三次元多様体の量子不変量と位相的場の理論

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
森 祥仁 (Akihito MORI)

概要

Witten による Jones 多項式の量子場の理論での解釈を契機に, 量子不変量と呼ばれる三次元多様体の不変量の理論が発展した. F.Costantino, N.Geer, B.Patureau-Mirand は WRT 不変量（三次元多様体の量子不変量）の精密化である CGP 不変量を導入した. 本講演では CGP 不変量による位相的場の理論の構成と写像類群の表現の構成について得られた結果を紹介する.

1 導入

WRT 不変量は三次元多様体 M と M 内のグラフ T の組 (M,T) に対して定義される不変量である [5]. 次の命題は三次元多様体論を結び目理論と関連付ける基本的な事実である.

命題 1.1. 任意の向き付け可能な閉三次元多様体は S^3 の絡み目 L で表示できる.

L による M の表示を M の手術図式と呼ぶ. WRT 不変量は M の手術図式とグラフからオペレータ不変量を用いて計算される.

WRT 不変量は境界付き多様体の不変量へ拡張されている. 拡張された WRT 不変量は位相的場の理論と呼ばれている. 位相的場の理論は「曲面と境界付き多様体からなる圏」から「ベクトル空間と線形写像からなる圏」への関手である. 対象である曲面をベクトル空間に, 曲面の間の射である境界付き多様体に線形写像を対応させる.

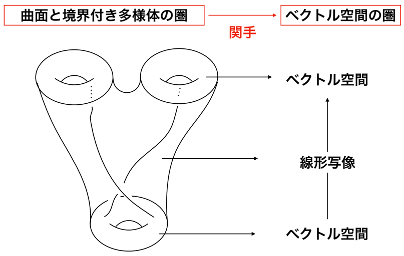


図 1: 位相的場の理論

位相的場の理論からは $SL(2,\mathbb{Z})$ の射影表現が得られる. $SL(2,\mathbb{Z})$ の生成元 s,t に対応する行列はそれぞれ S,T 行列と呼ばれる. S 行列は Verlinde の公式を介して共形場理論と WRT 不変量による位相的場の理論を結びつける重要な対象である.

F.Costantino, N.Geer, B.Patureau-Mirand は WRT 不変量の精密化である CGP 不変量を導入

した [1]. WRT 不変量は半単純な圏に基づいて構成されたのに対し, CGP 不変量は非半単純な圏に基づいて構成される. その様な圏の重要な例として 1 の冪根による量子群から構成されるものがある.

本稿では CGP 不変量による位相的場の理論の構成と $SL(2,\mathbb{Z})$ の射影表現について得た結果を紹介する.

2 オペレータ不変量

WRT 不変量は絡み目の不変量であるオペレータ不変量を適切に調整することで得られる. この節では

- 多様体を絡み目で表示する方法と
- オペレータ不変量

について概説する.

L を S^3 に埋め込まれた絡み目とする. $N(L)$ を L の管状近傍, $E(L)$ を $E(L) := S^3 \setminus \mathrm{Int}N(L)$ で定める. 同相写像 $f\colon \partial N(L) \to \partial E(L)$ で $N(L)$ と $E(L)$ を張り合わせることで三次元多様体 M が得られる：

$$M = (N(L) \sqcup E(L))/\sim.$$

ただし同値関係は $x \sim f(x)$ で与える. この貼り合わせを Dehn 手術と呼ぶ. 命題 1.1 は任意の向き付け可能な閉三次元多様体が Dehn 手術で得られることを主張する.

次にオペレータ不変量を説明する. ベクトル空間からなる族 $\{V_i\}_{i\in I}$ を固定する. オペレータ不変量はベクトル空間で色付けられた絡み目 L に複素数を対応させる不変量である. 図 2 の様に絡み目の各パーツには線形写像が対応する.

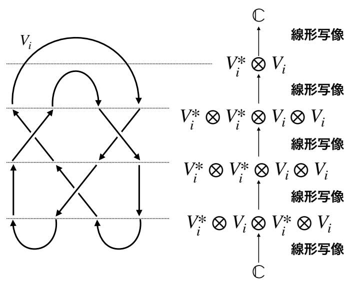


図 2

線形写像を合成することで $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への線形写像が得られる. これをスカラーと同一視して $c_i(L)$ と書く. オペレータ不変量 F を

$$F(L) = \sum_{i\in I} c_i(L)$$

で定める.

WRT 不変量は半単純な圏に基づいた不変量である. すなわち I が有限集合である. 一方で CGP 不変量は非半単純な圏に基づく. すなわち I が無限集合となる.

