

Fast Diffusion 方程式に対する時空均質化問題*

東北大学 大学院理学研究科 数学専攻

岡 大将 (Tomoyuki OKA)

1 Introduction

本小論では, 次の Fast Diffusion 方程式と呼ばれる非線形拡散方程式に対する時空均質化問題について考察する.

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t u_\varepsilon(x, t) = \operatorname{div} \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r} \right) \nabla |u_\varepsilon|^{p-1} u_\varepsilon(x, t) \right) & \text{in } \Omega \times I, \\ |u_\varepsilon|^{p-1} u_\varepsilon(x, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times I, \\ u_\varepsilon(x, 0) = u^0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

ただし $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \leq 3$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域, $I = (0, T)$, $0 < p < 1$, $0 < r < +\infty$, $u^0 \in L^2(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ とする. 以下では, $\square = (0, 1)^N$, $J = (0, 1)$ とし, $a \in [W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^{N+1})]^{N \times N}$ は $(\square \times J)$ -周期的な対称行列で一様楕円性条件, すなわち, ある $\lambda > 0$ が存在し, 任意の $\xi \in \mathbb{R}^N$ に対し次を満たすものとする.

$$\lambda |\xi|^2 \leq a(y, s) \xi \cdot \xi \leq |\xi|^2 \text{ a.e. } y \in \mathbb{R}^N, s \in \mathbb{R}.$$

また, $0 < r < +\infty$ は係数行列 $a(x/\varepsilon, t/\varepsilon^r)$ の時空間周期の対数比を表す.

(周期的) 均質化問題は, 詳細については次節で述べるが, 周期 ε で振動する係数行列を伴う偏微分方程式に対して, $\varepsilon \rightarrow +0$ としたときに解の極限が満たす方程式 (均質化方程式) を厳密に導出する問題である. そこで, 本小論では (P_ε) に対して, $\varepsilon \rightarrow +0$ としたときに解 u_ε の極限が満たす均質化方程式について考察する. 特に, 均質化方程式に現れる係数行列 (均質化行列) が, 対数比 r に応じてどのように表現されるかについて焦点を当てる.

1.1 均質化問題とは

均質化問題 (*homogenization problem*) は, 材料科学関連の分野で考案された均質化法に基づく数学的な問題であり, 均質化法は材料特性を調べるための解析手法として知られて

* 本研究は赤木 剛朗 教授 (東北大学) との共同研究に基づく.

いる．一般に材料は不均質で複雑かつ無数の微視的構造を持ち，材料特性はこの微視的構造に大きく影響される．そのため，単純に考えれば微視的構造を全て考慮して解析していくことになるが，このような直接計算は微視的構造の数を把握するだけでなく，莫大な計算コストを消費するため現実的ではない．そこで，この微視的構造を適切に粗視化 (*coarse graining*) することである種の平均量を導出することが有効な解析手法だと考えられる．

この粗視化の代表的な手法として均質化法が知られており，図 1 のように考察の対象となる (材料) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$ 内で周期的な微視的構造を持つと仮定し，その周期幅 $\varepsilon > 0$ を $\varepsilon \rightarrow +0$ として一般的な材料特性の導出を考える．このプロセスは，上述したように周期パラメータ $\varepsilon > 0$ に

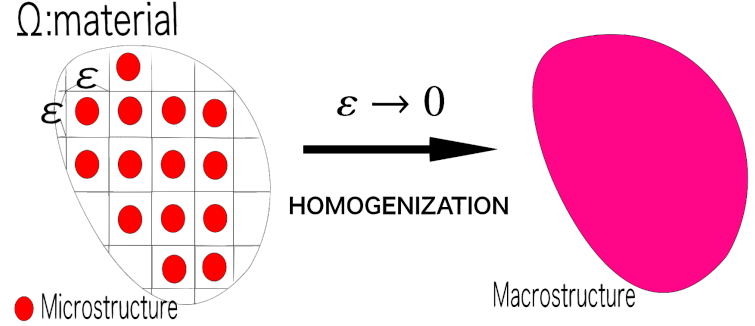


図 1 均質化法の概略図

依存した係数行列を伴う偏微分方程式に対して， $\varepsilon \rightarrow +0$ としたときの解の収束極限が満たす (均質化) 方程式を厳密に導出することに対応し，これを均質化問題と呼ぶ．

