

# 時間依存する調和振動子ポテンシャルを持つ 非線形シュレーディンガー方程式の解の漸近挙動

村松 亮 (Ryo MURAMATSU)\*

東京理科大学大学院 理学研究科数学専攻 修士課程 2 年

## 1 導入

微分方程式論において最も基礎的な問題の一つは、解の存在と一意性である。時間変数の入った微分方程式である発展方程式においては、時間局所的および大域的な解の存在と一意性が問題になるが、とくに非線形発展方程式においては時間局所的に解が存在しても時間大域的に解が存在するとは限らない。このことに関連して、“発展方程式の解が時間大域的に存在するとき、その解は時間無限大においてどのような関数に漸近するか”という問題が存在する。双曲型や分散型の発展方程式では、この問題を物理学の言葉を借りて散乱問題と呼び、解の存在と一意性と並んで基礎的な問題に位置付けている。

ポテンシャルの無い非線形シュレーディンガー方程式  $i\partial_t u + \frac{\Delta}{2}u = F(u)$  においては、解の漸近挙動に影響を及ぼすのは非線形性の強さである。例えばべき乗型非線形項  $F(u) = \nu|u|^p u$  ( $p \geq 0, \nu > 0$ ) の場合、 $p$  の値によって適切性や漸近挙動が変化するという事実が知られている。具体的には、 $0 < p < 4/n$  のとき  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$  において適切であり、特に時間大域的解  $u \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$  が存在して、 $2/n < p < 4/n$  のとき  $u$  は自由シュレーディンガー方程式の解  $e^{it\Delta/2}u_0$  に漸近する。一方、 $p = 2/n$  のとき  $F(u)$  は長距離型非線形項と呼ばれ、このとき (1) の時間大域的解  $u$  は自由解には漸近しないが、自由解に修正因子を作用させたものを漸近形に持つまた、 $0 < p < 2/n$  のとき、いかなる非自明解  $u$  も散乱状態を持たない。これは非線形シュレーディンガー方程式において解の漸近挙動は線形部のもつ分散性と非線形性のパワーバランスによって決定されることを意味している。自由解に漸近する短距離型非線形項の時は、分散性が非線形性を完全に優越している場合に相当し、修正散乱状態に漸近する長距離型非線形項の場合は、分散性が優越するものの非線形項の影響が時間無限大においても無視できない場合に当たるのである。

本研究では次の時間に依存するポテンシャルを持つ非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題に対し、解の漸近挙動を考察している：

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \frac{1}{2}(\Delta - \sigma(t)x^2)u(t, x) = F(u) \equiv \nu F_L(u) + \mu F_S(u), \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ ,  $n \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\nu, \mu \in \mathbb{R}$  で、 $u = u(t, x)$  は複素数値未知関数である。また、本講演では簡単のため非線形項は以下の形に限るが、非線形項がいくつかの不等式を満たせば、同様の方法で証明できる：

$$F_L(u) = |u|^{\rho_L} u, \quad F_S(u) = |u|^{\rho_S} u, \quad \rho_L = 2/n(1 - \lambda) < \rho_S. \quad (2)$$

ただし、 $0 \leq \lambda < 1/2$  は  $\sigma(t)$  によって定まる定数とする。

主定理に必要ないくつかの仮定を用意する。

仮定 1.  $\sigma(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$  は  $t^2\sigma(t) \rightarrow k \in [0, 1/4)$  をみたすとし、 $\sigma(t)$  を係数関数にもつ、次のヒルの方程式

$$y''(t) + \sigma(t)y(t) = 0 \quad (3)$$

\* 本研究は川本昌紀氏 (愛媛大学) との共同研究に基づくものである。

の線形独立解  $y_1(t), y_2(t) \in C^1(\mathbb{R})$  が,

$$|y_2(t)| \geq |y_1(t)| \ (|t| \gg 1), \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} |y_2(t)| = \infty$$

をみたすとする.

