

Tamely Ramified Geometric Langlands Correspondence

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
松原祐貴 (Yuki Matsubara)

概要

幾何学的ラングランズ対応は、コンパクトリーマン面 X 上の G -局所系のモジュライ空間上の準連接層のなす圏と、 X 上の主 ${}^L G$ 束のモジュライ空間上の D -加群のなす圏の自然な対応を主張する。本講演では、 $G = SL_2$, ${}^L G = PGL_2$, $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ として任意の n 点の確定特異点が存在する場合の幾何学的ラングランズ対応を解説する。具体的には、D. Arinkin による確定特異点が 4 点の場合の結果を解説したのち、講演者による 5 点以上の場合の結果について報告する。

1 放物接続について

この節では ν -放物接続のモジュライ空間を導入する。以下、基礎体は $\mathbb{C}$ とする。

リーマン球面 $\mathbb{P}^1$ 上の異なる n 点 $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_n\}$ を固定し、 $\mathbf{t}$ に関する因子を $D = t_1 + \dots + t_n$ と定義する。

定義 1.1. $\mathbb{P}^1$ 上の階数が 2 で D 上に特異点を持つ対数的接続とは、次を満たす組 (E, ∇) のことをいう： $d \in \mathbb{Z}$ とする。

- (1) E は $\mathbb{P}^1$ 上の階数が 2 で次数が d の正則ベクトル束、
- (2) $\nabla : E \rightarrow E \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(D)$ は次を満たす層の写像である。

$$\nabla(fs) = s \otimes df + f \nabla(s), \quad f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, s \in E.$$

対数的接続 (E, ∇) に対して、留数行列 $\mathbf{res}_{t_i}(\nabla) \in \text{End}(E_{t_i}) \simeq M_2(\mathbb{C})$, $(1 \leq i \leq n)$ が定まる。 $\mathbf{res}_{t_i}(\nabla)$ の固有値を $\{\nu_i^+, \nu_i^-\}$ とする。これを ∇ の t_i での局所指数という。Fuchs の関係式により、 $\sum_i (\nu_i^+ + \nu_i^-) = -\deg(E) = -d$ が成り立つ。ここで局所指数の集合を次のように定義する。

$$\mathcal{N}_n(d) := \left\{ \nu = (\nu_i^{\pm})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{2n} \mid d + \sum_{1 \leq i \leq n} (\nu_i^+ + \nu_i^-) = 0 \right\} \simeq \mathbb{C}^{2n-1}.$$

定義 1.2. $\nu \in \mathcal{N}_n(d)$ が一般であるとは次の 2 つを満たすことをいう。

- (1) 任意の i に対して、 $\nu_i^+ - \nu_i^- \notin \mathbb{Z}$,
- (2) 次が成立する。

$$\text{任意の } (\epsilon_i) \in \{+, -\}^n \text{ の取り方について } \sum_{i=1}^n \nu_i^{\epsilon_i} \notin \mathbb{Z}.$$

$\nu \in \mathcal{N}_n(d)$ が一般でないとき、特殊であるという。

$\mathbb{P}^1$ 上の正則直線ベクトル束 $L := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ と対数的接続 $\nabla_L : L \rightarrow L \otimes \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(D)$ を固定する. ∇_L は各 t_i において留数固有値 $\nu_i^+ + \nu_i^-$ を持つ.

定義 1.3. $\nu \in \mathcal{N}_n(d)$ を固定する. $(\mathbb{P}^1, D)$ 上の (L, ∇_L) を行列式束に持つ階数が 2 の ν -放物接続とは組 $(E, \nabla, \varphi, \mathbf{l} = \{l_i\})$ であって、次を満たすもののことをいう:

- (1) $(\mathbb{P}^1, D)$ 上の対数的接続 (E, ∇) であって、階数が 2 で局所指数 ν を持つもの.
- (2) 次の関係式を満たす直線ベクトル束の同型写像 $\varphi : \bigwedge^2 E \rightarrow L$;
 E の任意の局所切断 s_1, s_2 に対して

$$\varphi \otimes id(\nabla s_1 \wedge s_2 + s_1 \wedge \nabla s_2) = \nabla_L(\varphi(s_1 \wedge s_2)).$$

- (3) 1 次元部分空間 $l_i \subset E_{t_i}$ であって、 $\text{res}_{t_i}(\nabla)$ は l_i に対して ν_i^+ を掛けることで作用するもの.