1.2 均質化問題に於ける既存の結果

均質化問題の研究は， (P_ε) を $p = 1$ とした非斉次な定常問題:

$$-\operatorname{div} \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \right) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \quad (1)$$

に対して漸近展開:

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 u_2 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \cdots, \quad \text{for some } \square\text{-periodic } u_i(x, \cdot), i \in \mathbb{N} \quad (2)$$

を用いたアプローチから始まり，古典的な文献として [4] が知られている．ただし $f \in H^{-1}(\Omega)$ とする．この手法は，(2) を (1) に代入し， u_0 が満たすべき方程式を導出する手法であり，

$$-\operatorname{div} (a_{\text{hom}} \nabla u_0) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u_0 \in H_0^1(\Omega) \quad (3)$$

となることが知られている．ただし， a_{hom} はある定数係数行列である．[4] では (1) のみならず，他型の方程式に対しても考察しており，均質化問題は漸近展開法により解決されたように思われた．しかし，解 u_ε を (2) のように展開できるかは非自明であり，それを厳密化するために関数解析的手法が用いられるようになった．詳しく述べると，(1) の解 u_ε に対するアプリアオリ評価 $\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$ 及び，Rellich-Kondrachov の定理から (u_ε) の L^2 -強コンパクト

性が得られる. しかし, 例えある $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ が存在し, $L^\infty(\Omega)$ 上で $a(x/\varepsilon) \xrightarrow{*} a_0$ が成り立つとしても, 一般に弱収束する列の積がその弱極限の積に (弱) 収束するとは限らない. また, (2) から分かるように (u_ε) の H^1 -強コンパクト性が失われているため, 一般に $a_{\text{hom}} = a_0$ として均質化行列 (*homogenized matrix*) を特徴付けることはできず, $a(x/\varepsilon)\nabla u_\varepsilon$ の極限を求めることは非自明な問題になる. そこで, (∇u_ε) のコンパクト性の破れを分析するために, H^1 -弱コンパクト性と H^1 -強コンパクト性の中間的性質を分析可能にする 2 スケール収束 (*two-scale convergence*) が [3] 及び, [8] で導入された (詳細は次節を参照).

一方, 放物型方程式に対する均質化問題では, (P_ε) を $p = 1$ とした線形拡散に対する結果として, 漸近展開法を用いた [4] 及び, この結果を 2 スケール収束理論により厳密に正当化した [5] が知られている. また, 微視的構造が空間のみならず, 時間依存する場合も考察しており, その際, 時空間に対する周期パラメータの (対数) 比 $r > 0$ によって均質化行列の様相が異なることが明らかになった. このような時空均質化問題 (*space-time homogenization problem*) を非線形方程式に対して考察した結果として p -Laplace 型の非線形拡散方程式へ拡張した [6] が知られている. これは $p = 1$ のときの (P_ε) の拡散項 $-\text{div}(a(x/\varepsilon, t/\varepsilon^r)\nabla u_\varepsilon)$ を $-\text{div}A(x/\varepsilon, t/\varepsilon^r, \nabla u_\varepsilon)$ のように拡張した結果に対応し, p -Laplace 方程式などの場合を包含する. しかし, (P_ε) のような多孔質媒体方程式型の非線形拡散方程式は含まれておらず, 結果が知られていない. また, この場合, 漸近展開法によって形式的な議論を行うことも容易ではない. そこで, 本小論では, (P_ε) に対して 2 スケール収束理論を適用し, 均質化方程式の特定及び, 均質化行列 a_{hom} の特徴づけを行う.

2 Preliminaries

本節では, 本小論で用いられる周期関数の性質や 2 スケール収束理論についていくつかの性質を証明を省略して述べる ([5], [7] を参照せよ). また, 本節全体を通して, $1 < q < +\infty$ とする.

