超可積分系の摂動系の可積分判定条件

京都大学大学院 情報学研究科 数理工学専攻
本永翔也 (Shoya MOTONAGA)

1　導入

常微分方程式の一般解を求めることを考えたい．まずは「解ける」例を挙げることにする．

例 1. $\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$：
$\frac{\dot{x}}{f(x)} = 1$ より $t + C = \int \frac{dx}{f(x)}$ （C：任意定数）．$F(x) := \int \frac{dx}{f(x)}$ とし，逆関数 F^{-1} を許せば

$$x = F^{-1}(t + C).$$

例 2. $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^3, \quad x, y \in \mathbb{R}$：
$H(x,y) = \frac{1}{4}(2y^2 - 2x^2 + x^4)$ とおけば，方程式の解 $(x(t), y(t))$ に対して $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0$．つまり $H(x(t), y(t)) = C$ （C：任意定数）となる．y について整理すれば $y = \pm\sqrt{2C + x^2 - x^4/2}$．つまり $\dot{x} = \pm\sqrt{2C + x^2 - x^4/2}$ という一階の微分方程式になり，例 1 に帰着される．

例 3. $\dot{x} = \mu x - ay - (x^2 + y^2)x, \quad \dot{y} = ax + \mu y - (x^2 + y^2)y, \quad x, y \in \mathbb{R}$ （$a, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は定数）：
極座標変換 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ によって $\dot{r} = \mu r - r^3, \quad \dot{\theta} = a$ となり二つの独立な *1* 次元の方程式が得られて例 1 に帰着する．

上記の方程式は何故「解ける」のだろうか？　また，一般に方程式が与えられたとき，どのようにして「解ける」または「解けない」と知りうるのだろうか？　本稿の目的は，古典的な「解ける」枠組を述べるとともに，与えられた方程式が「解ける」かどうかを判定する条件を（ごく限られた，しかし重要だと考えられるクラスに限って）与えることである．

2　可積分性

以下では，可微分 n 次元多様体 M 上の常微分方程式系 $\dot{x} = X(x)$ とベクトル場 X およびベクトル場 X が生成する流れ $\phi_t^X = \exp(tX)$ をいずれも同一視して考える．これは，局所的にはベクトル場 X を $X = \sum_{i=1}^n X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ と表すとき，X に沿った積分曲線が従う方程式が $\dot{x}_i(t) = X_i(x(t))(i = 1, ..., n)$ であるということ，および，この微分方程式において初期時刻 0 での初期点を x_0 とした解を $x(t; x_0)$ としたとき，X の生成する流れとは，写像 $\phi_t^X : M \to M$ を $\phi_t^X(x_0) = x(t; x_0)$ で定めたものであるということを意味する．また，本稿では，最後の主結果を除いて，関数やベクトル場のクラスは全て C^∞ 級なものを扱うとする。

2.1　第一積分（保存量）

定義 1. 多様体 M 上の C^∞ 関数 F がベクトル場 X の**第一積分**であるとは，関数 F が任意の点 $x \in M$ に対し $\frac{d}{dt}F(\phi_t^X(x)) = 0$ を満たすことをいう．

注意 1. 物理の方では，第一積分は保存量と呼ばれ，いわゆるエネルギー保存則や角運動量保存則などに対応する．

命題 1. C^∞ 関数 F がベクトル場 X の第一積分であることと以下の *(i)*〜*(iii)* は同値である：
(i)　$dF(X) = 0$　　*(ii)*　$\mathcal{L}_X(F) = 0$（ただし $\mathcal{L}_X$ はリー微分）　　*(iii)*　$(\phi_t^X)^*F = F$

第一積分の定義より，初期点 x_0 を固定すると軌道 $\{\phi_t^X(x_0)\}$ は同じレベル集合上に留まる．したがって，値 $c \in \mathbb{R}$ に対するレベル集合 $F^{-1}(c) = \{x \in M : F(x) = c\}$ 上には誘導された力学系 $\phi_t^X|_{F^{-1}(c)}$ がある．c が F の正則値であれば $F^{-1}(c)$ は $n-1$ 次元多様体であり，このレベル集合上に力学系を制限することで方程式の次元を 1 つ下げることができる．この事実は標語的には「第一積分が一つ見つかれば，方程式の次元を 1 つ下げることができる」と説明される．

2.2　可換なベクトル場（連続対称性）

定義 2. ベクトル場 Y がベクトル場 X に対する**可換なベクトル場**であるとは，$[X,Y] = 0$ が成立することをいう．ここで $[X,Y] = XY - YX$ はリー括弧である．