例えば,  $\sigma(t) \equiv 0$  の時 (1) は自由シュレーディンガー方程式に相当し, 仮定 1 において対応する線形独立解は  $y_1(t) = \text{const}$ ,  $y_2(t) = t$  となる. 同様に (1) が定常調和振動子の時に対応する  $y_1(t), y_2(t)$  は,  $y_1(t) = \sinh t$ ,  $y_2(t) = \cosh t$  と求められる. これは  $\sigma(t) = -1$  のときの解である. このように, (3) の解は対応する (1) の基本解や古典軌道と結びついていることが分かる.

また, ヒルの方程式の基本解系  $\{\zeta_1(t), \zeta_2(t)\}$  を

$$\zeta_j''(t) + \sigma(t)\zeta_j(t) = 0 \quad (j = 1, 2), \quad \begin{cases} \zeta_1(0) = 1, \\ \zeta_1'(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \zeta_2(0) = 0, \\ \zeta_2'(0) = 1 \end{cases}$$

をみたすものとして定義する.

仮定 2.  $a_{1,\pm} \in \mathbb{R}$ ,  $a_{2,\pm} \neq 0$  が存在して,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\zeta_1(t)}{|y_2(t)|} = a_{1,\pm}, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\zeta_2(t)}{|y_2(t)|} = a_{2,\pm}$$

が成り立ち, さらに  $r_0 > 0$  と  $c > 0$  が存在して, 任意の  $t \in (-\infty, -r_0] \cup [r_0, \infty)$  に対し  $|\zeta_2(t)| > c$  が成り立つ.

仮定 3.  $b_{1,\pm} \neq 0$ ,  $b_{2,\pm} \neq 0$ ,  $\delta_0 > 0$  が存在して,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\zeta_1(t)}{|y_1(t)|} = b_{1,\pm}, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\zeta_2(t)}{|y_2(t)|} = b_{2,\pm}, \quad \left| \frac{y_1(t)}{y_2(t)} \right| \leq C|t|^{-\delta_0}$$

が成り立ち, さらに  $r_0 > 0$  と  $c > 0$  が存在して, 任意の  $t \in (-\infty, -r_0] \cup [r_0, \infty)$  に対し  $|\zeta_2(t)| > c$  が成り立つ.

また,  $\gamma \in \mathbb{R}$  に対し,

$$H^{\gamma,0} := \left\{ f \in \mathcal{S}' \left| \|f\|_{\gamma,0} := \left( \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^\gamma |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty \right. \right\}, \quad (4)$$

$$H^{0,\gamma} := \left\{ f \in \mathcal{S}' \left| \|f\|_{0,\gamma} := \left( \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^\gamma |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \right. \right\} \quad (5)$$

と定義する. ただし,  $\langle \cdot \rangle := (1 + |\cdot|^2)^{1/2}$  とする. また,  $\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)$  は  $f$  のフーリエ変換である.

## 2 先行研究

非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題の時間大域的適切性および散乱理論は Ginibre-Velo[9, 10], Ginibre-Ozawa-Velo[8] や Tsutsumi-Yajima[23] などをはじめとして多くの研究がある. とくに [23] は  $H^{\gamma_1, \gamma_2}$  に初期値を持つ非線形シュレーディンガー方程式の  $L^2$  散乱を示している. Hayashi-Naumkin[12] により, 長距離型非線形シュレーディンガー方程式の  $L^\infty$  および  $L^2$  における修正散乱状態が得られた. この論文で本研究と関連して重要なのは, 積分方程式と不動点定理を用いて得た時間局所解のアプリオリ評価を導出する際に, 解の時空間  $L^p$ - $L^q$  評価であるストリッカーズ評価を直接は用いず, 位置作用素  $x$  と発展作用素の交換関係から  $L^\infty$  ノルムの時間減衰評価を導出する点にある. この時間減衰評価が実質的に修正散乱状態の証明に当たり, さらに第二漸近形の導出も同じ評価から出すことができる.