2.1 周期関数に関する性質

定義 2.1 (L -周期関数). $L \in \mathbb{R}$ とする. $\mathbb{R}^N$ 上の関数 f が L -周期 (L -periodic) であるとは, 任意の $z \in \mathbb{Z}^N$ に対して, 次が成り立つときである.

$$f(\cdot + Lz) = f(\cdot) \quad a.e. \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

命題 2.2 (平均値の性質). $0 < r < +\infty$, $g \in L^q(\square \times J) = \{g \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{N+1}) : g \text{ is } \square \times J\text{-periodic}\}$ とする. このとき, 任意の有界な開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $I \subset \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ.

$$g\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r}\right) \rightharpoonup \langle g(y, s) \rangle_{y,s} := \int_0^1 \int_{\square} g(y, s) dy ds \quad \text{weakly in } L^q(\Omega \times I).$$

2.2 弱時空 2 スケール収束に関する性質

本小論では、2 スケール収束 ([3], [8]) で用いられるテスト関数を変数分離し、それを時空 2 スケール収束版に拡張したものを次のように定義する。

定義 2.3 (弱時空 2 スケール収束). $u_\varepsilon \in L^q(\Omega \times I)$ が $u \in L^q(\Omega \times I \times \square \times J)$ に弱時空 2 スケール収束 (*weak space-time two-scale convergence*) するとは、任意の $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $b \in C_{\text{per}}^\infty(\square)$, $\psi \in C_c^\infty(I)$, $c \in C_{\text{per}}^\infty(J)$ に対して以下を満たすことを意味する。

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega u_\varepsilon(x, t) \phi(x) b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \psi(t) c\left(\frac{t}{\varepsilon^r}\right) dx dt \\ = \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \int_\square u(x, t, y, s) \phi(x) b(y) \psi(t) c(s) dZ. \end{aligned}$$

ここで、 $dZ = dx dt dy ds$, $C_{\text{per}}^\infty(A) = \{\rho \in C_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^M) : \rho \text{ is } A\text{-periodic}\}$, $A \subset \mathbb{R}^M$, $M \geq 1$ を表す。またこのとき、 $u_\varepsilon \xrightarrow{2,2} u$ in $L^q(\Omega \times I \times \square \times J)$ と記述する。

注意 2.4. $u_\varepsilon \in L^q(\Omega \times I)$ が $u \in L^q(\Omega \times I \times \square \times J)$ に弱時空 2 スケール収束するならば、 u_ε は u の変数 y, s に関する積分平均値に $L^q(\Omega \times I)$ 上で弱収束することに注意する。実際、定義 2.3 のテスト関数 $b \in C_{\text{per}}^\infty(\square)$, $c \in C_{\text{per}}^\infty(J)$ を $b = c \equiv 1$ とすると、以下のように確かめられる。

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega u_\varepsilon(x, t) \phi(x) \psi(t) dx dt &= \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \int_\square u(x, t, y, s) \phi(x) \psi(t) dZ \\ &= \int_0^T \int_\Omega \left[\int_0^1 \int_\square u(x, t, y, s) dy ds \right] \phi(x) \psi(t) dx dt. \end{aligned}$$

定理 2.5 (弱時空 2 スケールコンパクト性). 任意の $L^q(\Omega \times I)$ 上の有界列は弱時空 2 スケール収束する部分列を持つ。

定理 2.6 (勾配に対する弱時空 2 スケールコンパクト性). (u_ε) を $L^q(I; W^{1,q}(\Omega))$ 上の有界列とし、その $L^q(\Omega \times I \times \square \times J)$ 上の弱時空 2 スケール収束極限を $u(x, t)$ とする。このとき、ある部分列 $(\varepsilon_n) \subset (\varepsilon)$ と $z \in L^q(\Omega \times I; L^q(J; W_{\text{per}}^{1,q}(\square)/\mathbb{R}))$ が存在して次が成り立つ。

$$\nabla u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{2,2} \nabla u(x, t) + \nabla_y z \quad \text{in } [L^q(\Omega \times I \times \square \times J)]^N.$$

ただし $W_{\text{per}}^{1,q}(\square)/\mathbb{R} = \{u \in W_{\text{loc}}^{1,q}(\mathbb{R}^N) : u \text{ is } \square\text{-periodic}, \langle u(y) \rangle_y := \int_\square u(y) dy = 0\}$ とする。

