

フラックス準同型による微分同相群の中心拡大と 平坦円周束のオイラー類

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
丸山修平 (Shuhei MARUYAMA)

1 導入

1.1 普遍特性類

ファイバー束の (普遍) 特性類は, その構造群の分類空間のコホモロジー類として定義される. 構造群とはファイバー束の変換関数の値域のことであり, 例えばランク n の実ベクトル束の構造群は $GL(n, \mathbb{R})$, 有限次元 Lie 群 G をファイバーとする主束の構造群はファイバーの Lie 群 G 自身である. したがって, ベクトル束や主束の特性類はその構造群 G の分類空間 BG のコホモロジー類として与えられる. とくに構造群の有限次元性から, ベクトル束や主束の特性類に関しては Chern-Weil 理論などの一般論が既に構築されている. 一般の C^∞ -ファイバー束に関しては, その構造群はファイバー F の微分同相群 $\text{Diff}(F)$ (やその部分群) となる. したがってファイバー束の特性類の一般論を展開する際には, ファイバーの微分同相群やその部分群の分類空間を扱うことになる. しかし, 微分同相群は無限次元 Lie 群という非常に巨大な群であり, その分類空間も調べにくいものとなる. このような困難から, ファイバー束の特性類の理論は未発達な部分が多い.

以下では, ファイバー束の構造群が離散群とみなせる場合に焦点を当てる. 離散群 Γ に対し, その分類空間 $B\Gamma$ の特異コホモロジーは, 群 Γ の群コホモロジー $H^*(\Gamma)$ と同型となることが知られている. また位相群 G が離散群 Γ とホモトピー同値のとき, その分類空間 BG と $B\Gamma$ もホモトピー同値となるので, 同型

$$H^*(BG) \cong H^*(B\Gamma) \cong H^*(\Gamma)$$

が得られる. したがって, 構造群が離散群とホモトピー同値なファイバー束の特性類は, 上述の同型を通して群コホモロジー類としての代数的な記述が可能となる. とくに

- 曲面束を扱う場合 (種数 2 以上)
- 平坦束を扱う場合

は構造群が離散群 (とホモトピー同値) のため, 特性類の理論に群コホモロジーを用いることができる. 種数が 2 以上の曲面 Σ をファイバーとする向き付けられたファイバー束は, その構造群が $\text{Diff}_+(\Sigma)$ となる. ここで $\text{Diff}_+(\Sigma)$ は曲面 Σ の向きを保つ微分同相群であり, この微分同相群は Σ の写像類群 $\mathcal{M}$ とホモトピー同値であることが知られている (Earle-Eells[4]). したがってコホモロ

ジーの同型

$$H^*(B\text{Diff}_+(\Sigma)) \cong H^*(B\mathcal{M}) \cong H^*(\mathcal{M})$$

により, 曲面束の特性類は写像類群の群コホモロジーとして得られる.

平坦束については, 定義から構造群は離散群である. Chern-Weil 理論により, Pontrjagin 類や Chern 類などの基本的な特性類は平坦束上で自明となる. 一方, Euler 類に関しては平坦束上でも 0 になるとは限らない (Milnor[7], Wood[12]). 具体的には, ファイバーが円周 S^1 の平坦束の構造群として円周の向きを保つ微分同相群 $\text{Diff}_+(S^1)$ を考えると, $\mathbb{R}$ 係数普遍 Euler 類 $e_{\mathbb{R}}$ が $H^2(B\text{Diff}_+(S^1)^\delta; \mathbb{R}) \cong H^2(\text{Diff}_+(S^1); \mathbb{R})$ の非自明な元として定義される. ここで $\text{Diff}_+(S^1)^\delta$ は群 $\text{Diff}_+(S^1)$ に離散位相を入れた位相群である.

1.2 Calabi 不変量, フラックス準同型, 及び平坦円周束の Euler 類

閉多様体 M の微分同相群 $\text{Diff}(M)$ の単位元成分 $\text{Diff}(M)_0$ は単純群となる (Thurston[11]). 一方, 閉シンプレクティック多様体 M に対し, シンプレクティック形式を保つ微分同相群 (シンプレクティック微分同相群) $\text{Symp}(M)_0 \subset \text{Diff}(M)_0$ 上にはフラックス準同型と呼ばれる全射準同型が存在し (2.2 節), したがって $\text{Symp}(M)_0$ は一般には単純群とはならない. しかし, シンプレクティック微分同相群の部分群として定義されるハミルトン微分同相群 $\text{Ham}(M)$ は再び単純群となる (Banyaga[1]). また, 閉ではないシンプレクティック多様体については, ハミルトン微分同相群上に Calabi 不変量と呼ばれる全射準同型 $\text{Cal} : \text{Ham}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し, したがって $\text{Ham}(M)$ は単純群とはならない.