本研究で取り扱う時間依存ポテンシャルのうち  $\sigma(t)$  がある速さで減衰するものに対しては Kawamoto-Yoneyama[16] で解のストリッカーズ型評価が得られているが, このとき解は時間に関して増大するノルムで評

価されてしまうため、散乱状態の存在どころか時間大域的適切性すら証明することができない.[12] でストリッカーズ評価を用いる必要がないのは、この問題点を克服しさらにそのまま修正散乱状態の存在まで証明できるという点で非常に有用である. ただしこの方法を用いるには発展作用素の MDFM 分解と呼ばれる作用素の分解が必要となる.

Korotyaev[17] では  $\sigma(t)$  が連続周期関数という仮定の下で発展作用素を分解している. また [16] や Kawamoto[13] では  $\sigma(t)$  が有界かつ遠方で減衰するという仮定の下同様に発展作用素の MDFM 型分解を得ている. この結果を受けて、本研究では [12] の手法を応用して (1) の  $L^\infty \cap L^2$  における散乱状態および修正散乱状態の存在を証明することが目的である.

### 3 主定理

**主定理 1.**  $n/2 < \gamma < \min\{2, 1 + 2/n\}$  に対し  $u_0 \in H^{\gamma,0} \cap H^{0,\gamma}$  とし、十分小さな  $\varepsilon > 0$  に対して  $\|u_0\|_{\gamma,0} + \|u_0\|_{0,\gamma} = \varepsilon' \leq \varepsilon$  をみたすとする. また、

$$\begin{cases} \nu = 0 \\ \nu \neq 0 \end{cases} \quad \text{のとき, 仮定} \begin{cases} 1, 2, \\ 1, 3, \end{cases}$$

をみたすとする. このとき、(1) の時間大域的な一意解  $u \in C(\mathbb{R}; H^{\gamma,0} \cap H^{0,\gamma})$  が存在して、

$$\|u(t)\|_\infty \leq C\varepsilon'(1 + |\zeta_2(t)|)^{-n/2} \quad (6)$$

をみたす.

この (1) の解の時間大域的アプリオリ評価を用いて、次の主定理が示される:

**主定理 2.**  $n/2 < \gamma < \min\{2, 1 + 2/n\}$  に対し  $u_0 \in H^{\gamma,0} \cap H^{0,\gamma}$  とし、十分小さな  $\varepsilon > 0$  に対して  $\|u_0\|_{\gamma,0} + \|u_0\|_{0,\gamma} = \varepsilon' \leq \varepsilon$  とする. また、 $u_0 \in H^{\gamma,0} \cap H^{0,\gamma}$  は主定理 1 の時間大域的解とし、さらに仮定 1,3 をみたすとする. このとき、 $\delta_1 > 0$ ,  $W \in L^\infty \cap L^2$ ,  $\tilde{C}_1(\varepsilon', \nu) \geq 0$  と  $\tilde{C}_2(\varepsilon', \mu) \geq 0$  が存在して、任意の  $t \geq r_0$  に対して

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{F}(U_0(0, t)u(t, \cdot))(t) \exp \left\{ i\nu \int_{r_0}^t F_L(|\zeta_2(\tau)|^{-n/2} \mathcal{F}(U_0(0, \tau)u(\tau, \cdot))) d\tau \right\} - W \right\|_k \\ & \leq C\varepsilon' t^{-\delta_0 + \tilde{C}_1(\varepsilon', \nu)} + C\varepsilon' t^{-\delta_1 + \tilde{C}_2(\varepsilon', \mu)} \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし、 $\nu = 0$  のとき  $\tilde{C}_1(\varepsilon', \nu) = 0$  であり、 $\mu = 0$  のとき  $\tilde{C}_2(\varepsilon', \mu) = 0$  とする. ここで、 $k = 2$  または  $\infty$  であり、 $\alpha \in (0, 1)$  とする. また、 $\delta_0$  は仮定 3 に現れる定数である.