注意 2.7. 定理 2.6 では (u_ε) の弱時空 2 スケール収束極限 u が変数 y, s に依存していないことに注意する。

注意 2.8. (u_ε) の L^q -強コンパクト性が得られると, (u_ε) の弱時空 2 スケール収束極限は変数 y, s に依存しない. 実際, $L^q(\Omega \times I)$ 上で $u_\varepsilon \rightarrow u$ とすると, 命題 2.2 から次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega u_\varepsilon(x, t) \phi(x) b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \psi(t) c\left(\frac{t}{\varepsilon^r}\right) dx dt \\ = \int_0^T \int_\Omega u(x, t) \phi(x) \langle b(y) \rangle_y \psi(t) \langle c(s) \rangle_s dx dt \\ = \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \int_\square u(x, t) \phi(x) b(y) \psi(t) c(s) dZ. \end{aligned}$$

定理 2.6 の系として以下が成り立つ.

系 2.9 (very weak two-scale convergence). 定理 2.6 の仮定の下, 任意の $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $b \in C_{\text{per}}^\infty(\square)/\mathbb{R}$, $\psi \in C_c^\infty(I)$, $c \in C_{\text{per}}^\infty(J)$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \frac{u_{\varepsilon_n} - u}{\varepsilon_n} \phi(x) b\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \psi(t) c\left(\frac{t}{\varepsilon_n^r}\right) dx dt \\ = \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \int_\square z(x, t, y, s) \phi(x) b(y) \psi(t) c(t) dZ. \end{aligned}$$

ここで $z \in L^q(\Omega \times I; L^q(J; W_{\text{per}}^{1,q}(\square)/\mathbb{R}))$ は定理 2.6 で現れたものと同一の関数とする.

注意 2.10. 系 2.9 では定義 2.3 で与えたテスト関数 b のクラスに条件 $\langle b(y) \rangle_y = 0$ が追加されていることに注意する.

3 Main results

弱時空 2 スケール収束理論を用いることで均質化方程式が以下のように特定される.

定理 3.1 (均質化定理, [2]). 各 $\varepsilon > 0$ に対して, $u_\varepsilon \in W^{1,2}(I; H^{-1}(\Omega))$ は $|u_\varepsilon|^{p-1}u_\varepsilon \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ を満たす (P_ε) の一意解とする. このとき, ある部分列 $(\varepsilon_n) \subset (\varepsilon)$ と $u_0 \in W^{1,2}(I; H^{-1}(\Omega))$ 及び, $z \in L^2(\Omega \times I; L^2(J; H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R}))$ が存在して

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u_0 \text{ weakly in } W^{1,2}(I; H^{-1}(\Omega)), \\ |u_0|^{p-1}u_0 \in L^2(I; H_0^1(\Omega)), \quad |u_{\varepsilon_n}|^{p-1}u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup |u_0|^{p-1}u_0 \text{ weakly in } L^2(I; H_0^1(\Omega)), \\ a\left(\frac{x}{\varepsilon_n}, \frac{t}{\varepsilon_n^r}\right) \nabla |u_{\varepsilon_n}|^{p-1}u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{2,2} a(y, s) (\nabla |u_0|^{p-1}u_0 + \nabla_y z) \quad \text{in } [L^2(\Omega \times I \times \square \times J)]^N \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, u_0 は次の均質化方程式の解となる.

$$(P_0) \quad \begin{cases} \partial_t u_0(x, t) = \text{div}((a_{\text{hom}} \nabla |u_0|^{p-1}u_0)(x, t)) & \text{in } \Omega \times I, \\ |u_0|^{p-1}u_0(x, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times I, \\ u_0(x, 0) = u^0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

ただし,

$$(a_{\text{hom}} \nabla |u_0|^{p-1} u_0)(x, t) := \int_0^1 \int_{\square} a(y, s) (\nabla |u_0|^{p-1} u_0(x, t) + \nabla_y z(x, t, y, s)) dy ds \quad (4)$$

とする.