3　CGP 不変量

この節では WRT 不変量の精密化である CGP 不変量について概説する．CGP 不変量を構成する際の障害として以下の二つが挙げられる．

- WRT 不変量の場合よりもベクトル空間が増えている．オペレータ不変量 F は増えたベクトル空間の情報を拾えない（命題 3.2）．
- I が無限集合のためオペレータ不変量が無限和になってしまう．

以下では上記の障害の回避法を紹介する．簡単のために量子群 $\bar{U}_q^H\mathfrak{sl}_2$ から構成される非半単純な圏の場合に限って話を進める．

ベクトル空間の族は $\mathbb{C}/2\mathbb{Z}$ で添字付けられる：$\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}}$.

注意 3.1. 正確には $\alpha\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}$ で指定されるのはベクトル空間の同値類であるが, CGP 不変量はどの代表元で考えても値が変わらないことが証明されている．$\alpha\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}$ が指定するベクトル空間の同値類を simple Z-orbit と呼び, $\tilde{V}_\alpha$ と書く．

次の命題は CGP 不変量を構成する際に, WRT 不変量の構成に使ったオペレータ不変量をそのまま使うことはできないことを示している．

命題 3.2. F をオペレータ不変量とする．L を色付けられた絡み目とする．L の少なくとも一つの連結成分が V_α $(\alpha\notin\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ で色付けられているならば $F(L)=0$ が成り立つ．

$F(L)$ が消えてしまうのは V_α の量子次元が 0 であることが原因である．これを回避するために Costantino, Geer, Patureau-Mirand は modified quantum dimension を導入して, F の改良版である F' を構成した．

次にオペレータ不変量の無限和を回避する方法について説明する．M を向き付け可能な閉三次元多様体, L を手術図式とする．$\omega\in H^1(M;\mathbb{C}/2\mathbb{Z})$ を固定する．図 3 の様に L の各連結成分 L_i の周りにメリディアン m_i をとり, L_i を $V_{\omega(m_i)}$ で色付ける．

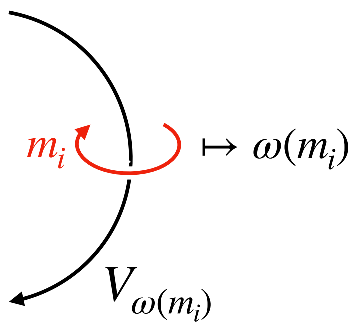


図 3: L_i のまわり

このように, L に乗せるベクトル空間を ω で選ぶことで無限性を回避する．

定義 3.3. 任意の i に対して $\omega(m_i) \notin \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が成り立つとき, L は (M, ω) の computable surgery presentation と呼ばれる.

CGP 不変量は computable surgery presentation を持つ組 (M, ω) に対して定義される位相不変量である.

注意 3.4. CGP 不変量は実際には多様体 M とリボングラフ T とコホモロジー ω に対して定義される不変量であるが, 簡単のために $T = \varnothing$ とした.

4 主結果

この節では CGP 不変量の拡張について得られた結果を紹介する. 図 4 の様に三次元多様体の上下の境界が連結である場合に CGP 不変量を位相的場の理論に拡張できた.

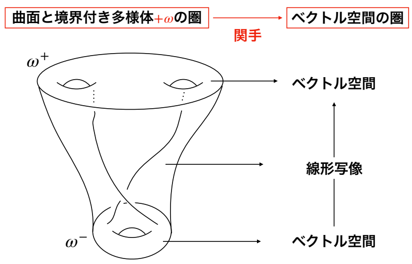


図 4

注意 4.1. CGP 不変量の拡張自体は Blanchet, Costantino, Geer, Patureau-Mirand によって別の手法で達成されていた [4]. しかし, 写像類群の明示的な表現はごく限られた場合にしか計算できていなかった. 本稿で紹介する結果は写像類群の表現を一般の場合に明示できたという点で新しい.

定理 4.2. (主結果 [M.]) Λ を simple Z-orbit の完全代表系全体の集合とする. $\lambda \in \Lambda$ を固定するごとに位相的場の理論 Z^λ が定まる. $Z = \bigoplus_\lambda Z^\lambda$ も位相的場の理論である.

以下で証明の概略を述べる. WRT 不変量を位相的場の理論へ拡張する場合と本質的に異なるのは関手性のうち恒等写像に関する部分である. M_0 を図 5 の様な境界付き三次元多様体とする.