ν が一般的なものについて l_i は $\text{res}_{t_i}(\nabla)$ の ν_i^+ に関する固有空間に他ならない. ゆえに, $\mathbf{l} = \{l_i\}$ は (E, ∇) から一意に定まる.

安定性を導入するために重さ $\mathbf{w}$ を定義することによって, (L, ∇_L) を行列式束に持つ $\mathbf{w}$ -安定 ν -放物接続 $(E, \nabla, \mathbf{l})$ のモジュライ空間 $M^{\mathbf{w}}(\mathbf{t}, \nu, L)$ を構成することができる. $M^{\mathbf{w}}(\mathbf{t}, \nu, L)$ は次元が $2(n-3)$ である滑らかで既約な準射影的代数多様体になることが知られている ([4]). 一般の ν について (E, ∇, φ) は既約であり, この場合すべての組 (E, ∇, φ) が安定対象となる.

このようなモジュライ空間はガルニエ系と呼ばれる常微分方程式の初期値空間に対応し, 特に $n = 4$ の場合は第 VI パンルヴェ方程式の岡本初期値空間に対応する. これらは, 線形接続のモノドロミー保存変形として得られる微分方程式である.

ここで $\mathcal{M}_d$ を ν -放物接続のモジュライスタックとし, 対応する粗モジュライ空間を M_d とする. 適当な変換を施すことにより $M_d \simeq M^{\mathbf{w}}(\mathbf{t}, \nu, L)$ なる同型対応を得る.

2 放物ベクトル束について

この節では放物ベクトル束のモジュライ空間について述べる.

定義 2.1. $(\mathbb{P}^1, \mathbf{t})$ 上の階数が 2 で次数が d の準放物ベクトル束とは, 次を満たす組 $(E, \mathbf{l})$ のことをいう:

- (1) $\mathbb{P}^1$ 上の階数が 2 で次数が d の正則ベクトル束 E ,
- (2) E_{t_i} の 1 次元部分ベクトル空間 l_i の組 $\mathbf{l} := (l_1, \dots, l_n)$.

この $\mathbf{l}$ を準放物ベクトル束の放物構造という. また, 重み $\mathbf{w} := (w_1, \dots, w_n)$ の情報を合わせて考える場合は $(E, \mathbf{l})$ を放物ベクトル束という.

定義 2.2. 準放物ベクトル束 $(E, \mathbf{l})$ は, 与えられた局所指数 ν を持つ接続 ∇ が付随するとき ν -平坦であるという.

$\mathcal{P}_d$ を直既約で次数が d の準放物ベクトル束のモジュライ空間とし, 対応する粗モジュライ空間を P_d とする. $\mathcal{P}_d \rightarrow P_d$ は $\mathbb{G}_m$ -ジャープである.

実は, $(E, \mathbf{l})$ が ν -平坦であることと直既約であることは同値である. この事実により, M_d から P_d への忘却写像 $(E, \nabla, \varphi, \mathbf{l}) \mapsto (E, \mathbf{l})$ が定義される. ν を一般として取っておくことにより, 放物構造 $\mathbf{l} = \{l_i\}$ を固有値 ν_i^+ に対応する $\text{res}_{t_i}(\nabla)$ の固有空間 $l_i \subset E_{t_i}$ と見なすことができる.

一方で, 粗モジュライ空間 P_d は非分離スキーム (トポロジカルには non Hausdorff) である. $n = 4$ の場合, P は $t_1, \dots, t_4$ で 2 重点 $t_i^\pm$ を持った射影直線と同一視される ([2]).