注意 3.2. 定理 3.1 で得られる (4) は $(a_{\text{hom}} \nabla |u_0|^{p-1} u_0) : \Omega \times I \mapsto \mathbb{R}^N$ という 1 つの関数であり, この段階では均質化行列 a_{hom} とベクトル $\nabla |u_0|^{p-1} u_0$ の積として表されていないことに注意する.

次の定理によって, (4) は均質化行列 a_{hom} とベクトル $\nabla |u_0|^{p-1} u_0$ の積として実際に表現することができる. ここで行列 a_{hom} の表現がパラメータ r に応じて変化することに注意する.

定理 3.3 (均質化行列の表現, [2]). u_0 を (P_0) の弱解とする. このとき (4) の表現を与える均質化行列 a_{hom} は $0 < r < +\infty$ の値に応じて次のように特徴づけられる.

(i) $0 < r < 2$ の場合,

$$a_{\text{hom}} e_k = \int_0^1 \int_{\square} a(y, s) (\nabla_y \Phi_k(y, s) + e_k) dy ds. \quad (5)$$

ただし e_k は $\mathbb{R}^N$ の標準基底の k 番目の基本ベクトルを表し, $\Phi_k \in L^2(J; H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R})$ は次の cell problem の一意的な超関数解とする.

$$-\text{div}_y (a(y, s) (\nabla_y \Phi_k(y, s) + e_k)) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'_{\text{per}}(\square \times J).$$

さらに, (u_0, z) は一意的に定まり, (u_ε) は u_0 へ全列収束する.

(ii) $r = 2$ の場合, $a_{\text{hom}} e_k$ は (5) で特徴づけられるが, $\Phi_k(x, t, \cdot, \cdot) \in L^2(J; H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R})$ はほとんど全ての $(x, t) \in \Omega \times I$ に対して次の cell problem の超関数解とする.

$$\frac{1}{p} |u_0(x, t)|^{1-p} \partial_s \Phi_k(x, t, y, s) - \text{div}_y (a(y, s) (\nabla_y \Phi_k(x, t, y, s) + e_k)) = 0$$

in $\mathcal{D}'_{\text{per}}(\Omega \times I \times \square \times J)$. よって a_{hom} は (x, t) の関数である.

(iii) $2 < r < +\infty$ の場合,

$$a_{\text{hom}} e_k = \int_{\square} \langle a(y, s) \rangle_s (\nabla_y \Phi_k(y) + e_k) dy, \quad \langle a(y, s) \rangle_s := \int_0^1 a(y, s) ds.$$

ただし, $\Phi_k \in H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R}$ は次の cell problem の一意的な超関数解とする.

$$-\text{div}_y (\langle a(y, s) \rangle_s (\nabla_y \Phi_k(y) + e_k)) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'_{\text{per}}(\square).$$

さらに, (u_0, z) は一意的に定まり, (u_ε) は u_0 へ全列収束する.

4 Sketch of proofs

本節では, 3 節で述べた定理に対する証明の概略を述べる. 証明の中心になるアイディアの 1 つは, (P_ε) の主要項が非線形であるため, $v_\varepsilon = |u_\varepsilon|^{p-1}u_\varepsilon$ と置き, 以下の方程式について解析することである.

$$(P_\varepsilon)' \quad \begin{cases} \partial_t |v_\varepsilon|^{1/p-1} v_\varepsilon(x, t) = \operatorname{div} \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r} \right) \nabla v_\varepsilon(x, t) \right) & \text{in } \Omega \times I, \\ v_\varepsilon(x, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times I, \\ |v_\varepsilon|^{1/p-1} v_\varepsilon(x, 0) = u^0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

以降, 本小論全体を通して, $|v_\varepsilon|^{1/p-1} v_\varepsilon$ を $v_\varepsilon^{1/p}$ と記述する.

定義 4.1 ($(P_\varepsilon)'$ の弱解). $v_\varepsilon \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ が $(P_\varepsilon)'$ の弱解であるとは, 以下を満たすことを意味する.