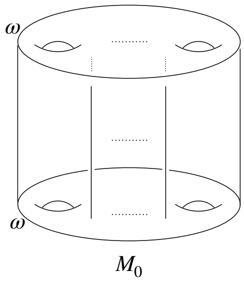
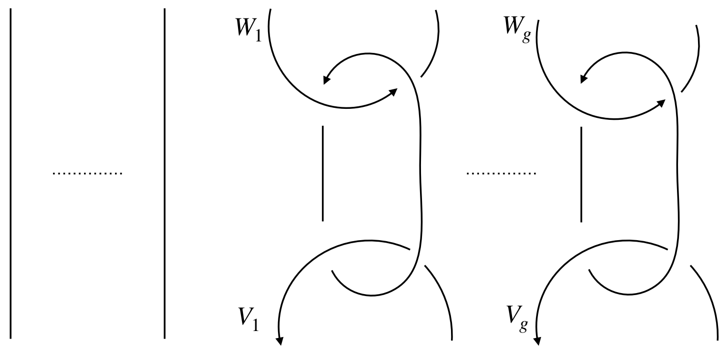


図 5: 自明な多様体

M_0 の手術図式は図 6 で与えられる.



V_i, W_i **はそれぞれ同じsimple Z-orbitに入る.**

図 6: M_0 の手術図式

WRT 不変量の場合は simple Z-orbit が一点につぶれていた. 同じ状況にするため代表元の取り方 λ を固定した. これで WRT 不変量を位相的場の理論へ拡張する場合の議論に帰着された.

5　写像類群の射影表現

この節では主結果の系について述べる. トーラス T^2 の写像類群を $MCG(T^2)$ で表す. 同型 $MCG(T^2) \cong SL(2,\mathbb{Z})$ が知られている. 生成元 $s, t \in SL(2,\mathbb{Z})$ に対して対応する写像類をそれぞれ $[f_s], [f_t]$ と書く. シリンダー $T^2 \times [0,1]$ を f_s, f_t でひねって得られる多様体を $M(s), M(t)$ と書く.

系 5.1. $Z(M_s, \varnothing, \omega), Z(M_t, \varnothing, \omega)$ の表現行列は $H^1(T^2; \mathbb{C}/2\mathbb{Z}) \rtimes MCG(T^2)$ の明示的な射影表現を与える.

例えば量子群 $\bar{U}_q^H \mathfrak{sl}_2$ の q が $q = \exp(\frac{\pi\sqrt{-1}}{3})$ の場合, $\omega(m) = -[\alpha], \omega(l) = [\beta]$ とすれば s, t に対応する行列はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} q^{(\alpha-2)(-\beta-2)} & q^{(\alpha-2)(-\beta)} & q^{(\alpha-2)(-\beta+2)} \\ q^{(\alpha)(-\beta-2)} & q^{(\alpha)(-\beta)} & q^{(\alpha)(-\beta+2)} \\ q^{(\alpha+2)(-\beta-2)} & q^{(\alpha+2)(-\beta)} & q^{(\alpha+2)(-\beta+2)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q^{-\frac{(\alpha-2)^2-4}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & q^{-\frac{(\alpha)^2-4}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & q^{-\frac{(\alpha+2)^2-4}{2}} \end{bmatrix}$$

で与えられる. ただし m, l はそれぞれメリディアンとロンジチュードである.

注意 5.2. 行列の各成分は F' による Hopf 絡み目の値である. この値は射影表現とは別の文脈で計算されていた [2].

参考文献

[1] F.Costantino, N.Geer, B.Patureau-Mirand, *Quantum invariants of 3-manifolds via link surgery presentations and non-semi-simple categories*, Journal of Topology (2014) 7 (4) 1005–1053.

[2] N.Geer, B.Patureau-Mirand, V.Turaev, *Modified quantum dimensions and re-normalized link invariants*, Compos. Math. 145 (2009), no. 1, 196-212.

[3] F.Costantino, N.Geer, B.Patureau-Mirand, *Some remarks on the unrolled quantum group of sl(2)*, J. Pure Appl. Algebra 219 (2015), no. 8, 3238-3262.

[4] C.Blanchet, F.Costantino, N.Geer, B.Patureau-Mirand, *Non semi-simple TQFTs, Reidemeister torsion and Kashaev's invariants*, arXiv:1404.7289v1

[5] N.Reshetikhin, V.G.Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups.*, Invent. Math. 103 (1991), no. 3, 547-597.

[6] V.G.Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds.*, Third edition. De Gruyter Studies in Mathematics, 18. De Gruyter, Berlin, 2016.

[7] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial.*, Comm. Math. Phys. Volume 121, Number 3 (1989), 351-399.