$n = 5$ の場合, P_d はいくつかの射影曲面を貼り合わせたものとして構成できる ([5]). その幾何学的性質は 4 次 del Pezzo 曲面, つまり $\mathbb{P}^2$ を 5 点でブローアップしたものに関連している. より具体的に, 貼り合わされる射影曲面のうち一つは $\mathbb{P}^2$ と同型であり, conic としての自然な埋め込み $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow X := \mathbb{P}^2$ が存在する. この像を Π とする. この埋め込みによる $t_1, \dots, t_5 \in \mathbb{P}^1$ の像でのブローアップ $\phi: \hat{X} \rightarrow X$ を考える. このとき, 定義から $\hat{X}$ は 4 次 del Pezzo 曲面である. ブローアップによる例外因子を $\Pi_i \subset \hat{X}$ とし, X 内で t_i と t_j を結ぶ曲線の固有変換を $\Pi_{i,j} \subset \hat{X}$ で表す. この $\Pi, \Pi_i, \Pi_{i,j}$ は古典的によく知られている 4 次 del Pezzo 曲面上に 16 本存在する (-1) -曲線と対応する. $n = 5$ の場合, P_d は $\{\Pi, \Pi_i, \Pi_{i,j}\}$ において非分離構造を持つ.

3 幾何学的ラングランズ対応

従順分岐型の幾何学的ラングランズ対応 (Tamely Ramified Geometric Langlands Correspondence) によれば, $\mathbb{P}^1$ 上の ν -放物接続のモジュライスタック $\mathcal{M}_d$ 上の準連接層のなす導来圏 $\mathcal{D}_{qc}(\mathcal{M}_d)$ と, $\mathbb{P}^1$ 上の準放物ベクトル束のモジュライ空間 P_d 上の D -加群のなす導来圏 $\mathcal{D}(P_d, D_{P_d}^\nu)$ の間には, 自然な対応がある.

注意 3.1. $\mathcal{M}_d$ が M_d 上の μ_2 -ジャープになることから, $\mathcal{D}_{qc}(\mathcal{M}_d) = \mathcal{D}_{qc}(\mathcal{M}_d)^+ \times \mathcal{D}_{qc}(\mathcal{M}_d)^-$ と分解する. ここで $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_{qc}(\mathcal{M}_d)^\pm$ であるのは, $-1 \in \mu_2$ が任意の i について $H^i(\mathcal{F})$ に対して ± 1 で作用するときとする.

予想 3.2. $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_d}$ -加群の導来圏と $D_{P_d}^\nu$ -加群の導来圏は圏同値である:

$$\mathcal{D}_{qc}(\mathcal{M}_d)^- \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(P_d, D_{P_d}^\nu).$$

ここで $D_{P_d}^\nu$ は P_d 上のねじれ微分作用素 (Twisted Differencial Operator) である.

この $D_{P_d}^\nu$ は, 局所指数 ν と P_d の非分離構造から得られる. 例えば $n = 4$ の場合, $[\nu] := \sum_{i=1}^4 (\nu_i^+ t_i^+ + \nu_i^- t_i^-) \in \text{div}(P_d) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ として, $[\nu]$ に対応するねじれ微分作用素として得られる. ねじれ微分作用素については [3] を参照せよ. D. Arinkin は上記の圏同値を Fourier-Mukai 変換とみなすことで $n = 4$ の場合を示した.

定理 3.3 ([1] Theorem 5). 確定特異点が 4 点 ($n = 4$) の場合, 関手

$$\Phi_{\mathcal{M}_d \rightarrow P_d} : \mathcal{F} \mapsto Rp_{2,*}(\xi_\nu \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}_d \times P_d}} p_1^* \mathcal{F})[1]$$

は $\mathcal{D}_{qc}(\mathcal{M}_d)^-$ と $\mathcal{D}(P_d, D_{P_d}^\nu)$ の間の圏同値を定める. また, その逆関手は

$$\Phi_{P_d \rightarrow \mathcal{M}_d} : \mathcal{F} \mapsto Rp_{1,*} \mathbb{D}R_{P_d}((id_{\mathcal{M}_d} \times \sigma)^* \xi_\nu \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}_d \times P_d}} p_2^* \mathcal{F})[1]$$

で与えられる. ここで ξ_ν は $\mathcal{M}_d \times P_d$ 上の普遍ベクトル束であり, $\sigma : P_d \rightarrow P_d ; t_i^\pm \mapsto t_i^\mp$ を P_d 上の対合とする. また $p_1 : \mathcal{M}_d \times P_d \rightarrow \mathcal{M}_d, p_2 : \mathcal{M}_d \times P_d \rightarrow P_d$ を自然な射影とする.

