

Appell's F_2 関数の合流操作について

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
向井重雄 (Shigeo MUKAI)

1 導入

一般に非合流型の超幾何関数は、べき関数の積分表示で表すことができます。中でも Appell の F_2 関数は次のように表せます。

$$\iint_{\Delta} u_{F_2} \phi, \quad \left(\phi = \frac{dt_1 dt_2}{t_1(t_1-1)t_2(t_2-1)} \right)$$
$$\Delta = (0, 1) \times (0, 1), \quad u_{F_2} = \prod_{i=0}^5 l_i^{\alpha_i}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= t_1, & l_2 &= t_1 - 1, & l_3 &= t_2, & l_4 &= t_2 - 1, & l_5 &= 1 - xt_1 - yt_2, & l_0 &= 1, \\ \alpha_1 &= b_1, & \alpha_2 &= c_1 - b_1, & \alpha_3 &= b_2, & \alpha_4 &= c_2 - b_2, & \alpha_5 &= -a, & \alpha_0 &= -\sum \alpha_i \end{aligned}$$

ただし $[t_1 : t_2 : 1]$ を同時座標で考えるので、 l_0 は無限遠直線を意味します。

内部関数に着目すると、直線 l_i 達が一般の位置にはないことが分かります。「一般の位置でない」という意味は、2本の線が重なることや、3本以上の線が1点で交わることを意味します。直線の独立性を $\text{rank}[l_i, l_j, l_k]$ で計測すると、2つの組み合わせ $\text{rank}[l_0, l_1, l_2]$ と $\text{rank}[l_0, l_3, l_4]$ だけが2で、残りは全て3であることが分ります。この rank を変えない極限操作だけを F_2 からの合流と考えることにします。 l_i 達が一般の位置にないことから、合流操作を行った場合、出来上がった関数に個性が生まれることが分かりました。今回それを発表します。

2 Pfaffian 方程式

Appell の F_2 関数は、次の微分方程式を満たします。

$$\begin{aligned} \left[x(1-x) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \{ c_1 - (a + b_1 + 1)x \} \frac{\partial}{\partial x} - b_1 \frac{\partial}{\partial y} - ab_1 \right] f(x, y) &= 0, \\ \left[y(1-y) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \{ c_2 - (a + b_2 + 1)x \} \frac{\partial}{\partial y} - b_2 \frac{\partial}{\partial x} - ab_2 \right] f(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

ベクトル値関数 F を次のように定義すると、

$$F := \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} f_0 &:= \iint u_{F_2} \frac{dt_1 dt_2}{t_1 t_2 (1 - xt_1 - yt_2)} \\ f_1 &:= \iint u_{F_2} \frac{(1-x) dt_1 dt_2}{(t_1-1) t_2 (1 - xt_1 - yt_2)} \\ f_2 &:= \iint u_{F_2} \frac{(1-y) dt_1 dt_2}{t_1 (t_2-1) (1 - xt_1 - yt_2)} \\ f_3 &:= \iint u_{F_2} \frac{(1-x-y) dt_1 dt_2}{(t_1-1) (t_2-1) (1 - xt_1 - yt_2)} \end{aligned}$$

次のような関係があります。

$$\begin{aligned}
f &= f_0 - f_1 - f_2 + f_3, \\
\frac{\partial}{\partial x} f &= \frac{a}{x-1} f_1 - \frac{a}{x+y-1} f_3, \\
\frac{\partial}{\partial y} f &= \frac{a}{y-1} f_2 - \frac{a}{x+y-1} f_3, \\
\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f &= \frac{a}{x+y-1} \left(\frac{a+b_1+b_2-c_1-c_2+1}{x+y-1} f_3 - \frac{b_2}{x-1} f_1 - \frac{b_1}{y-1} f_2 \right).
\end{aligned}$$

ベクトル値関数 F は、次の微分方程式を満たします。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} F = \left\{ \frac{1}{x} W_1^{F_2} + \frac{1}{x-1} W_2^{F_2} + \frac{1}{x+y-1} W_5^{F_2} \right\} F \\ \frac{\partial}{\partial y} F = \left\{ \frac{1}{y} W_3^{F_2} + \frac{1}{y-1} W_4^{F_2} + \frac{1}{x+y-1} W_5^{F_2} \right\} F \end{cases} \quad (1)$$

これを Pfaffian 方程式と呼びます。ただし、 $W_i^{F_2}$ はパラメータだけから構成される定係数行列です。 F_2 の内部関数は、6 本の直線で構成されているので、単純に考えると 15 通りの合流が考えられそうです。以下にそれぞれの場合について考察して行きます。