- (i) $v_\varepsilon^{1/p} \in W^{1,2}(I; H^{-1}(\Omega))$,
- (ii) $v_\varepsilon^{1/p}(t, 0) \rightarrow u^0$ strongly in $H^{-1}(\Omega)$ as $t \rightarrow +0$,
- (iii) $\left\langle \partial_t v_\varepsilon(t)^{1/p}, \Psi \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} + A_\varepsilon(v_\varepsilon(t), \Psi) = 0$ for all $\Psi \in H_0^1(\Omega)$ a.e. in I .

ただし $A_\varepsilon(v_\varepsilon, \Psi)$ は次の $H_0^1(\Omega)$ 上の双線形形式とする.

$$A_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega} a \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r} \right) \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{for } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

本小論では, $(P_\varepsilon)'$ の適切性についての議論は省略する. 詳細は [1], [2] を参照されたい.

4.1 定理 3.1 の証明の概略

まず, (弱) 解 v_ε に対して, 次の $\varepsilon > 0$ に関する一様有界性が得られる.

補題 4.2 (解の一様有界性). $(P_\varepsilon)'$ の解 $v_\varepsilon \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ に対して次が成り立つ.

- (i) (v_ε) は $L^2(I; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(I; L^{(1+p)/p}(\Omega))$ 上で有界.
- (ii) $(\partial_t v_\varepsilon^{1/p})$ は $L^2(I; H^{-1}(\Omega))$ 上で有界.
- (iii) $(v_\varepsilon^{1/p})$ は $L^\infty(I; L^2(\Omega)) \cap L^2(I; W_0^{1,4/(3-p)}(\Omega))$ 上で有界.

補題 4.2 と定理 2.5 を組み合わせることにより, 以下の収束性が得られる.

補題 4.3 (解の強収束性). $v_\varepsilon \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ を $(P_\varepsilon)'$ の弱解とする. このとき, ある部分

列 $(\varepsilon_n) \subset (\varepsilon)$ と $v_0 \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ が存在して、次が成り立つ.

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon_n} &\rightharpoonup v_0 && \text{weakly in } L^2(I; H_0^1(\Omega)), \\ v_{\varepsilon_n} &\rightarrow v_0 && \text{strongly in } L^{(p+1)/p}(\Omega \times I), \\ v_{\varepsilon_n}^{1/p} &\rightharpoonup v_0^{1/p} && \text{weakly in } L^2(I; W_0^{1,4/(3-p)}(\Omega)), \\ v_{\varepsilon_n}^{1/p} &\rightarrow v_0^{1/p} && \text{strongly in } L^2(I; L^\gamma(\Omega)). \end{aligned}$$

ここで $\gamma \in [1, \frac{4N}{((3-p)N-4)_+})$ とする.

さらに補題 4.2 と定理 2.6 を組み合わせることにより、以下の収束性が得られる.

補題 4.4. $v_\varepsilon \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ を $(P_\varepsilon)'$ の解とし、その $L^2(I; H_0^1(\Omega))$ 上での弱収束極限を v_0 とする. このとき、ある部分列 $(\varepsilon_n) \subset (\varepsilon)$ と $z \in L^2(\Omega \times \square; L^2(J; H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R}))$ 及び、 $w \in L^{4/(3-p)}(\Omega \times \square; L^{4/(3-p)}(J; W_{\text{per}}^{1,4/(3-p)}(\square)/\mathbb{R}))$ が存在して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} a\left(\frac{x}{\varepsilon_n}, \frac{t}{\varepsilon_n^r}\right) \nabla v_{\varepsilon_n} &\xrightarrow{2,2} a(y, s) (\nabla v_0 + \nabla_y z) && \text{in } [L^2(\Omega \times I \times \square \times J)]^N, \\ \nabla v_{\varepsilon_n}^{1/p} &\xrightarrow{2,2} \nabla v_0^{1/p} + \nabla_y w && \text{in } [L^{4/(3-p)}(\Omega \times I \times \square \times J)]^N. \end{aligned}$$

