シェルピンスキー正四面体の断面のハウスドルフ次元

京都大学大学院 人間・環境学研究科
中島 由人 (Yuto NAKAJIMA)

概要

シェルピンスキー正四面体は反復関数系により構成される, よく知られたフラクタル集合である. それを地面に置きある高さにおいて地面と平行に切れば, その断面にまたフラクタル集合が現れる. しかし, その断面の解析には反復関数系を拡張した概念を要する. 本講演では, その断面のハウスドルフ次元について得られた結果を紹介する. また, 地面からの高さにそこでの断面のハウスドルフ次元を対応させる関数のグラフもまたフラクタル集合となることをみる.

1 導入

よく晴れた日に散歩しているとふと自分の足元に, 陽と影が折り畳まってできた綺麗な模様が描かれていることに気づく. 上を見やるとたくましく育った樹木が陽光を優しく小道に垂らしているのを発見する. 我々は眩さに目を細めながら, こうした自然の与えてくれるささやかな贈り物に微笑む. 多すぎて無限に続くとすら思われる木の葉たちの,「細部を拡大すると全体と似る」という著しい性質に特徴付けられるフラクタル構造に感動しながら. 時折吹く風に木々は形を変え, ほとんど奇跡的に重なり合い完全な影を生み出すこともあるだろう. 我々は強引ではあるが, このような現象を特定のフラクタルを用い「フラクタルイマジナリーキューブ」という概念で記述できる.「イマジナリーキューブ」とは簡単に述べれば, 互いに直交する三方向から光を当てた時に立方体のように同じ影を落とす三次元の図形である. 簡単な例としては正四面体が挙げられる. そして「フラクタルイマジナリーキューブ」とは簡単に述べれば, イマジナリーキューブであり, ハウスドルフ次元が 2 のものをいう（ハウスドルフ次元の定義は定義 2.5 を参照）. 簡単な例としては正四面体が無限にくっついてできたと思えるシェルピンスキー正四面体がある. 我々はシェルピンスキー正四面体のようなすかすかした図形もある方向から見れば, 完全な影を落とすことに純粋な興味を覚える（詳しいイマジナリーキューブの研究については [15], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25] を参照せよ）. さて, 一方でフラクタルを記述する反復関数系の極限集合（詳しくは定義 2.1 を参照）が連結か否かの判定は重要な問題であるが, 我々は影の情報からは何も得ることができない. つまり「イマジナリーキューブ状態」である木々は一見木の葉たちが重なり合い繋がっているように見えるが, 得られる情報はある方向への二次元投影の形であり, 木の葉たちが接触していなくとも実現される. そのためには我々が木の葉たちと同じ目線に立ち, そこで切った世界を見なければならないであろう. すなわち「断面」を考えることになる. 本稿では代表的なフラクタル図形であるシェルピンスキー正四面体のある方向を固定した時の断面, すなわちその方向に垂直な平面との共通部分について考察する.

2　準備

ここでは先行研究, 主結果を述べるために必要な道具を揃え説明する. まずフラクタルを構成する際によく使われる反復関数系およびその極限集合を定義する.

Definition 2.1 (反復関数系, 極限集合)**.** m を自然数とし,X を完備距離空間とする.$\{f_0,...,f_m\}$ を X 上の縮小写像の組とする. この時 X のある空でないコンパクト部分集合 A が一意に存在し,

$$A = \bigcup_{i=0}^{m} f_i(A)$$

を満たす. このとき, 縮小写像らの組 $\{f_0,...,f_m\}$ を反復関数系 (Iterated Function System, 以下略して IFS と書く) といい, A を $\{f_0,...,f_m\}$ の極限集合という.

IFS の詳細は例えば, [5] の Chapter 9 を参照せよ. IFS およびその一般化概念の研究の歴史は古く, 1946 年の Moran に始まり ([17]), 1981 年に Hutchinson により上記のような現代的な枠組みが構成された ([8]). IFS および極限集合の具体例を以下にあげる.

Example 2.2.

(1) $m=1, X=\mathbb{R}, f_0(x)=1/3x, f_1(x)=1/3x+2/3$ とすれば, 極限集合 A は三進カントール集合である.

(2) $m=2, X=\mathbb{R}^2, f_0(x)=1/2x, f_1(x)=1/2x+(1/2,0), f_2(x)=1/2x+(1/4,\sqrt{3}/4)$ とすれば, 極限集合 A はシェルピンスキーガスケットである.