3 Pfaffian 方程式

A. Humbert's Ψ_1

(1) 式において、変数やパラメータを次のように置き換えて、

$$\begin{cases} x = \frac{x'-1}{x'}, \\ y = \varepsilon y', \\ b_2 = c_2 + \frac{1}{\varepsilon} d_2, \end{cases}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を取ります。ベクトル値関数 P を、

$$P = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{c_2} \begin{bmatrix} 1/\varepsilon & 0 & -1/\varepsilon & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon & 0 & -1/\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

で定義すると、次の方程式を満たします。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x'} P = \left\{ \frac{1}{x'} W_1^{\Psi_1} + \frac{1}{x'-1} W_2^{\Psi_1} + y' W_5^{\Psi_1} \right\} P \\ \frac{\partial}{\partial y'} P = \left\{ \frac{1}{y'} W_3^{\Psi_1} + W_4^{\Psi_1} + x' W_5^{\Psi_1} \right\} P \end{cases} \quad (2)$$

ここで $W_i^{\Psi_1}$ は定係数行列であり、(2) 式は Humbert の Ψ_1 微分方程式系を構成します。元の F_2 の方程式は、変数 x, y について対称であるので、このような極限の取り方は、2 通りあります。

B. Humbert's Ξ_1

(1) 式において、変数やパラメータを次のように置き換えて、

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\varepsilon y'}, \\ c_2 = b_2 - \frac{1}{\varepsilon} d_2, \end{cases}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を取ります。ベクトル値関数 G を、

$$G = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^{b_2} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

で定義すると、次の方程式を満たします。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} G = \{ \frac{1}{x} W_1^{\Xi_1} + \frac{1}{x-1} W_2^{\Xi_1} + y' W_5^{\Xi_1} \} G \\ \frac{\partial}{\partial y'} G = \{ \frac{1}{y'} W_3^{\Xi_1} + W_4^{\Xi_1} + x W_5^{\Xi_1} \} G \end{cases} \quad (3)$$

ここで $W_i^{\Xi_1}$ は定係数行列であり、(3) 式は Humbert の Ξ_1 微分方程式系を構成します。元の F_2 の方程式は、変数について対称であるとともに、 $b_2, c_2 - b_2$ の入れ替えについても対称であるので、このような極限の取り方は、4 通りあります。

C. Hörn's H_2

(1) 式において、変数やパラメータを次のように置き換えて、

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\varepsilon y'}, \\ a = -\frac{1}{\varepsilon} d_2, \\ b_2 = b' - \frac{1}{\varepsilon} d_2, \\ c_2 = c' - \frac{1}{\varepsilon} d_2, \end{cases}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を取ります。ベクトル値関数 H を、

$$H = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^a \begin{bmatrix} 1/\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

で定義すると、次の方程式を満たします。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} H = \{ \frac{1}{x} W_1^{H_2} + \frac{1}{x-1} W_2^{H_2} + y' W_5^{H_2} \} H \\ \frac{\partial}{\partial y'} H = \{ \frac{1}{y'} W_3^{H_2} + W_4^{H_2} + x W_5^{H_2} \} H \end{cases} \quad (4)$$

ここで $W_i^{H_2}$ は定係数行列であり、(4) 式は Hörn の H_2 微分方程式系を構成します。 F_2 の方程式の対称性から、このような極限の取り方は、4 通りあります。

D. Kummer's ${}_1F_1 \times {}_1F_1$

(1) 式において、変数やパラメータを次のように置き換えて、

$$\begin{cases} x = \varepsilon d_1 x', \\ y = \varepsilon d_2 y', \\ a = \frac{1}{\varepsilon}, \end{cases}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を取ります。ベクトル値関数 K を、

$$K = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

で定義すると、次の方程式を満たします。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x'} K = \{ \frac{1}{x'} W_1^K + W_2^K \} K \\ \frac{\partial}{\partial y'} K = \{ \frac{1}{y'} W_3^K + W_4^K \} K \end{cases} \quad (5)$$

ここで W_i^K は定係数行列であり、(5) 式は各変数の Kummer 微分方程式の直積型となります。。このような合流の仕方は l_5 と l_0 間に限られるので、1 通りです。

