

The heat kernel on SL_2

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
森翔汰 (Shota MORI)*

概要

G を、不変 Riemann 計量を備えた非コンパクト半単純 Lie 群とする。この時、 G 上には Riemann 計量から定まる熱核が存在する。今回は G が $SL_2(\mathbb{R})$ 、 $SL_2(\mathbb{C})$ である時の熱核の explicit な公式を報告する。主な道具として R. Camporesi, E. Pedon による等質ベクトル束上の調和解析、特に Spherical transform、Helgason-Fourier transform を用いる。本研究集会の発表は非専門家向けであることを鑑みて、表現論と調和解析との基本的な関係も紹介する。

1 序

数学、物理学において熱方程式、及びその基本解である熱核は古くから現在に至るまで重要な対象であり続けている。例えば、実直線 $\mathbb{R}$ 上の熱核はガウス核と呼ばれる関数であり、確率論や統計学においても頻繁に現れる。また単位円周 S^1 上の熱核は theta 関数と関わりのあることがよく知られている。

さて、長さや角度の情報を持った連結多様体を Riemann 多様体と呼ぶが、熱方程式は一般の Riemann 多様体上で定義される。従って熱核に関する問題（存在と一意性、求積、等）も同様に定式化される。まず熱核の存在と一意性の問題について述べるが、これは特に古典的なテーマである。実際、コンパクト Riemann 多様体上の熱核は存在して一意的である ([3, Chapter VI] 等を参照)。境界が滑らかな有界領域についても、熱方程式に境界条件を与えれば同様である。また、非コンパクト Riemann 多様体の場合も完備性とリッチ曲率が下に有界であることを課せば良い ([3, Chapter VIII] 等を参照)。多くの具体例がこの仮定を満たす。次に熱核の求積の問題について述べる。ここでの求積とは、一旦、explicit に表すところまでは要求しないものとしておく。Riemann 多様体がコンパクトであれば、単位円周 S^1 の時のような、Fourier 級数論のアナロジーとなる道具がある。即ち、ラプラシアン固有関数系であって L^2 空間の完全正規直交系となるものがとれる。この事実を前提とすれば、熱核を Fourier 級数展開する形で表すことができる。一方、Riemann 多様体が非コンパクトである場合だが、私の知る範囲において、コンパクトの時と似た一般論は無い。少なくとも、そのことについて述べた文献が存在したとしても、あまり知られていないであろうから、この場合の熱核の求積は難しい問題であるといえる。ところで、非コンパクト Riemann 多様体の最も簡単な具体例は実直線 $\mathbb{R}$ である。実直線 $\mathbb{R}$ 上の熱核の求積においては、あくまで一つの解法としてだが、Fourier 変換論が大きな役割を果たす。ここで、Fourier 変換の積分核がラプラシアンの固有関数で

* mori.shouta@i.mbox.nagoya-u.ac.jp

あることに注意しておく、コンパクトの場合と状況が少し似ていることに気付ける。他の非コンパクト Riemann 多様体上でも Fourier 変換論のアナロジー、即ち調和解析を考えることができれば、コンパクトの時のように熱核を何らかの形で表すことが可能となる。つまり熱核の求積の問題は、調和解析を構築する問題に帰着されることとなる。この調和解析であるが、Riemann 多様体がある程度の対称性を持てば構築されることが多い。ここでの対称性とは、多様体に群作用があることを意味する。調和解析を構築する際、今述べた群の表現論を利用することとなる。「表現が全て分かれば、その群が分かったことになる」という言葉もあるため、今回の多様体の対称性を記述する群が与えられている下で、その表現を活用することは当然といえる。

ここまでの背景のまとめも兼ねて、私の問題設定について簡単に述べる。群の中で最も良い対称性を持つもの族として、Lie 群 G が挙げられる。Lie 群 G は位相群であって多様体であり、さらに群演算の写像も滑らかである。この Lie 群 G は自分自身に演算を通して作用している。この設定は熱核の求積のための道具、調和解析を構築するに足る対称性を持ち合わせているだろうか。これを $G = SL_2$ の時に考察したのが今回の研究である ([5], [6])。以下では $G = SL_2(\mathbb{R})$ の場合に絞って、熱核の公式を述べるための準備から始める。