### 4 証明の概略

**主定理 1 の証明.**  $T, \varepsilon' > 0$ ,  $\nu, \mu \in \mathbb{R}$  に対し、関数空間  $X_T$  を

$$\begin{aligned} X_T := \left\{ \phi \in C([r_0, T]; \mathcal{S}'); \|\phi\|_{X_T} = \sup_{t \in [r_0, T]} \left( (1+t)^{C_1(\varepsilon', \nu)} + e^{C_2(\varepsilon', \mu)} \right)^{-1} \|U_0(0, t)\phi(t)\|_{0,\gamma} \right. \\ \left. + \sup_{t \in [r_0, T]} (1 + |\zeta_2(t)|)^{n/2} \|\phi(t)\|_\infty < \infty \right\} \end{aligned}$$

と定義する. ここで、 $C_1(\varepsilon', \nu), C_2(\varepsilon', \mu) > 0$  は  $\varepsilon', \mu$  に対して後で決める定数である. ここで以下の補題を用意する:

**補題 1.**  $n/2 < \gamma < 1 + 2/n$  とする. 十分小さな  $\varepsilon > 0$  に対し、 $u_0 \in H^{\gamma,0} \cap H^{0,\gamma}$  が  $\varepsilon' = \|u_0\|_{H^{\gamma,0}} + \|u_0\|_{H^{0,\gamma}} \leq \varepsilon$  をみたすとき、 $T > 0$  と  $u \in X_T$  が存在して、

$$\|\phi\|_{X_T} \leq C_T \varepsilon', \quad \forall t \in [r_0, T] \quad (7)$$

が成り立つ.

補題 2. 補題 1 で得られた (1) の時間局所解  $u$  に対し,

$$\|u(t)\|_\infty \leq C(1 + |\zeta_2(t)|)^{-n/2}\varepsilon', \quad \forall t \in [-T, -r_0] \cup [r_0, T] \quad (8)$$

が成立する.

この補題は (1) の線形部の発展作用素を以下の作用素:

$$\mathcal{M}_1(t) := \exp\left(i \frac{\zeta_1(t)}{2\zeta_2(t)} x^2\right), \quad \mathcal{M}_2(t) := \exp\left(i \frac{\zeta_2'(t)}{2\zeta_2(t)} x^2\right), \quad \mathcal{D}(\zeta_2(t))f(x) := \frac{1}{(i\zeta_2(t))^{n/2}} f(x/\zeta_2(t))$$

に分解して時間減衰評価を出すことで得られる. 手法自体は [12] に準えたものであるが, 発展作用素の形状から  $\zeta_2(t)$  に関する特異性を回避するため  $|t| \geq r_0$  の範囲に限定して示されており, また同じ理由から長距離型非線形項の場合は仮定 3 を要求する必要がある.

補題 2 を用いることで,  $T > 0$  に依存しない定数  $C > 0$  が存在して, 任意の  $t \in [-T, -r_0] \cup [r_0, T]$  に対して

$$(1 + |\zeta_2(t)|)^{n/2} \|u(t)\|_\infty \leq \|u\|_{X_T} \leq C(\|u_0\|_{\gamma,0} + \|u_0\|_{0,\gamma}) = C\varepsilon'$$

を得る. したがって  $t \in [-r_0, r_0]$  の範囲でも補題 2 と同様のアプリアリ評価を得ることができれば, [12] と同様連続性の議論を用いることで  $u(t)$  が  $C(\mathbb{R}; H^{\gamma,0} \cap H^{0,\gamma})$  に属することが示されるが, 主定理 (1) の証明において問題となるのは, むしろ  $t \in [-r_0, r_0]$  における適切性なのである. この範囲においては上述したように,  $\zeta_2(t)$  の特異性を考慮しなくてはならないため, 解の慎重な評価が要求される. ここにおいては, 発展作用素の特異性を持たない作用素による分解と位置作用素  $x$ , 運動量作用素  $p$  との交換関係を上手く用いることで,  $X_T$  に接続できるような関数空間で縮小写像を構成する方法で示すことができる.  $\square$