E. 禁止操作

残りの 4 通りの操作では、 l_1 もしくは l_2 を l_3 もしくは l_4 に近づけることになってしまいますが、rank 固定の条件から 2 直線が同時に動いてしまいます。結局、2 箇所同時に合流させる必要があります。さもないと rank を壊してしまい、Holonomic ではない式になることが分かりました。

4 微分方程式の同等性と異質性

Appell の F_2 からの合流操作によって、Humbert の Ψ_1 , Ξ_1 , Hörn の H_2 , Kummer $_1F_1$ の直積型の微分方程式系が得られました。次にこれらの方程式が同等か異質かを判定します。ここでは、パラメータの変換、座標の変換、変数変換で移り合うものは「同等」とします。許される変換は、以下の 3 通りです。

(1) 基底変換

Pfaffian 方程式の解空間での線形変換を考えます。つまり、係数行列 W_i の相似変換となります。この場合、 W_i の固有値は変化しません。

(2) べき関数との積

微分方程式に元からある極値線 ($x = 0$ とか $y = 1$ とか) は任意に付け加えて良いものとします。この場合は、 W_i の固有値をシフトすることに相当します。固有値の重複度の数 (これをスペクトラム型と呼ぶことにします) は変化しません。

(3) 座標変換

同時座標 $[x : y : 1]$ において、線形変換の他に双有理変換も考えることにします。この場合、固有値もスペクトラム型も保存しないかもしれません。

これらの変換も含めて、4 つの微分方程式系が同等であるか、という問題です。Kummer $_1F_1$ の直積については、変数分離系になるので、他とは異質です。Humbert の Ξ_1 は変数変換によって Hörn の H_2 と移り合うことが示せます。では、Humbert の Ψ_1 は、 Ξ_1 や H_2 と移り合うのでしょうか。次の章で考えます。

5 双有理変換における自己同型群

(2)(3)(4) 式を比べると方程式の形は同一です。定係数行列 W_i の中身は異なります。 Ξ_1 と H_2 の同等性は示せました。 Ψ_1 の固有値の数 (スペクトラム型) は異なります。変数の形まで一致しているのだから、双有理変換によってスペクトラム型が移り合うかどうか調べれば良いことになります。実は、移り合わないことを示します。

(2)(3)(4) 式において x と z の役割を入れ替えます。これらの微分方程式が極または零点を持たない点の集合 Q を

$$Q := \{[x : y : z] \in \mathbf{P}^2 \mid xyz(x - y) \neq 0\} \quad (6)$$

で定義します。すると次の補題が成立します。

補題 1. Q から Q への双正則写像 ϕ が、 $\mathbf{P}^2$ から $\mathbf{P}^2$ への双有理写像を引き起こすものとする。この時、写像 $[X : Y : Z] = \phi([x : y : z])$ は、次の形のものに限られる。

$$\begin{cases} \frac{X}{Z} = (-1)^{l_1+1} \left(\frac{x}{z}\right)^{l_1} \left(\frac{y}{z}\right)^{m_1} \left(\frac{x-y}{z}\right)^{n_1}, \\ \frac{Y}{Z} = (-1)^{l_2} \left(\frac{x}{z}\right)^{l_2} \left(\frac{y}{z}\right)^{m_2} \left(\frac{x-y}{z}\right)^{n_2}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2 &\in \mathbf{Z}, \\ l_1 + m_1 + n_1 &= l_2 + m_2 + n_2 = \pm 1, \\ |l_1 - l_2| + |m_1 - m_2| + |n_1 - n_2| &= 2. \end{aligned}$$

従って、 Q 上の自己同型写像は無限群になります。Pfaffian 方程式の 1 位の極は自己同型写像によって形は変化しませんが、2 位の極 ($\frac{1}{x^2}$ など) は変化します。2 位の極の形をある固定したものに制限すると、変換群は有限 ($\simeq s_3$) になります。 Ξ_1 の方程式と Ψ_1 の方程式で 2 位の極を同じ形に固定して置いて比較すると、移り合わないことが確かめられました。

参考文献

- [AK] Aomoto, K. and Kita, M., translated by Iohara, K. *Theory of Hypergeometric Functions*, Springer-Verlag. New York, (2011).
- [GRS] Gelfand, I.M., Retakh, V.S. and Serganova, V.V., *Generalized Airy Functions, Schubert cells, and Jordan groups*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **298** (1988), 17-21; English transl. in Soviet Math. Dokl. **37** (1988), 8-12.
- [KT] Kimura, H. and Takano, K., *On Confluence of General Hypergeometric Systems*, Tohoku J. Math. **58** (2006), 1-31.