閉円板の Calabi 不変量は具体的に以下で定義される. 閉円板 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とその上のシンプレクティック形式 $\omega = dx \wedge dy$ を考える. シンプレクティック微分同相群 $\text{Symp}(D)$ の, 境界 ∂D 上で恒等写像となる微分同相写像からなる部分群を $\text{Symp}(D)_{\text{rel}}$ とおく. 閉円板は境界付き多様体であり, さらに 1 次コホモロジーが消滅することから, Calabi 不変量 Cal は $\text{Symp}(D)_{\text{rel}}$ から $\mathbb{R}$ への準同型として

$$\text{Cal}(h) = \int_D \eta^h \wedge \eta$$

で定まる. ここで η^h は η の h による引き戻しである.

Tsuboi[10] により Calabi 不変量と Euler 数の関係が見出され (3.2 節), Bowden[2], Moriyoshi[8] により Calabi 不変量と Euler 類との関係の, 群コホモロジー及び中心拡大による記述が与えられた.

フラックス予想 (Ono[9] で肯定的に解決) に見られるように, フラックス準同型はシンプレクティック幾何において基本的な研究対象である. また Kotschick-Morita[5] による Morita-Mumford-Miller 類の研究においても, フラックス準同型は中心的な役割を担っている. 今回, Calabi 不変量と Euler 類との関係のアナロジーとして, フラックス準同型と Euler 類の間にも同様の関係が成り立つことが分かった. 以下ではこの結果について紹介する.

2 準備

2.1 群コホモロジーと中心拡大

Γ を群とし, A を $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{R}$ とする. 非負整数 p に対し, 群 Γ の直積 Γ^p から A への写像のことを群 Γ の p コチェインといい, p コチェイン全体を $C^p(\Gamma; A)$ で表す. コバウンダリ作用素 $\delta: C^p(\Gamma; A) \rightarrow C^{p+1}(\Gamma; A)$ を $c \in C^p(\Gamma; A)$ と $\gamma_1, \dots, \gamma_{p+1} \in \Gamma$ に対し

$$\begin{aligned} \delta c(\gamma_1, \dots, \gamma_{p+1}) &= c(\gamma_2, \dots, \gamma_{p+1}) + \sum_{i=1}^p (-1)^i c(\gamma_1, \dots, \gamma_i \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{p+1}) \\ &\quad + (-1)^{p+1} c(\gamma_1, \dots, \gamma_p) \end{aligned}$$

で定める ($p=0$ のときは $\delta=0$ で定める). 以上で定まるコチェイン複体 $(C^\bullet(\Gamma; A), \delta)$ のコホモロジーを, 群 Γ の A を係数にもつ群コホモロジーといい, $H^*(\Gamma; A)$ と表す.

低次の群コホモロジーについては, 以下の同型が存在する (Brown[3]):

- $H^0(\Gamma; A) \cong A$
- $H^1(\Gamma; A) \cong \text{Hom}(\Gamma, A)$
- $H^2(\Gamma; A) \cong \{\Gamma \text{ の中心 } A \text{ 拡大} \} / \{\text{分裂拡大} \}$

とくに 2 次の群コホモロジー類は中心拡大として記述することが出来る. ここで Γ の中心 A 拡大とは, 群の完全列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Gamma \longrightarrow 1$$

であって, $i(A)$ が群 E の中心に入るものをいう.

中心拡大の幾何的な解釈を述べておく. 中心 $\mathbb{Z}$ 拡大 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow E \rightarrow \Gamma \rightarrow 1$ に対し, 各群の分類空間からなるファイブレーション

$$B\mathbb{Z} \longrightarrow BE \longrightarrow B\Gamma$$

が得られる. ここで $\mathbb{Z}$ の分類空間は S^1 なので, 上記のファイブレーションのファイバーは円周 S^1 である. この S^1 -ファイブレーションの Euler 類と, 中心拡大 E の群コホモロジー類とが一致することが知られている.