注意 2. ベクトル場 X に対し X 自身は可換なベクトル場である．

注意 3. 物理の方では，可換なベクトル場とはいわゆる連続対称性のことであり，並進対称性や回転対称性などに対応する．

命題 2. ベクトル場 Y がベクトル場 X と可換であることと以下の *(i)*〜*(iii)* は同値である：
(i)　任意の s,t に対し $\phi_t^X \circ \phi_s^Y = \phi_s^Y \circ \phi_t^X$　　*(ii)*　$\mathcal{L}_X(Y) = 0$　　*(iii)*　$(\phi_t^X)_*Y = Y$

可換なベクトル場が存在するとき，簡単な計算から，$x(t)$ が解であれば $\phi_s^Y(x(t))$ も解であることが従う．したがって ϕ_s^Y に沿った方向に関しては 1 次元分の次元が潰せたものと見做すことができ，この事実も標語的には「可換なベクトル場が一つ見つかれば，方程式の次元を 1 つ下げることができる」と説明できる．また，ハミルトン力学系という数理物理学的に自然な系（ニュートンの運動方程式に由来するような方程式を含む方程式系）では，ネーターの定理から，「対称性に由来した保存量が存在する」ことが知られており，このためハミルトン力学系においては第一積分（または連続対称性）を 1 つ見つけると方程式系の次元を 2 つ落とすことができる（正確な主張は [1] を参照せよ）．

2.3　第一積分と可換なベクトル場の存在

与えられたベクトル場に対し，第一積分や可換なベクトル場はどれくらい存在するだろうか？　実は一般に，ベクトル場の正則点（$X(x_0) \neq 0$ なる点）の近傍にはたくさんの局所的な第一積分と可換

なベクトル場が存在する．以下，e_i を第 i 成分を 1，他の成分を 0 とした n 次元ベクトルとする．

定理 1. *(Flow-Box Theorem)* ベクトル場 X に対し $x_0 \in M$ は $X(x_0) \neq 0$ なる点とする．このとき，x_0 近傍にある局所座標 $(U; y_1, ..., y_n)$ が存在して X はこの局所座標のもとで $\dot{y} = e_1$ とできる．特に，U 上では，$n-1$ 個の独立な第一積分 $y_2, ..., y_n$ と n 個の独立な可換なベクトル場 $e_1, ..., e_n$ が存在する．

ここで，独立性については以下の定義を用いる．

定義 3. C^∞ 関数 $F_1, ..., F_k$ が**独立**であるとは，$dF_1, ..., dF_k$ が稠密な開集合上の各点で線型独立であることをいう．また，ベクトル場 $X_1, ..., X_k$ が独立であるとは，これらが稠密な開集合上の各点で線型独立であることをいう．

注意 4. 定理 *1* は，常微分方程式の解の存在と一意性に関する定理と同値である．このようにして「解ける」ことを「良い座標が存在する」ことに言い換えるのは，この後説明する *Liouville-Arnold* の定理の根幹となる．また，一般に，「解ける」ことの背景の一つに，線形化可能性があり，定理 *1* や *Liouville-Arnold* の定理（定理 *2*）だけでなく，無限次元可積分系における逆散乱法の枠組においても，非線形方程式を線型なものに帰着させることは重要になる．

滑らかな常微分方程式は，局所的には解けるが，大域的にはどうであろうか？　素朴には，第一積分か可換なベクトル場が一つ存在するごとに系の次元を 1 つ下げられるのだから，第一積分と可換なベクトル場が合計 n 次元分あれば良さそうに思われる．これを数学的に定式化したものとして次の Bogoyavlenskij 可積分性 [2] が知られている．

定義 4. *(Bogoyavlenskij* 可積分性*)* n 次元可微分多様体上のベクトル場 X が ***Bogoyavlenskij* の意味で（*r,n-r*）-可積分**であるとは，r 個の独立なベクトル場 $X_1, ..., X_r$（ただし $X_1 = X$）と $n-r$ 個の独立な関数 $F_1, ..., F_{n-r}$ が存在して，$[X_i, X_j] = 0$ かつ $dF_i(X_j) = 0$ が任意の i, j について成立することをいう．特に全ての X_i, F_j が解析的であれば，解析的可積分などと呼ぶ．