IFS 理論で重要な役割を果たすのが以下で構成されるアドレスマップと呼ばれる写像である. 以下の定義では IFS$\{f_0,...,f_m\}$ が一つ与えられているとする.

Definition 2.3 (アドレスマップ)**.** $I=\{0,...,m\}$ とする. $I^* := \bigcup_{n\geq 1} I^n$ の元 ω を語 (ワード) といい, 任意の $\omega \in I^n (n \geq 1)$ に対し, $\omega = \omega_1\omega_2\cdots\omega_n$ とあらわすとき,

$$f_\omega := f_{\omega_1} \circ f_{\omega_2} \circ \cdots \circ f_{\omega_n}$$

と定める. また任意の $\omega \in I^{\mathbb{N}}$ について $\omega = \omega_1\omega_2\cdots$ と表すとき, $\omega|_n := \omega_1\cdots\omega_n$ で定める. このとき, アドレスマップ $\pi\colon I^{\mathbb{N}} \to X$ を

$$\pi(\omega) := \lim_{n\to\infty} f_{\omega|_n}(x)$$

で定める. ただし, x は X のある元で, 上の極限は x のとり方に依らない. 注意することとして $I^{\mathbb{N}}$ に I 上の離散位相による直積位相を入れれば, π は連続 (一様連続) で,

$$\pi(I^{\mathbb{N}}) = A$$

を満たす. ただし A は IFS$\{f_0,...,f_m\}$ の極限集合である.

$\mathbb{R}^3$ の元 x を $x=(x_1,x_2,x_3)$ と表すとき, $z(x)=x_3$ で定める．ここで本稿における主な考察対象であるシェルピンスキー正四面体を IFS を用いて定義する．

Definition 2.4 (シェルピンスキー正四面体)**.** Δ_3 を正四面体,v_0,v_1,v_2,v_3 を Δ_3 の四頂点とし, $z(v_0)=z(v_1)=z(v_2)=0$ と $z(v_3)=1$ を仮定する．任意の $i\in\{0,1,2,3\}$ に対し, $f_i:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $f_i(x)=1/2(x-v_i)+v_i$ で定める．このとき $\{f_0,f_1,f_2,f_3\}$ は IFS であり, したがって一般論から $\mathbb{R}^3$ のある空でないコンパクト部分集合 A が一意に存在し,

$$A=\bigcup_{i=0}^{3}f_i(A)$$

を満たす．このとき A をシェルピンスキー正四面体と呼ぶ．

このとき IFS$\{f_0,f_1,f_2,f_3\}$ のアドレスマップ π は以下のような簡潔な形をもつ．任意の $i\geq 2$, $f_{\omega_1}\circ f_{\omega_2}\circ\cdots\circ f_{\omega_i}(0)=\sum_{j=1}^{i-1}(1/2)^j v_{\omega_j}$ より,

$$\pi(\omega)=\sum_{j=1}^{\infty}(1/2)^j v_{\omega_j}$$

である．ただし $\omega=\omega_1\omega_2\cdots\in\{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ である．

フラクタル幾何学における主たる興味は, フラクタルの次元を求めることである．ここでいう次元とは集合に対して定まる概念で簡単に言えば, 与えられた集合の各点における自由度もしくは複雑さを表す量である．例えば線分なら 1 次元, 円盤ならば 2 次元といったような整数値の次元の概念をフラクタルのような細いがそれなりに詰まった集合に対しても自然に拡張したハウスドルフ次元がよく考察される．以下では特に空間 X を $\mathbb{R}^N(N\in\mathbb{N})$ とする．

Definition 2.5 (ハウスドルフ次元)**.** $A\subset\mathbb{R}^N$ とし, $|A|:=\sup_{x,y\in A}||x-y||$ と定める．ただし $||\cdot||$ は $\mathbb{R}^N$ 上の通常のユークリッドノルムである．任意の $\delta>0,t\geq 0$ に対して,

$$H^t_\delta(A):=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}|C_i|^t|A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i,|C_i|\leq\delta\}$$