2 群の表現論

本節の内容は主に [4, 第 1 章] によるものである。一般に G を位相群とする。即ち、 G は群であり、Hausdorff 空間であり、さらに群演算が連続的である。複素 Hilbert 空間 V が与えられた時、 $GL_{\mathbb{C}}(V)$ を V 上の可逆な有界線型作用素全体とすると、これは写像の合成に関して群となる。準同形写像 $\pi : G \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(V)$ であって、写像

$$G \times GL_{\mathbb{C}}(V) \ni (g, v) \mapsto \pi(g)v \in V \quad (1)$$

が連続である時、 π や対 (π, V) を G の表現と呼ぶ。特に任意の $g \in G$ に対して $\pi(g)$ がユニタリ作用素である時、ユニタリ表現と呼ばれる。 (π, V) , (σ, W) を G のユニタリ表現とする。次の図式を任意の $g \in G$ に対して可換にするような線形写像 $A : V \rightarrow W$ を intertwining operator と呼ぶ。

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{A} & W \\ \pi(g) \downarrow & & \downarrow \sigma(g) \\ V & \xrightarrow{A} & W \end{array} \quad (2)$$

特に A がユニタリ同型である時、2つの表現 π と σ は同型であると言う。ユニタリ表現の同型類を分類することはもちろん大切であるが、もう少し小さな単位で分類することが普通であるから、そのことを述べる。 (π, V) を G の表現とする。閉部分線型空間 $W \subset V$ であって、任意の $g \in G$ に対し $\pi(g)W \subset W$ が成立するものを G 不変閉部分空間と呼ぶ。この時 (π, W) も G の表現となる。もし (π, V) が非自明な G 不変閉部分空間を持たないのであれば既約表現であると呼び、そうでない、即ち非自明な G 不変閉部分空間を持つものを可約表現であると言う。先ほど述べた「小さな単位」とは表現が既約であることを指すが、その感覚は次の命題から来るものである。

Proposition 1. G を位相群、 (π, V) を G のユニタリ表現、 W を V の G 不変閉部分空間、 $W^{\perp}$ を W の直交補空間とする。この時、 $W^{\perp}$ は G 不変閉部分空間であり、 $V = W \oplus W^{\perp}$ が成立する。

特に有限次元ユニタリ表現はこの命題を繰り返し用いることにより、既約ユニタリ表現の直和で表されることが分かる。一般に G がコンパクトであれば、無限次元ユニタリ表現も可算無限個の既約ユニタリ表現の直和で表すことができる。さて、 $\hat{G}$ を G の既約ユニタリ表現の同型類全体とする。また、 $K \subset G$ をコンパクト部分群としたとき、 G のユニタリ表現を K へ制限することで K のユニタリ表現が現れる。そこで $\tau \in \hat{K}$ に対し、 $\hat{G}(\tau)$ を G の既約ユニタリ表現であって、 K へ制限した時、直和成分に τ が現れるようなもの全体とする (この記号は最後の方で用いる)。 $\hat{G}$ について、具体例を見てみよう。ただし、これ以降 G の表現の記号として $(U, \mathcal{H}_U)$ をよく用いる。

Example 2. $G = \mathbb{R}$ の場合を考える。一般に可換群の既約ユニタリ表現は 1 次元表現であることが知られている ([7, 1.1 節] 等を参照) から、 $\mathcal{H}_U = \mathbb{C}$ の場合を考えればよい。また $U \in \hat{G}$ の値域は $GL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$ であるとしてよい。さらに U がユニタリであることから、任意の $x \in G$ に対して $U(x)$ の絶対値は 1、即ち U の値域が S^1 であることが分かる。以上より、 $U(x)$ はある実数 $u(x)$ を用いて次のように表せる。ただし i は虚数単位である。

$$U(x) = e^{iu(x)}. \quad (3)$$

また、 U の準同型性と指数法則より、次式も成立する。

$$e^{iu(x+y)} = e^{i(u(x)+u(y))}. \quad (4)$$

u は $u(0) = 0$ という条件の下、連続的に定義することができる (U のリフトを考えるということ。標語的には、 S^1 上の点 $U(x)$ の偏角 $u(x)$ を連続的に表していくこととなる。)。この時、(4) と合わせて次が成立する。

$$u(x+y) = u(x) + u(y). \quad (5)$$

ここから u が $\mathbb{Q}$ 線型関数となることが従うが、今 u は連続のため $\mathbb{R}$ 線型となる。従って、ある実数 $-\xi$ が存在して u 、特に U は次式で表されることが分かった。

$$U(x) = e^{-ix\xi}. \quad (6)$$

逆に $U = U_{-\xi}$ をこれで定義すれば G の既約ユニタリ表現となる。故に $\hat{G} = \{U_{-\xi}\}_{\xi \in \mathbb{R}}$ である。

