

On the topological complexity of S^3/Q_8

九州大学大学院 数理学府 数理学専攻
宮田祐也 (Yuya MIYATA)

概要

位相的複雑さ (Topological Complexity) とは位相空間に対して定義される位相不変量であり, Robot navigation problem に関連するものとして定義された. この不変量は, ファイバーワイズ空間に対して定義されるウエイトと呼ばれる不変量を用いて決定できる場合がある. 私は位相空間 S^3/Q_8 (Q_8 は四元数群) について, このウエイトをコンピュータを用いて計算し, 位相的複雑さを決定した.

1 導入

位相的複雑さの定義は以下である.

定義 X を弧状連結な位相空間とする. X の位相的複雑さ $\text{tc}(X)$ は

$$\text{tc}(X) = \text{Min}\{n \mid X \times X = U_0 \cup \cdots \cup U_n \text{ s.t. 各開集合 } U_i \text{ は } \pi: X^I \rightarrow X \times X \text{ の切断をもつ}\}$$

によって定義される. ここで $\pi: X^I \rightarrow X \times X$ は $\pi(u) := (u_{(0)}, u_{(1)})$ である. □

この定義は次のように説明される. まず空間 X 上の 2 点 (a, b) に対して, これらをそれぞれ始点と終点とする経路 u を (a, b) について連続にとることを考える. 一般にこのような取り方は存在しない. そこで始点と終点全体の集合 $X \times X$ をこの性質を満たすような部分集合による分割を考え, このような分割の最小数として位相的複雑さを定義するのである.

位相的複雑さはロボットの経路計画アルゴリズムの構成に関連した不変量として 2003 年に M. Farber によって定義された [Far03]. 一般に位相的複雑さを完全に決定することは困難で, 現在までに完全に決定されている空間は球面や閉曲面一部の射影空間などに限られる. [Far08], [FG08]

位相的複雑さの基本的な性質を述べる.

- $\text{tc}(X)$ はホモトピー不変量である, すなわち $X \simeq Y \implies \text{tc}(X) = \text{tc}(Y)$.
- $\text{tc}(X) = 0 \iff X$ は可縮.

2 ファイバーワイズ空間, ファイバーワイズ A_∞ 構造

(B 上の) ファイバーワイズ空間とは位相空間 X とその上の写像 $f: X \rightarrow B$ のことである. この節ではファイバーワイズ空間の成す圏と, ファイバーワイズ空間上の A_∞ 構造を定義し, 岩瀬・酒井によるファイバーワイズ A_∞ 構造を用いた $\text{tc}(X)$ の特徴付けを紹介する.

ここで, 以後位相空間といった場合にはコンパクト生成ハウスドルフ空間であるようなものを考えるものとする.

定義 (ファイバーワイズ空間, 基点付き)

B 上のファイバーワイズ空間は空間 X と連続写像 $p: X \rightarrow B$ からなる. またファイバーワイズ空間 $p: X \rightarrow B, q: Y \rightarrow B$ の間の射は $q \circ \phi = p$ を満たす連続写像 $\phi: X \rightarrow Y$ である. ファイバーワイズ空間とその間の射の成す圏を CGHaus_B で表す.

上記に加えて切断と呼ばれる写像 $s: B \rightarrow X$ s.t. $p \circ s = \text{id}_B$ を備えたものを基点付きファイバーワイズ空間と呼び, ファイバーワイズ写像のうち切断に関して自然な写像を基点付きファイバーワイズ写像と呼ぶ. これらの成す圏を CGHaus_B^B と表す. $\square$

次に, ファイバーワイズ空間に対する A_∞ 構造を定義する. (X, p, B, s) を基点付きファイバーワイズ空間とする. ファイバーワイズ空間 X 上の A_n 構造とはファイバーワイズ空間の組

$$\begin{array}{ccccccc} X = E_1 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & E_n \\ p_1 \downarrow & & p_2 \downarrow & & & & p_n \downarrow \\ B = P_0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{n-1} \end{array}$$

であって, 各 $p_i: E_i \rightarrow P_{i-1}$ はファイブレーションであり contracting homotopy $h: C_B^B E_{i-1} \rightarrow E_i$ が存在する.

$\mathcal{L}(X)$ を X 上の自由ループ空間とする. これは基点付きファイバーワイズ空間 $(\mathcal{L}(X), \text{ev}_1, X, s)$ を構成する, ここで $\text{ev}_1: \mathcal{L}(X) \rightarrow X$ は $1 \in S^1$ での evaluation map であり, $s: X \rightarrow \mathcal{L}(X)$ は定値ループへの写像である.