で定める．このとき,$\delta_1<\delta_2$ ならば,$H^t_{\delta_1}(A)\geq H^t_{\delta_2}(A)$ より,

$$H^t(A):=\lim_{\delta\to 0}H^t_\delta(A)$$

が定義される．

H^t を t 次元ハウスドルフ外測度という．このときルベーグ外測度に対して, ルベーグ可測集合という概念が定義されたように, H^t 可測集合という概念が定義される．注意することとして, $\mathbb{R}^N$ のボレル集合は H^t 可測集合である．

$$d_h(A):=\inf\{t\geq 0|H^t(A)=0\}=\sup\{t\geq 0|H^t(A)=\infty\}$$

とおく．

$d_h(A)$ を A のハウスドルフ次元という．

例えば, A を三進カントール集合としたとき, $d_h(A) = \log 2/\log 3$, A をシェルピンスキーガスケットとしたとき, $d_h(A) = \log 3/\log 2$ である. ハウスドルフ次元や他のフラクタル次元については例えば [5] の Chapter 2, 3 を参照せよ.

3 先行研究

$A \subset \mathbb{R}^N$ とする. A の断面とは $\mathbb{R}^N$ の中の n 次元超平面 (n 次元線形部分空間を平行移動させたもの) との共通部分である. そこで,

$$G(N,n) := \{V \subset \mathbb{R}^N | V \text{ は n 次元線形部分空間 }\}$$

と定める. 適当な距離を入れれば $G(N,n)$ はコンパクト距離空間となる. N 次直交群 $O(N)$ は推移的に $G(N,n)$ に作用するが, その作用に対して不変な確率測度 $\gamma_{N,n}$ が一意に存在することが知られている (詳しくは [14] の Chapter 3 を参照). 例えば,$N=2, n=1$ のとき, $G(2,1)$ の元は原点を通る直線であるが, それらは x 軸とのなす角度 $\theta \in [0,\pi]$ でパラメトライズされる. したがって $[0,\pi]$ 上のルベーグ測度が $G(2,1)$ 上の測度 $\gamma_{2,1}$ を誘導する. まず集合 A の断面のハウスドルフ次元に関する古典的な結果を紹介する.

Theorem 3.1 (Marstrand, 1954, Mattila, 1975)**.** n, N を $n < N$ を満たす自然数, t を $n < t < N$ を満たす実数とする. A を H^t 可測な $\mathbb{R}^N$ の部分集合で $0 < H^t(A) < \infty$ を満たすとする. このとき, 直積測度 $H^t \times \gamma_{N,N-n}$ についてほとんど全ての $(x,V) \in A \times G(N,N-n)$ について,

$$d_h(A \cap (V+x)) = t - n$$

が成り立つ.

$n=1, N=2$ の場合には 1954 年に Marstrand が示し ([11]), 一般の場合には Mattila が 1975 年に示している ([12]). 例えば A をシェルピンスキーガスケット, $t = \log 3/\log 2$(t はシェルピンスキーガスケットのハウスドルフ次元で $0 < H^t(A) < \infty$ が知られている), $l(a,\theta)$ を x 軸に対し角度 θ で A の点 a を通る直線とすれば, $H^t \times \gamma_{2,1}$ についてほとんど全ての $(a,\theta) \in A \times G(2,1)$ について, $A \cap l(a,\theta)$ のハウスドルフ次元は $t-1$ ということがわかり, 自然な結果だが, ある方向を固定したときのそれと垂直に切ったときにできる断面の情報というのはこれだけでは得られない.

ある固定した方向に垂直な断面に関しては, 例えば Hawkes([7]) が $C_{1/3} \times C_{1/3}$(ただし, $C_{1/3}$ は三進カントール集合), Kenyon と Peres([9]) が $C \times D$(ただし, C, D は三進カントール集合と同相な特殊な集合) に関する研究を行っている. また Mattila がハウスドルフ次元が 2 の二次元平面内の集合だが, ある方向を固定したときにそれと垂直に切った全ての断面が高々一点 (したがって断面のハウスドルフ次元は 0) という興味深い例を構成している ([13]). これから本稿における直接的な先行研究を述べるが, そのためにいくつか定義しておく.

