。詳細は、[DP12]などを参照せよ。

1.5 ヒッグス束のモジュライの双対性

$H(\Sigma, r, 0)$ を、階数 r 、次数 0 の Σ 上のヒッグス束 (すなわち、位相的に自明な主 $GL(r)$ 束) であって、ヒッチンファイブレーション π の像が S に属するもののモジュライ空間とする。 $G = GL(r)$ のラングランズ双対群は ${}^L G = GL(r)$ であることから、ヤコビ多様体の自己双対性より、 $H(\Sigma, r, 0)$ は自分自身と双対トーラスファイブレーションの関係にある。よって、 $H(\Sigma, r, 0) \times_S H(\Sigma, r, 0)$ 上にポアンカレ直線束 $\mathcal{P}$ を定義でき、フーリエ・向井変換

$$\Phi: D^b(\text{coh } H(\Sigma, r, 0)) \rightarrow D^b(\text{coh } H(\Sigma, r, 0)) \quad (7)$$

$$\mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}_* q(\mathcal{P} \otimes p^* \mathcal{F}) \quad (8)$$

によって $D^b(\mathrm{coh} H(\Sigma, r, 0))$ から $D^b(\mathrm{coh} H(\Sigma, r, 0))$ への非自明な導来同値を構成できる。ただし、 $p, q: H(\Sigma, r, 0) \times_S H(\Sigma, r, 0) \rightarrow H(\Sigma, r, 0)$ をそれぞれ第 1, 第 2 射影とする。

1.6 ヒッグス束のモジュライの一次の変形量子化とツイスター変形

X を代数多様体、 $\alpha \in H^0(X, \wedge^2 T_X)$ とする。このとき、 X の α に沿った一次の変形量子化を、結合環付き空間 $(X, \tilde{\mathcal{O}}_{X, \alpha})$ として定義する。ただし、 $\tilde{\mathcal{O}}_{X, \alpha}$ は、ベクトル空間の層としては $\tilde{\mathcal{O}}_{X, \alpha} = \mathcal{O}_X^{\oplus 2}$ であって、 $(a, b) \star (a', b') = (aa', ab' + a'b + \frac{1}{2}\alpha(da, da'))$ によって定義される積構造 $\star$ を持つものとする。

[Hit87] により、 $H(\Sigma, r, 0)$ には標準的なポアソン構造 α が存在することが知られている。 $H(\Sigma, r, 0)$ は、階数 r 、次数 0 の Σ 上の正則ベクトル束のモジュライ $B(\Sigma, r, 0)$ の余接空間 $T^*B(\Sigma, r, 0)$ と双有理同値であり、 α は $T^*B(\Sigma, r, 0)$ の標準的なポアソン構造と一致する。(非可換) 環付き空間 $\tilde{H}(\Sigma, r, 0)$ を、 $H(\Sigma, r, 0)$ の α に沿った一次の変形量子化として定義する。

$\tilde{L}(\Sigma, r)$ を、階数 r の λ 接続のモジュライ空間とする。代数多様体 ${}^L\tilde{H}(\Sigma, r, 0)$ を、 ${}^L\tilde{H}(\Sigma, r, 0) = (H(\Sigma, r, 0), \mathcal{O}_{\tilde{L}(\Sigma, r) \times_{\mathbb{A}^1} \mathrm{Spec} \mathbb{C}[\lambda]/(\lambda^2)}|_{H(\Sigma, r, 0)})$ で定義する。

2 主目標と結果

予想 1. $D^b(\mathrm{coh} \tilde{H}(\Sigma, r, 0))$ と $D^b(\mathrm{coh} {}^L\tilde{H}(\Sigma, r, 0))$ は圏同値である。

定理 2. コホモロジー類 $v \in H^1(H(\Sigma, r, 0) \times_S H(\Sigma, r, 0), \mathcal{O}_{H(\Sigma, r, 0) \times_S H(\Sigma, r, 0)} \otimes (\pi \times_{\tilde{S}} \pi)^* T_S)$ が定義でき、 $v = 0$ ならば

$$\zeta \in H^2(H(\Sigma, r, 0) \times_S H(\Sigma, r, 0), \mathcal{O}_{H(\Sigma, r, 0) \times_S H(\Sigma, r, 0)}) \quad (9)$$

$$/(e, c_1(\mathcal{P}))H^0(H(\Sigma, r, 0) \times_S H(\Sigma, r, 0), \mathcal{O}_{H(\Sigma, r, 0) \times_S H(\Sigma, r, 0)}) \quad (10)$$

を定義することが出来る。さらに、 $\zeta = 0$ ならば、予想 1 が成り立つ。

予想 1 の証明は、現時点で定理 2 の段階まで完成している。 $\delta: H(\Sigma, r, 0) \times_S H(\Sigma, r, 0) \rightarrow H(\Sigma, r, 0) \times H(\Sigma, r, 0)$ を埋め込み写像とすると、 $D^b(\mathrm{coh} \mathcal{O}_{H(\Sigma, r, 0), \alpha})$ から $D^b(\mathrm{coh} \mathcal{O}_{H(\Sigma, r, 0), \alpha})$ への導来同値のフーリエ・向井核は、 $\delta_* \mathcal{P}$ で与えられる。定理 2 は、これの $\tilde{H}(\Sigma, r, 0) \times_{\mathrm{Spec} \mathbb{C}[\lambda]/(\lambda^2)} {}^L\tilde{H}(\Sigma, r, 0)$ 上への平坦な拡張 $\tilde{\mathcal{P}}$ が構成できる必要十分条件を与える。まず、 $\tilde{\mathcal{P}}$ の局所的な構成を与えることが出来る。これらの局所的な構成に張り合わせ関数が構成されるための条件が $2(H_f, c_1(\mathcal{P})) = \beta(f)$ である。次に、この張り合わせ関数がコサイクル条件を見たすための条件が $\zeta = 0$ である。

参考文献

- [AG15] D. Arinkin and D. Gaitsgory, *Singular support of coherent sheaves and the geometric Langlands conjecture*, Selecta Math. (N.S.) **21** (2015), no. 1, 1–199. MR 3300415
- [BD91] Alexander Beilinson and Vladimir Drinfeld, *Quantization of hitchin's integrable system and hecke eigensheaves*, 1991.

- [DP12] R. Donagi and T. Pantev, *Langlands duality for Hitchin systems*, Invent. Math. **189** (2012), no. 3, 653–735. MR 2957305
- [Hit87] N. J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987), no. 1, 59–126. MR 887284