例 2.1. $\text{Diff}_+(S^1)$ は $SO(2)$ とホモトピー同値なので普遍 $\mathbb{Z}$ 被覆が存在する. 群 $\widetilde{\text{Diff}_+(S^1)}$ を

$$\widetilde{\text{Diff}_+(S^1)} = \{g \in \text{Diff}(\mathbb{R}) \mid g(x+2\pi) = g(x) + 2\pi\}$$

で定めると, この群が $\text{Diff}_+(S^1)$ の普遍被覆となることが知られている. この普遍被覆は $\text{Diff}_+(S^1)$ の中心 $\mathbb{Z}$ 拡大

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\text{Diff}_+(S^1)} \longrightarrow \text{Diff}_+(S^1) \longrightarrow 1$$

を与える. この中心 $\mathbb{Z}$ 拡大に対応する群コホモロジー類 $e \in H^2(\text{Diff}_+(S^1); \mathbb{Z})$ を $\text{Diff}_+(S^1)$ の Euler 類という. この $\text{Diff}_+(S^1)$ の Euler 類は同型 $H^2(\text{Diff}_+(S^1); \mathbb{Z}) \cong H^2(B\text{Diff}_+(S^1)^\delta; \mathbb{Z})$ により, 平坦円周束の $\mathbb{Z}$ 係数普遍 Euler 類に一致する. またこの Euler 類 e の係数変換 $H^2(\text{Diff}_+(S^1); \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\text{Diff}_+(S^1); \mathbb{R})$ による像が, 1.1 節の最後に述べた $\mathbb{R}$ 係数普遍 Euler 類 $e_{\mathbb{R}}$ に一致する.

2.2 フラックス準同型

本稿では完全シンプレクティック多様体上のフラックス準同型についてのみ述べる．一般のシンプレクティック多様体でのフラックス準同型の定義については McDuff-Salamon[6] を参照されたい．シンプレクティック形式が完全形式であるシンプレクティック多様体 $(M, \omega = d\eta)$ を完全シンプレクティック多様体という． $\text{Symp}(M)$ をシンプレクティック微分同相群, すなわち $\text{Symp}(M) = \{g \in \text{Diff}(M) \mid \omega^g = \omega\}$ とする．ここで ω^g は ω の g による引き戻しを表す．このときフラックス準同型 $\text{Flux} : \text{Symp}(M) \rightarrow H^1(M; \mathbb{R})$ が

$$\text{Flux}(g) = [\eta^g - \eta]$$

で定義される．フラックス準同型には幾何的な解釈がある．多様体 M の 1 サイクル c を一つ取り, $\text{Flux}(g)$ とのペアリングを取ると,

$$\langle \text{Flux}(g), [c] \rangle = \int_c \eta^g - \eta = \int_{gc-c} \eta$$

となる．Stokes の定理よりこの積分値は, サイクル c が微分同相写像 g によって流された範囲のシンプレクティック面積に一致する．

3 主結果

以下では閉円板のみを扱うが, 境界を一つ持つ有向曲面に対しても同様の結果が成り立つ．

3.1 フラックス拡大

閉円板 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ と, その上のシンプレクティック形式 $\omega = dx \wedge dy$ を考える． $\text{Symp}(D) = \{g \in \text{Diff}(D) \mid \omega^g = \omega\}$ とおく．ここで ω^g は ω の g による引き戻しである． $G = \{g \in \text{Symp}(D) \mid g(0, 0) = (0, 0)\}$ とおくと, 境界への制限により全射準同型 $G \rightarrow \text{Diff}_+(S^1)$ が定まる．この準同型の核を G_{rel} とおくと, 群の短完全列

$$1 \longrightarrow G_{\text{rel}} \longrightarrow G \longrightarrow \text{Diff}_+(S^1) \longrightarrow 1 \quad (1)$$

が得られる．

閉円板 D の 1 次コホモロジーは自明のため, フラックス準同型 $\text{Flux} : \text{Symp}(D) \rightarrow H^1(D; \mathbb{R})$ は自明な写像となってしまう．しかしフラックス準同型のシンプレクティック面積としての解釈に戻って考えると, 「フラックス準同型」 $\text{Flux}_{\mathbb{R}} : G_{\text{rel}} \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義することが出来る:

$$\text{Flux}_{\mathbb{R}}(h) = \int_{\gamma} \eta^h - \eta.$$

ここで γ は D の原点と境界上の点とを結ぶ path であり, η は $d\eta = \omega$ を満たす 1-form である．この準同型 $\text{Flux}_{\mathbb{R}}$ も単にフラックス準同型という．

フラックス準同型 $\text{Flux}_{\mathbb{R}} : G_{\text{rel}} \rightarrow \mathbb{R}$ の性質として