Definition 3.2 (2 進展開)**.** $c \in [0,1]$ を任意にとり, 列 $a(c) = \{a_j(c)\}_{j=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ を以下で定義

する．c が non-dyadic なとき (つまり $c=m/2^n$ の形で表せないとき), 任意の j に対して,

$$a_j(c)=\frac{1}{2}\left(\chi_{[0,1]}+\sum_{i=0}^{2^j-1}(-1)^{i+1}\chi_{[\frac{i}{2^j},\frac{i+1}{2^j}]}(c)\right) \qquad \cdots(*)$$

と定める．ただし集合 A について, 関数 χ_A は A の定義関数である．つまり $a(c)$ は c の 2 進展開を与える．$c\in[0,1]$ が dyadic な有理数のとき (つまり $c=m/2^n$ の形で表せるとき), $a(c)=\{a_j(c)\}_{j=1}^{\infty}$ を $(*)$ で与えれば, 二通りで記述できるが, そのうち 0 が無限個続く方を改めて $a(c)$ とおく．例えば $a(3/8)=011\overline{0}=0110000\cdots$ である．また本稿では $\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ で有限数列 $a_1a_2\cdots a_n$ の繰り返しを表すことにする．

先行研究を述べる．

Theorem 3.3 (Benjamini and Peres, 1991, [2])**.** A を例 2.2 で定義されるシェルピンスキーガスケットととする (砕けて言えば A の 3「頂点」のうち 2 つが x 軸上にあり, 残る一つの「頂点」の y 座標が 1 である)．$c\in[0,1]$ に対して, $J(c):=\{(x,y)\in A|y=c\}$ とおく．このとき,

$$d_h(J(c))=\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(1-a_j(c))$$

である．

例えば, $c=1/2$ のとき $d_h(J(1/2))=1$ で,$c=1/3$ のとき, $d_h(J(1/3))=1/2$ であり, 一般的に c が $a_1a_2\cdots a_k\overline{a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_{k+l}}$ という二進展開表示を持てば,

$$d_h(J(c))=\frac{m}{l}$$

である．ただし, $m=\#\{j\in\{k+1,...,k+l\}|a_j=0\}$ である．

このとき関数 d: $[0,1]\to\mathbb{R}$ を $d(c):=d_h(J(c))$ で定め, ハウスドルフ次元関数と呼ぶ．この関数に関して注意点をいくつか以下に述べておく．

Remark 3.4. (1) d はボレル可測.

(2) d は任意の $c\in[0,1]$ で不連続.

(3) $G:=\{(c,d(c))\in\mathbb{R}^2|c\in[0,1]\}, S=[0,1]\times[0,1]$ とおく．このとき, $\overline{G}=S$ である．

(3) に関して, $0\le d(c)\le 1$ より $G\subset S$ は常に成り立っていることに注意せよ．特に上記 (2), (3) からハウスドルフ次元関数のグラフ自体も「フラクタル的」と思えるが, より深くハウスドルフ次元関数の複雑さを考察するために与えられた実数 $r\in[0,1]$ に対して $\{c\in[0,1]|d(c)=r\}$ という集合のハウスドルフ次元 (複雑さ) を考えることは意味がある．なぜならば仮に $0\le\alpha:=d_h(\{c\in[0,1]|d(c)=1/3\})\le 1$ とおけば, $d_h(\{(x,y)\in S|y=1/3\})=1$ と合わせて, グラフ G と正方形 S は高さ 1/3 のところでハウスドルフ次元の意味で, $1-\alpha$ だけ異なるという (3) だけからでは得られない精密な複雑さがわかるからである．

この問題は "*distribution problems*" に翻訳される．[4] p,77 において Eggleston は "*distribution problems*" を以下のように説明している．"Each real number θ lying between 0 and 1 is expressed as a decimal on the scale M where M is an integer greater than or equal to 2. A property of θ is given in terms of this expression as a decimal, and the problem is to find the dimension of the set of those θ which have the property. These problems may be called *distribution problems*".

要するに集合 $\{\theta \in [0,1] | \theta$の M 進展開の形で表される何らかの命題は真 $\}$ の次元を問うのが "*distribution problems*" である．我々の扱うのは $M = 2$ の場合である．簡潔に古典的な *distribution problems* を [3] の導入で見られるように振り返ってみる．任意の $c \in [0,1]$ に対して,

$$b_n(c) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j(c)$$

と定義する．ただし $a_j(c)$ は $(*)$ で定義したものである．任意の $0 \leq r \leq 1$ に対して, 集合 F^r, P^r, P_r, Q^r, Q_r, R^r そして R_r を以下で定義する．

$$F^r := \left\{c \in [0,1] | \lim_{n\to\infty} b_n(c) = r\right\},$$

$$P^r := \left\{c \in [0,1] | \limsup_{n\to\infty} b_n(c) = r\right\}, P_r := \left\{c \in [0,1] | \liminf_{n\to\infty} b_n(c) = r\right\},$$

$$Q^r := \left\{c \in [0,1] | \limsup_{n\to\infty} b_n(c) \leq r\right\}, Q_r := \left\{c \in [0,1] | \liminf_{n\to\infty} b_n(c) \geq r\right\},$$

$$R^r := \left\{c \in [0,1] | \limsup_{n\to\infty} b_n(c) \geq r\right\} \, and \, R_r := \left\{c \in [0,1] | \liminf_{n\to\infty} b_n(c) \leq r\right\}.$$