注意 5. *Bogoyavlenskij* 可積分性は多くの可積分性の一般化である．古くは $(1, n-1)$ 可積分，つまり方程式に対して *n-1* 個の独立な第一積分を見つけることで常微分方程式の一般解が求まると考えられていた（特別な名称はついていないが*"folklore"*として知られている事実である）．本稿では区別のために $(1, n-1)$ 可積分を**超可積分**と呼ぶことにする．ただし超可積分は他の意味で使われることがあるのであまり良い呼び名ではない）．また，解析力学においては，自由度の数だけポアソン可換な保存量を持つという *Liouville* 可積分性が知られているが，m 自由度ハミルトン系が *Liouville* 可積分であるならば (m, m) 可積分であり，*Bogoyavlenskij* 可積分性は *Liouville* 可積分性の一般化になっている．

注意 6. $(r, n-r)$-可積分と $(s, n-s)$-可積分は両立しうる．

本稿で対象にするのは超可積分系なので，超可積分系の例を与えておく．

例 4. 単振子*:*　$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x, \quad x, y \in \mathbb{R}$

第一積分 として $H(x,y)=\frac{1}{2}y^2-\cos x$ を有す．

例 5. *Lotka-Volterra 方程式:* $\dot{x}=ax-bxy,\quad \dot{y}=cxy-dy,\quad x,y\in\mathbb{R}_{>0}$ （a,b,c,d:定数）
第一積分として $H(x,y)=cx+by-d\log x-a\log y$ を有す．

例 6. ケプラー問題: $\dot{x}_i=y_i,\quad \dot{y}_i=-\frac{k}{||x||}x_i,\quad x=(x_1,x_2,x_3),y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$
第一積分としてエネルギー $H=\frac{1}{2}||y||^2-\frac{1}{||x||}$, 角運動量ベクトル $G=x\times y$ の各成分，
およびルンゲ・レンツベクトル $L=\frac{1}{k}y\times G-\frac{x}{||x||}$ の各成分（うち 5 つが独立）を有す．

可積分な系の特徴として，”軌道をトーラス上の線型フローに変換できる”ことが挙げられる．
特に超可積分な場合は，軌道は周期軌道の族をなす．

定理 2. *(Liouville-Mineur-Arnol'd-Jost の定理 [1, 2])* n 次元連続力学系 X は $(r,n-r)$ 可積分であるとし，その第一積分の組を $F=(F_1,...,F_r)$ とする．$c\in\mathrm{Im}F$ に対し，レベル集合 $F^{-1}(c)$ の連結成分 $\mathcal{U}$ の任意の点で $dF_1,...,dF_{n-r}$ は線型独立であり，かつ $\mathcal{U}$ はコンパクトであるとする．このとき $\mathcal{U}$ は埋め込まれた r 次元トーラスであり，さらに $\mathcal{U}$ の近傍 $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ と $\mathbb{R}^{n-r}$ の原点近傍 V，および微分同相写像 $\varphi:\mathbb{T}^r\times V\to\mathcal{N}(\mathcal{U});(\theta,I)\mapsto x$ が存在して，$\dot{x}=X(x)$ は $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ 上

$$\dot{\theta}_i=\omega_i(I)\quad(i=1,...,r)$$
$$\dot{I}_j=0\quad(j=1,...,n-r).$$

と表せられる．ここで $\omega_i(I)$ は I についての C^∞ 級関数である．

定理 2 における変数 (θ,I) を**作用各変数**という．定理 2 より，可積分な系のダイナミクスはトーラス上の線型な流れと同一視でき，この意味で軌道は単純な振る舞いをしていると言える．よく知られているように，トーラス上の線型な流れはどの周波数 ω_i も有理比で表せられないとき（非共鳴という），r 次元トーラスを軌道は稠密に埋め尽くし，いくつかの周波数が有理比で表せられるときには，一般に $k(<r)$ 次元トーラスを軌道は稠密に埋め尽くす．また，超可積分であるときにはレベル集合は 1 次元で，かつコンパクトであるから，軌道は周期軌道となることがわかる．

2.4 可積分判定の歴史

可積分判定の歴史は Poincaré まで遡る．Poincaré は制限三体問題と呼ばれる，可積分系を摂動した方程式が，一般には（あるクラスで）非可積分であることを示した [6]（制限三体問題における歴史的な詳細や，解けないことの意味については [3] や [4] をみよ）．これによって常微分方程式に対しては，解を陽に求めることは不可能であると知られるようになったが，コワレフスカヤによるコマの方程式の解けるパラメータの発見や，決定論から従う複雑な挙動であるカオスと非可積分性との関連において，ようやく「解けないこと」の重要性が少しずつ認識されるように至った．殆どの方程式に対し可積分性は期待できないが，与えられた系の可積分性の判定は現在でも難しい問題である（強力な手法として Ziglin 解析や Morales-Ramis 理論 [5] などが知られている）．また，Poincaré が与えた，近可積分系に対する可積分性判定条件は殆どの場合チェックすることができず，可積分系の摂動系でさえ可積分判定は難しい．