以上より、任意の $\Psi \in H_0^1(\Omega)$, $\psi \in C_c^\infty(I)$ に対して、

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left[\left\langle \partial_t v_0^{1/p}, \Psi \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega \langle a(y, s) (\nabla v_0(x, t) + \nabla_y z(x, t, y, s)) \rangle_{y, s} \cdot \nabla \Psi(x) dx \right] \psi(t) dt \\ &= \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \int_0^T \left\langle \partial_t v_{\varepsilon_n}^{1/p}, \Psi \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} \psi(t) dt + \int_0^T \int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon_n}, \frac{t}{\varepsilon_n^r}\right) \nabla v_{\varepsilon_n}(x, t) \cdot \nabla \Psi(x) \psi(t) dx dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. このとき、変分法の基本補題より、

$$\left\langle \partial_t v_0^{1/p}, \Psi \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega \langle a(y, s) (\nabla v_0(x, t) + \nabla_y z(x, t, y, s)) \rangle_{y, s} \cdot \nabla \Psi(x) dx = 0 \quad (6)$$

a.e. in I となることから v_0 は次の方程式:

$$(P_0)' \quad \begin{cases} \partial_t v_0(x, t)^{1/p} = \operatorname{div}((a_{\text{hom}} \nabla v_0)(x, t)) & \text{in } \Omega \times I, \\ v_0(x, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times I, \\ v_0(x, t)^{1/p} = u^0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

の解となり、 $v_0 = |u_0|^{p-1} u_0$ から u_0 が (P_0) の弱解であることが得られ証明が完了する.

4.2 定理 3.3 の証明の概略

本小節では、紙面の都合上 $0 < r < 2$ の場合に於ける結果のみ証明する. まず、 $(P_\varepsilon)'$ と $(P_0)'$ の弱形式の差を考察することで以下が成り立つ.

補題 4.5. 任意の $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $b \in C_{\text{per}}^\infty(\square)/\mathbb{R}$, $\psi \in C_c^\infty(I)$, $c \in C_{\text{per}}^\infty(J)$ に対して,

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega \left(\frac{v_{\varepsilon_n}^{1/p} - v_0^{1/p}}{\varepsilon_n} \right) \phi(x) b\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \left(\varepsilon_n^2 \partial_t \psi(t) c\left(\frac{t}{\varepsilon_n^r}\right) + \varepsilon_n^{2-r} \psi(t) \partial_s c\left(\frac{t}{\varepsilon_n^r}\right) \right) \\ & - a\left(\frac{x}{\varepsilon_n}, \frac{t}{\varepsilon_n^r}\right) \nabla v_{\varepsilon_n}(x, t) \cdot \left(\varepsilon_n \nabla \phi(x) b\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) + \phi(x) \nabla_y b\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \right) \psi(t) c\left(\frac{t}{\varepsilon_n^r}\right) dx dt = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ.

注意 4.6. ここでは系 2.9 を用いて証明するため, テスト関数 b のクラスに積分平均 $\langle b(y) \rangle_y = 0$ が追加されていることに注意する.

次に, 補題 4.5 に対して, 補題 4.4 の結果と系 2.9 を適用すると,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon_n}, \frac{t}{\varepsilon_n^r}\right) \nabla v_{\varepsilon_n}(x, t) \cdot \phi(x) \nabla_y b\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \psi(t) c\left(\frac{t}{\varepsilon_n^r}\right) dx dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \int_\square a(y, s) (\nabla v_0(x, t) + \nabla_y z(x, t, y, s)) \cdot \phi(x) \nabla_y b(y) \psi(t) c(s) dZ \end{aligned}$$

が得られる. さらに, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\psi \in C_c^\infty(I)$, $c \in C_{\text{per}}^\infty(J)$ の任意性から変分法の基本補題より

$$\int_\square a(y, s) (\nabla v_0(x, t) + \nabla_y z(x, t, y, s)) \cdot \nabla_y b(y) dy = 0 \quad \text{a.e. in } \Omega \times I \times J \quad (7)$$

が成り立つ. 一方, $k = 1, 2, \dots, N$ に対して, $\Phi_k \in L^2(J; H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R})$ を次の cell problem (3.3):

$$-\text{div}_y (a(y, s) (\nabla_y \Phi_k(y, s) + e_k)) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'_{\text{per}}(\square \times J)$$