Example 3. $G = S^1$ の場合を考える。これは直前の例で 2π 周期条件を課しただけである。整数 n に対して先の記号と同様に

$$U_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta} \quad (7)$$

として G 上の既約ユニタリ表現を定めると $\hat{G} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ となる。後で $K = SO(2) \cong S^1$ において表現を考えるが、その時は U_n を τ_n と表す。

Example 4. N を 2 以上の自然数とし、 $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ の場合を考える (有限群は離散位相を入れて位相群とみる)。 G は可換群のため、やはり $U \in \hat{G}$ の値域は S^1 である。さらに今回は有限位数という条件もついているから、 $0 \leq k \leq N-1$ を満たす整数 k に対し

$$U_k(x) = e^{2\pi i k \frac{x}{N}} \quad (8)$$

とおくと $\hat{G} = \{U_k\}_{k=0}^{N-1}$ となる。

3 表現論と調和解析

本節の内容は主に [4, 第 3 章]、[8]、[9] によるものである。一般に G を局所コンパクト群、 $C_0(G)$ を G 上の連続関数であってコンパクト台を持つものの全体とする。まず、位相群上の解析を行う上で、次の定理は基本的である。

Theorem 5. G 上の測度 dg が正の定数倍を除いて一意に存在し、任意の $f \in C_0(G)$, $a \in G$ に対し次式が成立する。

$$\int_G f(ag)dg = \int_G f(g)dg. \quad (9)$$

この測度は左 Haar 測度と呼ばれるものである。これを用いて、任意の $f \in C_0(G)$, $(U, \mathcal{H}_U) \in \hat{G}$ に対し、 $\mathcal{H}_U$ 上の作用素 $U(f)$ を次式で定める。

$$U(f) = \int_G f(g)U(g)dg. \quad (10)$$

こうして定めた $U(f)$ は Hilbert Schmidt 作用素であることが知られている。 $U(f)^*$ は $U(f)$ の随伴作用素を表すこととする。以上の設定の下で、次の定理もまた基本的である。

Theorem 6. G 上の左 Haar 測度 dg が与えられているとする。この時、 $\hat{G}$ 上の測度 $d\mu(U)$ が一意的に存在して、任意の $f \in C_0(G)$ に対し次式が成立する。

$$\int_G |f(g)|^2 dg = \int_{\hat{G}} \text{tr}(U(f)^* U(f)) d\mu(U). \quad (11)$$

この測度は Plancherel 測度と呼ばれるものである。これらの道具を用いた解析は調和解析と呼ばれることが多い。その様子を先の具体例と照らし合わせて確認してみよう。

Example 7. $G = \mathbb{R}$ の時、左 Haar 測度は Lebesgue 測度である。実際、Lebesgue 測度は平行移動で不変である。この時、Example 2 を思い出すと、Theorem 6 が Fourier 変換論の Plancherel の定理の一般化であることが見て取れる。

Example 8. $G = S^1$ の時も、Example 3 を思い出すと、Theorem 6 が Fourier 級数論の Parseval の定理の一般化であることが分かる。

Example 9. $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ の時の左 Haar 測度は数え上げ測度である (定数倍を除いて離散一様分布であるとも言える)。今回も Example 4 を思い出すと、Theorem 6 が離散 Fourier 変換論 (DFT) の Parseval の定理の一般化であることが分かる。

以上の例を通して、表現論と調和解析の関係が掴めるものと思う。ただし、今回述べた定理は所謂 L^2 等長公式であって、逆変換については言及していないことに注意していただきたい。つまり、このままでは調和解析を理解したとは到底言えないのである。しかし、本節の内容は主定理 (Theorem 12) の証明で用いる等質ベクトル束上の調和解析の基礎であるため、その重要性は揺るがない。

4 Lie 群上の熱核

調和解析の応用をしやすいくするため、若干の準備を足すところから始める。

4.1 準備

本節で述べられる定理は [4, 第 4,6 章] によるものである。一般に G を局所コンパクト群、 K をそのコンパクト部分群とする。商空間 G/K 上の解析も重要なテーマであるが、次の 2 つの定理が基本となる。