さらに関数 $H\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$H(r) = \begin{cases} \frac{-r\log r-(1-r)\log(1-r)}{\log 2} & (0 < r < 1) \\ 0 & (r = 0, 1). \end{cases}$$

で定義する．注意することとして $H(r) \geq 0$ で H は上に凸で $(0,1)$ 上実解析的である．以下の結果が知られている．

- $F^{1/2}$ は $[0,1]$ 上のルベーグ測度に関してほとんど全ての $c \in [0,1]$ を含む ([6]).
- $0 \leq r < 1/2$ のとき, $H(r) = d_h(Q^r)$ で,$1/2 < r \leq 1$ のとき,$H(r) = d_h(Q_r)$ である ([1]).
- $0 \leq r < 1/2$ のとき, $H(r) = d_h(R_r)$ で,$1/2 < r \leq 1$ のとき,$H(r) = d_h(R^r)$ である ([10]).
- $0 \leq r \leq 1$ のとき,$H(r) = d_h(F^r)$ である ([4]).

これらの結果から我々の "*distribution problems*" の答えが系として直ちに導かれる．

Corollary 3.5. 任意の $0 \leq r \leq 1$ に対して,

$$d_h(\{c \in [0,1] | d(c) = r\}) = H(r)$$

である．

証明は例えば [3] を参照せよ．Benjamini と Peres による証明の鍵となるのは "良い" 測度の構成である．しかしその手法を単純に三次元の場合に拡張するのは容易ではない．そこで今回用いる手法は 2016 年に開発された Rempe-Gillen と Urbański による非自励的等角反復関数系の理論である ([16]).

非自励的反復関数系およびその「極限集合」について簡潔に述べる．まず反復関数系の場合, 定義 2.3 で述べたアドレスマップの定義に現れる写像の反復は語 ω に対して $f_\omega := f_{\omega_1} \circ f_{\omega_2} \circ \cdots \circ f_{\omega_n}$ で表されるが, 時刻 n に対していつも同じ写像の組 $\{f_0, ..., f_m\}$ から f_{ω_n} を選んでいる．非自励的反復関数系においては反復する写像の組は時刻 n 毎に異なっていてもよく, その「極限集合」は反復関数系の極限集合が定義 2.3 で述べたアドレスマップの像として記述されたように, 非自励的反復関数系の「アドレスマップ」の像として定義される．

4 主結果

ここでは A を定義 2.4 のシェルピンスキー正四面体とし, $c \in [0,1]$ に対して, 断面を $J(c) := \{(x,y,z) \in A | z = c\}$ で定める．また $a(c) = \{a_j(c)\}_{j=1}^{\infty} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ を定義 3.2 で定義した c の二進展開とする．先ほど述べた非自励的等角反復関数系を c 毎に構成し, その「極限集合」として $J(c)$ を表し, [16] の理論を適応させ, 以下の結果を得た．

Theorem 4.1. c を $[0,1]$ の実数とする．このとき

$$d_h(J(c)) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\log 3}{\log 2}(1 - a_j(c)).$$

これは定理 3.3 の三次元版である．さらに系 3.5 の三次元版として以下が得られる．

Theorem 4.2. 任意の $0 \le r \le \log 3/\log 2$ に対して,

$$d_h(\{c \in [0,1] | d_h(J(c)) = r\}) = \frac{-\frac{\log 2}{\log 3} r \log(\frac{\log 2}{\log 3} r) - (1 - \frac{\log 2}{\log 3} r)\log(1 - \frac{\log 2}{\log 3} r)}{\log 2}.$$

Remark 4.3. 以上二つの結果の N 次元への拡張も同様にしてできる．すなわち N 次元シェルピンスキーガスケットの $(N-1)$ 次元シェルピンスキーガスケットを「底面」にし, それに平行な断面のハウスドルフ次元の計算も同様である．

参考文献

[1] A.S. Besicovitch ,*On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system (On sets of fractional dimensions II)*, Math. Annalen 110 (1934), 321-330.