1. γ と η の取り方に依らず,
2. 全射準同型であり,
3. 任意の $g \in G, h \in G_{\text{rel}}$ に対し, $\text{Flux}_{\mathbb{R}}(ghg^{-1}) = \text{Flux}_{\mathbb{R}}(h)$

が成り立つ. フラックス準同型の核を K とおくと, 上述の性質 2 から $G_{\text{rel}}/K \cong \mathbb{R}$ であり, また性質 3 から K は G の正規部分群である. この K で短完全列 (1) を割ることで, 新たな短完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow G/K \longrightarrow \text{Diff}_+(S^1) \longrightarrow 1$$

が得られる. この短完全列はとくに $\text{Diff}_+(S^1)$ の中心 $\mathbb{R}$ 拡大となる. この中心拡大をフラックス拡大という.

中心拡大には 2 次の群コホモロジー類が対応していた. したがって, フラックス拡大にも対応するコホモロジー類 $e_{\text{Flux}} \in H^2(\text{Diff}_+(S^1); \mathbb{R})$ が存在する. 一方, 普遍 Euler 類 $e_{\mathbb{R}}$ もコホモロジー $H^2(\text{Diff}_+(S^1); \mathbb{R})$ の元として定まっていた. この二つのコホモロジー類に関して, 次が成り立つことを証明した;

定理 3.1. $e_{\text{Flux}} = \pi e_{\mathbb{R}}$.

3.2 平坦円周束のオイラー数

定理 3.1 の系として, フラックス準同型と平坦円周束のオイラー数を結ぶ公式が得られる. まず Tsuboi[10] の結果から述べる.

種数 g の閉曲面を Σ_g で表す. 準同型 $\rho: \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \text{Diff}_+(S^1)$ をホロノミーとする Σ_g 上の平坦円周束を E_ρ とおく. 閉曲面 Σ_g の基本群は群の表示

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \rangle$$

が知られている. ここで $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ である. 全射 $\text{Symp}(D) \rightarrow \text{Diff}_+(S^1)$ に関する $\rho(a_i), \rho(b_i)$ の lift をそれぞれ φ_i, ψ_i としたとき, 以下が成り立つ (Tsuboi[10]):

$$\text{Cal} \left(\prod_{i=1}^g [\varphi_i, \psi_i] \right) = \pi^2 \langle e(E_\rho), [\Sigma_g] \rangle.$$

定理 3.1 の系として, Tsuboi[10] と類似の公式が得られる.

系 3.2. 全射 $G \rightarrow \text{Diff}_+(S^1)$ に関する $\rho(a_i), \rho(b_i)$ の lift をそれぞれ φ_i, ψ_i とおくと, 次が成り立つ:

$$\text{Flux}_{\mathbb{R}} \left(\prod_{i=1}^g [\varphi_i, \psi_i] \right) = \pi \langle e(E_\rho), [\Sigma_g] \rangle.$$

参考文献

- [1] A. Banyaga: Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique, Comm. Math. Helv. **53** (1978), 174–227.

- [2] J. Bowden: Flat structures on surface bundles, *Algebr. Geom. Topol.* **11** (2011), 2207–2235.
- [3] K.S. Brown: *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982.
- [4] C.J. Earle and J. Eells: The diffeomorphism group of a compact Riemann surface, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 557–559.
- [5] D. Kotschick and S. Morita: Signatures of foliated surface bundles and the symplectomorphism groups of surfaces, *Topology* **44** (2005), 131–149.
- [6] D. McDuff and D. Salamon: *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford mathematical monographs, Clarendon Press, 1998.
- [7] J. Milnor: On the existence of a connection with curvature zero, *Comment. Math. Helv.* **32** (1958), 215–223.
- [8] H. Moriyoshi: The Calabi invariant and central extensions of diffeomorphism groups, In *Geometry and topology of manifolds*, Springer Proc. Math. Stat. **154** (2016), 283–297.
- [9] K. Ono: Floer-Novikov cohomology and the flux conjecture, *Geom. Funct. Anal.* **16** (2006), 981–1020.
- [10] T. Tsuboi: The Calabi invariant and the Euler class, *Trans. Amer. Math. Soc.* **352** (2000), 515–524.
- [11] W. P. Thurston: Foliations and groups of diffeomorphisms, *Bull. Amer. Math. Soc.* **80** (1974), 304–307.
- [12] J. Wood: Bundles with totally disconnected structure groups, *Comment. Math. Helv.* **46** (1971), 257–273.