Theorem 10. 商空間 G/K 上の測度 dh (不変測度) が正の定数倍を除いて一意に存在し、任意の $f \in C_0(G/K)$, $a \in G$ に対し次式が成立。

$$\int_{G/K} f(ah)dh = \int_{G/K} f(h)dh. \quad (12)$$

Theorem 11. G の左 Haar 測度 dg , K の左 Haar 測度 dk , G/K 上の不変測度 dh が存在して、任意の $f \in C_0(G)$ に対し次式を満たす。

$$\int_G f(g)dg = \int_{G/K} \int_K f(hk)dkdh. \quad (13)$$

さて、ここからは G を中心有限な非コンパクト半単純 Lie 群、 K を極大コンパクト部分群としよう。例としては $(G, K) = (SL_m(\mathbb{R}), SO(m))$ など多くのものがある。この時、 $G/K \times K$ と G は多様体として自然に同型となることが知られている (行列の極分解を考えるとよい)。Theorem 11 と合わせて、 L^2 空間を次のように分解できる。

$$L^2(G) \cong L^2(G/K) \otimes L^2(K). \quad (14)$$

ただし右辺はテンソル積をとった後に完備化した空間である。一方、コンパクト群 K 上では Fourier 級数論のアナロジーを行うことが可能であり、次の同型が存在する (Peter-Weyl の定理)。

$$L^2(K) \cong \bigoplus_{(\tau, V_\tau) \in \hat{K}} V_\tau \otimes V_\tau^*. \quad (15)$$

右辺から左辺への写像は表現 τ の行列要素を定数倍したものとして与えられる (歴史的な経緯から、既約ユニタリ表現の良い行列要素は球関数と呼ばれる)。(14)、(15) を用いて $L^2(G)$ を分解していくと、最終的に G/K 上の等質ベクトル束 $G \times_K V_\tau$ ($\tau \in \hat{K}$) の切断と対応付けられる空間が現れる。等質ベクトル束上の調和解析はよく研究されている ([1], [2] 等) ため、 G 上の調和解析を行うことをここに帰着させると都合がよい。

4.2 $SL_2(\mathbb{R})$ 上の熱核

$G = SL_2(\mathbb{R})$, $K = SO(2)$ としよう。 G 上には左 G 不変かつ右 K 不変な Riemann 計量を入れる (本来なら両側 G 不変が望ましいが、存在しない故の妥協策である)。この時定まる Laplace-Beltrami

作用素が、我々がラプラシアンと呼んできたものである。Example 3 でも述べたが、 $\hat{K} = \{\tau_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ と表す。 $U \in \hat{G}$, $\tau_n \in \hat{K}$ に対し、 $\Phi_{\tau_n}^U(g)$ ($g \in G$) を U の τ_n に関する「良い」行列要素、即ち球関数とする ([1], [2])。このとき、 $\Phi_{\tau_n}^U(g^{-1})$ はラプラシアン固有関数となることが知られている。この固有値を $\lambda_{\tau_n}^U$ と表す。この時、次が成立する。

Theorem 12. ([5]) $G = SL_2(\mathbb{R})$ 上時刻の $t > 0$ と位置 $g \in G$ における熱核を $\rho_t(g)$ と書くとき、

$$\rho_t(g) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\hat{G}(\tau_n)} e^{t\lambda_{\tau_n}} \Phi_{\tau_n}^U(g^{-1}) d\mu(U). \quad (16)$$

上式における記号はいずれもよく研究されてきたものであり、explicit に表せる。従って、熱核もある程度 explicit に表されるといえる。

謝辞

本研究は多くの先生、学生からの助言によって成り立っています。特に伊師英之先生、織田寛先生、示野信一先生からは有益な情報を多くいただきました。この場を借りて御礼を申し上げます。

参考文献

- [1] R. Camporesi, The spherical transform for homogeneous vector bundles over Riemannian symmetric spaces, J. Lie Theory **7** (1997), no. 1, 29-60.
- [2] R. Camporesi, The Helgason Fourier transform for homogeneous vector bundles over Riemannian symmetric spaces, Pacific. J. Math. **179** (1997), no. 2, 263-300.
- [3] I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian geometry, Academic Press, 1984.
- [4] 小林, 大島, リー群と表現論, 岩波書店, 2003.
- [5] S. Mori, The heat kernel on $SL(2, \mathbb{R})$, arXiv:1909.03670.
- [6] S. Mori, The heat kernel on $SL(2, \mathbb{C})$, In prepared.
- [7] 岡本, 等質空間上の解析学, 紀伊國屋書店, 1980.
- [8] G. Warner, Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I, Springer Verlag, 1972.
- [9] G. Warner, Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups II, Springer Verlag, 1972.