[2] I. Benjamini and Y. Peres, *On the Hausdorff dimension of fibres*, Israel J. Math. 74 (1991), 267-279.

[3] L. Carbone, G. Cardone and A. C. Esposito, *Binary digits of numbers: Hausdorff dimensions of intersections of level sets of averages' upper and lower limits*, Sci. Math. Jpn. 60 no. 2(2004), 347-356.

[4] H.G. Eggleston, *Sets of Fractional Dimensions which occur in Some Problems of Number Theory*, Proc. of the London Math. Soc., 2nd series, vol. 54 (1952), 42-93.

[5] K. Falconer, *Fractal geometry-Mathematical foundations and applications(Third edition)*, WILEY, 2014.

[6] G.H. Hardy , J.E. Littlewood , *Some problems on Diophantine approximations*, Acta Math. 37 (1914), 155-190.

[7] J. Hawkes, *Some algebraic properties of small sets*, Q. J. Math. Oxf. 26 (1975), 195-201.

[8] J. Hutchinson, *Fractals and Self-Similarity*, Indiana Univ. Math. J. 30, no. 5 (1981), 713-747.

[9] R. Kenyon and Y. Peres, *Intersecting random translates of invariant Cantor sets*, Inventiones math. 104(1991), 601-629.

[10] V. Knichal , *Dyadische Entwicklungen und Hausdorffsches Mass*, Mém. Soc. Roy. sci. Boheme, 14 (1934), 1-18.

[11] J. M. Marstrand, *Some fundamental geometrical properties ofplane sets offractional dimensions*, Proc. Londonmath. Soc. III. Ser. 4(1954), 257-302.

[12] P. Mattila, *Hausdorff dimension, orthogonal projections and intersections with planes*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1(1975), 227-224.

[13] P. Mattila, *Hausdorff dimension and capacities of intersections of sets in n-space*, Acta Math. 152(1984), 77-105.

[14] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.

[15] Y. Nakajima, *Self-similar fractals related to regular tetrahedron and imaginary cubes*, preprint.

[16] L. R. -Gillen and Mariusz Urbański, *Non-autonomous conformal iterated function systems and Moran-set constructions*, Trans. Amer. Math. Soc., 368(3) (2016), 1979-2017.

[17] P. A. P. Moran, *Additive functions of intervals and Hausdorff measure*, Proc. Camb. Philos. Soc., 42:15(1946).

[18] H. Tsuiki, *Does it Look Square? -Hexagonal Bipyramids, Triangular Antiprismoids, and their Fractals*, in: Sarhagi, R., Barrallo, J. (eds.) Proceedings of Conference Bridges Donostia - Mathematical Connections in Art, Music, and Science, Tarquin publications(2007), 277-286.

[19] H. Tsuiki, *SUDOKU Colorings of the Hexagonal Bipyramid Fractal*, In Proceedings KyotoCGGT 2007, LNCS 4535(2008), 224-235.

[20] H. Tsuiki, *Imaginary cubes-objects with three square projection images*, In: Proceedings of Bridges 2010, Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture, Tessellations Publishing, Phoenix, Arizona (2010), 159-166.

[21] H. Tsuiki, *Imaginary Cubes and Their Puzzles*, Algorithms 5(2) (2012), 273-288.

[22] H. Tsuiki, *Obtaining the H and T Honeycomb from a Cross-Section of the 16-cell Honeycomb*, in Conference Proceedings of Bridges (2017), 147-152.

[23] H. Tsuiki and Y. Tsukamoto, *Imaginary Hypercubes*, In: Discrete and Computational Geometry and Graphs, Lecture Notes in Computer Science Volume 8845 (2014), 173-184.

[24] H. Tsuiki and Y. Tsukamoto, *Sudoku Colorings of a 16-cell Pre-Fractal*, in Discrete and Computational Geometry and Graphs, Proceedings of JCDCGG 2015, LNCS 9943 (2016), 265-276.

[25] H. Tsuiki and Y. Yokota, *Enumerating 3D-Sudoku Solutions over Cubic Prefractal Objects*, Journal of Information Processing 20(3) (2012),667-671.