定理 [IS10]

- $(\mathcal{L}(X), \text{ev}_1, X, s)$ は A_∞ -構造を持ち, $P^\infty(\mathcal{L}(X))$ は $X \times X$ にファイバーワイズホモトピー同値である.
- $\text{tc}(X) \leq m \iff \text{id}_{X \times X}$ は CGHaus_X において $P^m(\mathcal{L}(X)) \xrightarrow{e_m} X \times X$ へのリフトを持つ.

$\square$

3 結果

Q_8 を四元数群

$$\langle -1, i, j, k | i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \rangle$$

とし, S^3 を四元数体の中の単位円とみなす. このとき商空間 S^3/Q_8 は 3 次元閉多様体である.

主定理

$$\text{tc}(S^3/Q_8) = 2\dim(S^3/Q_8) = 6.$$

$\square$

4 証明の概要

この説では主定理の証明について概要を紹介する.

補題 A 基点付きファイバーワイズ空間 $(\mathcal{L}(S^3/Q_8), \text{ev}_1, S^3/Q_8, s)$ に対して $e_5: P^5(\mathcal{L}(S^3/Q_8)) \rightarrow S^3/Q_8 \times S^3/Q_8$ が誘導する写像

$$(e_5)^*: H^*(S^3/Q_8 \times S^3/Q_8; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(P^5(\mathcal{L}(S^3/Q_8)); \mathbb{F}_2)$$

以上の議論を踏まえてに以下の図式を構成する.

$$\begin{array}{ccccc}
& & P^5(\mathcal{L}(S^3/Q_8)) & \xrightarrow{\quad} & P^\infty(\mathcal{L}(S^3/Q_8)) & \xrightarrow{\quad} & S^3/Q_8 \times S^3/Q_8 \\
& \swarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
S^3/Q_8 & \xleftarrow{\quad} & S^3 \times_{\text{ad}} P^5 Q_8 & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
S^\infty/Q_8 & \xleftarrow{\quad} & S^\infty \times_{\text{ad}} P^5 Q_8 & \xrightarrow{\quad} & S^\infty \times_{\text{ad}} P^\infty Q_8 & \xrightarrow{\simeq} & S^\infty/Q_8 \times S^\infty/Q_8
\end{array}$$

e_5 (dotted arrow from $P^5(\mathcal{L}(S^3/Q_8))$ to $S^3/Q_8 \times S^3/Q_8$)
 e'_5 (dotted arrow from $S^\infty \times_{\text{ad}} P^5 Q_8$ to $S^\infty/Q_8 \times S^\infty/Q_8$)

縦方向の写像は包含写像 $S^3/Q_8 \rightarrow S^\infty/Q_8$ とそれによって誘導される写像である. この図式は空間をホモトピー同値写像の下で様々に取り替えているので, 一般に可換とは限らない. しかしながら, 写像の単射性を議論する上では問題はないことに注意する.

$(e_5)^*$ が単射でないことを見るために, $x^2 y \otimes x^2 y \in H^6(S^3/Q_8 \times S^3/Q_8; \mathbb{F}_2)$ に対応する $H^6(S^\infty/Q_8 \times S^\infty/Q_8; \mathbb{F}_2)$ の元 $[\omega]$ を次のように定義する.

$$\omega[\sigma|\{h_1|\dots|h_m\}] = \begin{cases} x^2 y[h_1|h_2|h_3] & \text{if } \sigma = e^3, m = 3, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

補題 ω を上で与えた写像とする. このとき, $(e'_5)^*[\omega] = 0$ in $H^6(S^3 \times_{\text{ad}} P^5 Q_8; \mathbb{F}_2)$, すなわち,

$$\exists u \in C^5(S^3 \times_{\text{ad}} P^5 Q_8) \text{ s.t. } (e'_5)^* \omega = \delta u.$$

□

この補題は次のように示される. まず, δ は線形写像であり, $\delta u = (e'_5)^* \omega$ は連立方程式になる. これが解 u を持つかどうかは, この連立方程式が表現する行列の階数を求めれば良い. 私はコンピュータを用いてこれを計算し, 最終的に解が存在することがわかった.

参考文献

- [Far03] Michael Farber. Topological complexity of motion planning. *Discrete and Computational Geometry*, 29(2):211–221, 2003.
- [Far08] Michael Farber. *Invitation to topological robotics*, volume 8. European Mathematical Society, 2008.
- [FG08] Michael Farber and Mark Grant. Robot motion planning, weights of cohomology classes, and cohomology operations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136(9):3339–3349, 2008.
- [Fuj73] Kensô Fujii. On the k-ring of s^{4n+3}/h_m . *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)*, 3:251–265, 1973.
- [IS10] Norio Iwase and Michihiro Sakai. Topological complexity is a fibrewise l-s category. *Topology and its Applications*, 157(1):10–21, 2010.