の一意解とし,

$$\tilde{z}(x, t, y, s) = \sum_{k=1}^N \partial_{x_k} v_0(x, t) \Phi_k(y, s)$$

と置くと, $z = \tilde{z}$ は (7) を満たす. このとき z と $\tilde{z}$ に対する弱形式 (7) の差を取り, テスト関数 $b(y)$ として $y \mapsto (z - \tilde{z})(x, t, y, s)$ を選び, 両辺を $\Omega \times I \times \square \times J$ 上で積分すると,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \int_\square a(y, s) (\nabla v_0(x, t) + \nabla_y z(x, t, y, s)) \cdot \nabla_y (z(x, t, y, s) - \tilde{z}(x, t, y, s)) dZ \\ &\quad - \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \int_\square a(y, s) (\nabla v_0(x, t) + \nabla_y \tilde{z}(x, t, y, s)) \cdot \nabla_y (z(x, t, y, s) - \tilde{z}(x, t, y, s)) dZ \\ &\geq \lambda \|\nabla_y (z - \tilde{z})\|_{L^2(\Omega \times I \times \square \times J)}^2 \geq C\lambda \|z - \tilde{z}\|_{L^2(\Omega \times I \times \square \times J)}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となるので, $z = \tilde{z}$ と書けることになる. ただし, 最後の不等式は Poincaré–Wirtinger の不等式を用いた. 従って,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N (a_{\text{hom}} e_k) \partial_{x_k} v_0(x, t) &= \int_0^1 \int_{\square} a(y, s) (\nabla v_0(x, t) + \nabla_y z(x, t, y, s)) dy ds. \\
&= \int_0^1 \int_{\square} a(y, s) \left(\nabla v_0(x, t) + \sum_{k=1}^N \partial_{x_k} v_0(x, t) \nabla_y \Phi_k(y, s) \right) dy ds. \\
&= \sum_{k=1}^N \left(\int_0^1 \int_{\square} a(y, s) (\nabla_y \Phi_k(y, s) + e_k) dy ds \right) \partial_{x_k} v_0(x, t)
\end{aligned}$$

より a_{hom} は (5) のように書けるので, v_0 に依らず一意的に定まる. 故に v_0 の一意性が得られ, v_ε は部分列に依らず v_0 に全列収束し, 証明が完了する.

注意 4.7. $r \geq 2$ の場合も補題 4.5 を用いることが証明の議論の中心となる ([2] を参照).

5 Conclusion

本小論では, Fast Diffusion 方程式に対する時空均質化問題について報告した. 具体的には (P_ε) に対する均質化方程式 (P_0) の表現を弱時空 2 スケール収束理論を用いて導出した. さらに, (P_0) に現れる係数行列 a_{hom} を $r > 0$ の値によって特徴づけた. これらの結果は, 線形拡散に於ける結果 [5] の拡張となった. また, $r = 2$ の場合, a_{hom} が関数係数行列として特徴づけられることを示し, 線形拡散には現れない非線形特有の現象を特定した. 以上より, 本小論では方程式が非線形であるにも関わらず, 線形の場合と同等の情報量を引き出し, 臨界現象の存在という新しい結果を与えている.

参考文献

- [1] G. Akagi, Doubly nonlinear evolution equations governed by time-dependent subdifferentials in reflexive Banach spaces, *J. Differential Equations*, **231** (2006), 32–56.
- [2] G. Akagi, T. Oka, Space-time homogenization for fast diffusion, in preparation.
- [3] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992), 1482–1518.
- [4] A. Bensoussan, J.-L. Lions and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [5] A. Holmbom, Homogenization of parabolic equations an alternative approach and some corrector-type results, *Appl. Math.* **42** (1997), 321–343.
- [6] L. Flodén, M. Olsson. Reiterated homogenization of some linear and nonlinear monotone parabolic operators. *Canad. Appl. Math. Quart.* **14** (2006), 149–183.
- [7] S. Neukamm, An Introduction to the Qualitative and Quantitative Theory of Homogenization, *Interdiscip. Inform. Sci.* **24** (2018), 1–48.
- [8] G. Nguetseng, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM J. Math. Anal.* **20** (1989), 608–623.