3　超可積分系の摂動

この節では超可積分系の摂動系が多くの力学系に部分的に含まれているとみなせることを示し，さらに超可積分な系の摂動系について，超可積分であるための必要条件を与える．

3.1　平衡点と周期軌道の近傍の挙動

力学系を解析する際，平衡点や周期軌道の近傍に着目するのは基本的である．簡単のため，$\mathbb{R}^n$ での連続力学系 $\dot{x} = X(x)$ を考えることにし，この系の平衡点，あるいは周期軌道を $x = \gamma(t)$ とする（平衡点の場合はこれは定値関数である）．このとき，$x = \gamma(t)$ 近傍の解を $x = \gamma(t) + \varepsilon\xi(t)$ とすると $\xi(t)$ は

$$\dot{\xi} = DX(\gamma(t))\xi + \varepsilon\tilde{X} + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{X}_i = \sum_{j,k} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_j \partial x_k}(\gamma(t))\xi_j\xi_k$$

に従う．この式において $\varepsilon = 0$ とした方程式を**線型化方程式**または**変分方程式**といい，$\varepsilon > 0$ とした場合，線型化方程式の摂動系とみなすことができる．

命題 3. 変分方程式 $\dot{\xi} = DX(\gamma(t))\xi$ は随伴変分方程式 $\dot{\eta} = -DX^\top(\gamma(t))\eta$ の解 $\eta = Y(t)$ に対して時間依存する第一積分 $Y(t) \cdot \xi$ を持つ．

命題 3 より，$n+1$ 次元の自律系

$$\dot{\xi} = DX(\gamma(\tau))\xi, \quad \dot{\tau} = 1$$

は随伴方程式 $\dot{\eta} = -DX^\top(\gamma(t))\eta$ の基本行列を $\Phi(t)$ として n 個の独立な第一積分の組 $\Phi(\tau)\xi$ を持つ．したがって，平衡点や周期軌道を有する力学系においては，その近傍において超可積分系の摂動系とみなすことができる．

注意 7. 平衡点近傍での線型化方程式に対しては，$\dot{\tau} = 1$ によって方程式を拡大せずとも，ジョルダン標準形を考えることで n 個の独立な可換なベクトル場が得られる．

3.2　主結果

N をパラコンパクトな n 次元解析的多様体とする．
ε に解析的に依存する N 上の摂動系を考える：

$$\dot{x} = X_\varepsilon(x), \quad X_\varepsilon = X^0 + \varepsilon X^1 + O(\varepsilon^2)$$

非摂動系 X^0 に対し以下を仮定する．

(A1) 周期 T の周期軌道 $\gamma(t)$ が存在する
(A2) $n-1$ 個の解析的第一積分の組 $F = (F_1, ..., F_{n-1})$ が存在する
(A3) $dF_1, ..., dF_{n-1}$ は $\gamma(t)$ 上の一点で線型独立

この条件のもと，$\Gamma := \{\gamma(t) : t \in [0,T]\}$ とし，次の積分を定める．

$$\mathscr{I}_{F,\gamma} := \int_0^T dF(X^1)(\gamma(t))dt \quad \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

定理 3. （主結果）Γ 近傍において X_ε が ε についても解析的に依存する独立な $n-1$ 個の解析的第一積分を持つならば，$\mathscr{I}_{F,\gamma} = 0$ である．

参考文献

[1] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed., Springer, New York, 1989.

[2] O.I. Bogoyavlenski, Extended integrability and bi-hamiltonian systems, *Comm. Math. Phys.*, 196 (1998), 19–51.

[3] F. ディアク，P. ホームズ，天体力学のパイオニアたち，丸善出版，2004.

[4] 数学セミナー 2020 年 1 月号，日本評論社

[5] J.J. Morales-Ruiz and J.P. Ramis, Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems, *Methods, Appl. Anal.*, 8 (2001), 33–96.

[6] H. Poincaré, *New Methods of Celestial Mechanics*, Vol. 1-3, American Institute of Physics, 1993 (original 1892).