## 参考文献

- [1] Adachi, T., Kawamoto, M.: Quantum scattering in a periodically pulsed magnetic field, Ann. Henri Poincaré, **17**, 2409–2438 (2016).
- [2] Carles, R.: Nonlinear Schrödinger equations with repulsive harmonic potential and applications, SIAM J. on Math. Anal., **35**, 823–843 (2003).
- [3] Carles, R.: Nonlinear Schrödinger equation with time dependent potential, Commun. Math. Sci., **9**, 937–964 (2011).
- [4] Carles, R., Silva, J. D.: Large time behavior in nonlinear Schrödinger equation with time dependent potential, Comm. Math. Sci., **13**, 443–460 (2015).
- [5] Cazenave, T., Wessler, F.B.: The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equations  $H^s$ , Nonlinear Anal., **14**, 807–836 (1990).
- [6] Dodson, B.: Global well-posedness and scattering for the defocusing,  $L^2$ -critical nonlinear Schrödinger equation when  $d \geq 3$ , J. of the A. M. S., **25**, 429–463 (2012).
- [7] Geluk, J. L., Marić, V., Tomić, M.: On regularly varying solutions of second order linear differential equations, Differential and Integral Equ., **6**, 329–336, (1993).
- [8] Ginibre, J., Ozawa, T., Velo, G.: On the existence of the wave operators for a class of nonlinear Schrödinger equations, Ann. de l’L.H.P. Phys. théorique, **60** 211–239 (1994).
- [9] Ginibre, J., Velo, G.: On a class of nonlinear Schrödinger equations I. The Cauchy Problem, general case. II. Scattering theory, general case, J. Funct. Anal., **32**, 1–71 (1979).
- [10] Ginibre, J., Velo, G.: Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations, J. Math. Pure. Appl., **64**, 363–401 (1985).

- [11] Hani, Z., Thomann, L.: Asymptotic behavior of the nonlinear Schrödinger equation with harmonic trapping, *Comm. in P. D. E.*, **69**, 1727–1776 (2016).
- [12] Hayashi, N., Naumkin, P.: Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations, *American J. of Math.*, **120**, 369–389 (1998).
- [13] Kawamoto, M.: Quantum scattering with time-decaying harmonic oscillators, preprint (arXiv:1704.03714).
- [14] Kawamoto, M.: Mourre theory for time-periodic magnetic fields, *J. Funct. Anal.*, **277**, 1–30 (2019).
- [15] Kawamoto, M.: Strichartz estimates for Schrödinger operators with square potential with time-dependent coefficients, preprint (arXiv:1805.07991).
- [16] Kawamoto, M., Yoneyama, T.: Strichartz estimates for harmonic potential with time-decaying coefficient, *J. Evol. Eqn.* **18**, 127–142 (2017) .
- [17] Korotyaev, E. L.: On scattering in an external, homogeneous, time-periodic magnetic field, *Math. USSR-Sb.*, **66**, 499–522 (1990).
- [18] Masaki, S., Miyazaki, H., Uriya, K.: Long-range scattering for nonlinear Schrödinger equations with critical homogeneous nonlinearity in three space dimensions, to appear in *Transaction of the A.M.S.*
- [19] Naito, M.: Asymptotic behavior of solutions of second order differential equations with integrable coefficients, *Trans. A.M.S.*, **282**, 577–588, (1984).
- [20] Sagawa, Y., Sunagawa, H.: The lifespan of small solutions to cubic derivative nonlinear Schrödinger equations in one dimension, *Discrete and Cont. Dyn. Sys.*, **36**, 5743–5761 (2016).
- [21] Shimomura, A.: Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equations with dissipative nonlinearities, *Comm. in P. D. E.*, **31**, 1407–1423 (2004).
- [22] Strauss, W. A.: *Nonlinear scattering theory, scattering theory in Math. Physics*, Reidel, Dordrecht, 1974, pp. 53–78.
- [23] Tsutsumi, Y., Yajima, K.: The asymptotic behavior of nonlinear Schrödinger equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **11**, 186–188 (1984).
- [24] Willett, D.: On the oscillatory behavior of the solutions of second order linear differential equations, *Ann. Polon. Math.*, **21**, 175–194, (1969).