定理 3.3 は, 次のコホモロジーの直交性を確かめることにより得られる. $x \in \mathbb{P}^1$ とする. $\mathcal{M}_d$ 上のベクトル束 ξ_x を, $(E, \nabla, \varphi, \mathbf{l})$ 上のファイバーが E_x となるものとして定義する.

定理 3.4 ([1] Theorem 2).

$$H^i(\mathcal{M}_d, \xi_x \otimes \xi_y) = \begin{cases} \mathbb{C}, & i = 0 \text{ かつ } x = y, \\ 0, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

粗モジュライ空間 M_d が準射影的代数多様体であることから, このコホモロジーは局所コホモロジー論を用いることにより計算される.

4 ラドン変換

一般に射影空間 $\mathbb{P}^{n-3}$ に対し, 双対射影空間 $(\mathbb{P}^{n-3})^\vee$ を定義することができる. また, それぞれの上の (ねじれ) D -加群はラドン変換により対応している.

準放物ベクトル束のモジュライ空間 P_d は, 安定対象により定まる部分スキームとして $\mathbb{P}^{n-3}$ を含んでいる. この射影空間の双対 $(\mathbb{P}^{n-3})^\vee$ を含むような非分離スキーム $P^\vee$ が存在して, P_d 上の (ねじれ) D_{P_d} -加群と $P^\vee$ 上の (ねじれ) $D_{P^\vee}$ -加群の間にラドン変換を拡張した対応があることが予想される.

予想 4.1 (Partially Compactified Radon Transform). 準放物接続のモジュライ空間 P_d に対して, ある非分離的スキーム $P^\vee$ が存在して

$$\mathcal{D}(P_d, D_{P_d}^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(P^\vee, D_{P^\vee}^\vee)$$

となる. ここで $D_{P^\vee}^\vee$ は $P^\vee$ 上のねじれ微分作用素である.

例えば $n = 4$ の場合 $P^\vee \simeq P_d$ であり, この予想は正しい. $n = 5$ の場合, $(\mathbb{P}^2)^\vee = \text{Sym}^2(\mathbb{P}^1)$ であり, $\text{Sym}^2(\mathbb{P}^1)$ には $\mathbb{P}^1$ と同型な conic 曲線 C が存在する. 5 点 $t_1, \dots, t_5 \in \mathbb{P}^1$ に対応する C 上の点における接線を $Z_1, \dots, Z_5$ とする. $P^\vee$ は $(\mathbb{P}^2)^\vee$ において C と $Z_1, \dots, Z_5$ が 2 重線になった非分離スキームである.

5 主結果

Arinkin の手法を $n = 5$ の場合に拡張することで次を得る.

定理 5.1 (M). $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_d}$ -加群の導来圏と $D_{P^\vee}^\vee$ -加群の導来圏は圏同値である:

$$\mathcal{D}_{qc}(\mathcal{M}_d)^- \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(P^\vee, D_{P^\vee}^\vee).$$

証明の方針は, 定理 3.3 と同様, コホモロジーの計算に帰着される.

参考文献

- [1] D. Arinkin, *Orthogonality of natural sheaves on moduli stacks of $SL(2)$ -bundles with connections on $\mathbb{P}^1$ minus 4 points.*, Selecta Math., New Series 7 (2001), 213-239.
- [2] D. Arinkin, S. Lysenko, *On the moduli of $SL(2)$ -bundles with connections on $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_4\}$,* Internat. Math. Res. Notices (1997), no. **19**, 983–999.
- [3] R. Hotta, K. Takeuchi, T. Tanisaki, *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, volume 236 of Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008.
- [4] M. Inaba, K. Iwasaki, M.-H. Saito, *Moduli of stable parabolic connections, Riemann- Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. I*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. (2006), no. **4**, 987-1089.
- [5] F. Loray, M.-H. Saito, *Lagrangian fibrations in duality on moduli spaces of rank 2 logarithmic connections over the projective line.* Internat. Math. Res. Notices (2015), no. **4**, 995–1043.