

正則ベクトル場と $\mathbb{CP}^1$ 上の位相的シグマモデル

北海道大学大学院 理学院 数学専攻

桑田 健 (Ken Kuwata)

1 導入

物理学におけるモデルはラグランジアンを用いて記述される．その一つにシグマ模型というものがある．これは多様体上を運動する粒子（写像）を記述するモデルである．物理において古典力学的描像から量子力学的描像へ移行する手続きを量子化という．これには大きく分けて二つの方法があり，一つは古典力学に現れる量を演算子に置き換える演算子による量子化．もう一つが Feynman の経路積分を用いた経路積分による量子化である．この二つの量子化で得られるそれぞれの結果は基本的に同じものであると考えられている．超対称性を持つリーマン多様体上の 1 次元シグマ模型において Witten 指数というものがあり，これを上の二つの量子化を用いて計算する．ここで，超対称性とは模型のラグランジアンの変分計算を行う際にボゾンとフェルミオンを入れ替える操作でこれによりその変分が零になるものが存在するという性質またはその変換法則のことである．演算子的量子化では粒子が運動する多様体のオイラー数が得られ，経路積分による量子化では多様体の曲率の Pfaffian（オイラー類）の積分が得られる [8]．この二つの量子化による結果は等しいと考えているので上の結果はガウス・ボンネの定理をあらわしていると思なせる．

Witten によって固定点定理は超対称性を持つリーマン多様体上のシグマ模型とキリングベクトル場を用いることで証明できることが示唆されており [2]，実際に Duistermaat-Heckman 公式などが Witten のアイデアを用いることで証明されている [1, 7]．一方で，これらの証明は超対称性をもつシグマ模型を具体的に構成したものではない．この原因はシグマ模型に現れるフェルミオンの処理とベクトル場の相関関数に対するスケール不変性を示すことが困難であることが原因と考えられる．これらの背景をもとにケーラー多様体上の $N = 2$ の位相的シグマ模型（A 模型）と多様体上の正則接ベクトル場を用いて特性類の積分公式である Bott residue formula [6] を得ることに取り組んだのが [4] である．これは北海道大学の秦泉寺雅夫氏との共同研究である．本稿ではこれについて紹介したい．

2 主結果

まず証明しようとしている Bott residue formula と証明に用いるモデルを紹介する．

The Bott Residue Formula [6]

$$\int_M \varphi(E) = \sum_{\alpha} \int_{N_{\alpha}} \frac{\varphi(\Lambda_{\alpha})}{\det(\theta_{\alpha}^{\nu} + tR_{\alpha}^{\nu})} \Big|_{t=\frac{i}{2\pi}}.$$

M はコンパクトケーラー多様体 $\dim_{\mathbb{C}}(M) = m$. E は M 上の正則ベクトル束 $\text{rank}_{\mathbb{C}} E = q$ で $\varphi(E)$ は次数 m の斉次対称多項式 $\varphi(x_1, \dots, x_q)$ で表される E の特性類. K は M 上の正則接ベクトル場, $\{N_{\alpha}\}$ は K の零点集合の連結成分. $\varphi(\Lambda_{\alpha})$ は N_{α} のコホモロジー類. θ_{α}^{ν} は N_{α} の法束上で K の作用によって誘導された同型写像. R_{α}^{ν} は $(1,1)$ -form の N_{α} の法束の曲率形式. 詳しい設定については後述する. 以下, 正則接ベクトル場を単に正則ベクトル場と呼ぶ.

次に今回使う位相的シグマ模型 (A 模型) について紹介する. これは $\mathbb{C}P^1$ からケーラー多様体 M への写像の運動を記述する模型であり今回はこれに正則ベクトル場 $K = K^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ によるポテンシャル項を加える. A 模型に現れる場は以下のものである.

- $\phi^i \phi^{\bar{i}} : \phi : \mathbb{C}P^1 \rightarrow M$ (C^{∞} -写像) で与えられるボゾン場
- $\chi^i : \phi^{-1}T'M$ の C^{∞} 切断に値をとるフェルミオン場
- $\chi^{\bar{i}} : \phi^{-1}\overline{T'M}$ の C^{∞} 切断に値をとるフェルミオン場
- $\psi_z^{\bar{i}} : T'^*\mathbb{C}P^1 \otimes \phi^{-1}\overline{T'M}$ の C^{∞} 切断に値をとるフェルミオン場
- $\psi_{\bar{z}}^i : \overline{T'^*\mathbb{C}P^1} \otimes \phi^{-1}T'M$ の C^{∞} 切断に値をとるフェルミオン場

$g_{i\bar{j}}$ をケーラー多様体上の計量, $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ をその曲率としたとき私たちのモデルは次のようにあらわされる.

$$L + V = \int_{\mathbb{C}P^1} dz d\bar{z} \left[\frac{t}{2} g_{i\bar{j}} (\partial_z \phi^i \partial_{\bar{z}} \phi^{\bar{j}} + \partial_{\bar{z}} \phi^i \partial_z \phi^{\bar{j}}) + \sqrt{t} i g_{i\bar{j}} \psi_z^{\bar{j}} D_{\bar{z}} \chi^i + \sqrt{t} i g_{i\bar{j}} \psi_{\bar{z}}^i D_z \chi^{\bar{j}} \right. \\ \left. - R_{i\bar{j}k\bar{l}} \psi_z^{\bar{j}} \psi_{\bar{z}}^k \chi^{\bar{l}} \chi^i + t s^2 \beta g_{i\bar{j}} K^i \bar{K}^{\bar{j}} + t s g_{i\bar{j}} \nabla_{\bar{\mu}} \bar{K}^{\bar{j}} \chi^{\bar{\mu}} \chi^i + s \beta g_{i\bar{j}} \nabla_{\mu} K^i \psi_z^{\bar{\mu}} \psi_{\bar{z}}^{\bar{j}} \right] \quad (2.1)$$

ここで β は定数で $\beta = 2\pi i$ とおく. また $s, t \in \mathbb{R}$ はパラメータ. 共変微分 $D_z, D_{\bar{z}}$ は次の形で与えられる.

$$D_{\bar{z}} \chi^i = \partial_{\bar{z}} \chi^i + \Gamma_{\mu\nu}^i \partial_{\bar{z}} \phi^{\mu} \chi^{\nu} \quad (2.2)$$

$$D_z \chi^{\bar{i}} = \partial_z \chi^{\bar{i}} + \Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{i}} \partial_z \phi^{\bar{\mu}} \chi^{\bar{\nu}}. \quad (2.3)$$

位相的シグマモデルは超対称性 (変分計算の際にボゾンとフェルミオンを入れ替える操作を行うと $\delta(L + V) = 0$ となる性質) を持っており私たちのモデルでは以下のように与えられる. ($\bar{\alpha}$ はフェルミオンパラメータ)

$$\begin{aligned} \delta \phi^{\bar{i}} &= i \bar{\alpha} \chi^{\bar{i}} & \delta \psi_z^{\bar{i}} &= -i \bar{\alpha} \Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{i}} \chi^{\bar{\mu}} \psi_z^{\bar{\nu}} \\ \delta \psi_{\bar{z}}^i &= -\sqrt{t} \bar{\alpha} \partial_{\bar{z}} \phi^i & \delta \chi^i &= i s \bar{\alpha} \beta K^i & \delta \phi^i &= \delta \chi^{\bar{i}} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

3 Bott Residue Formula の概要と記号

Bott residue formula の設定と記号についてもう少し詳しく紹介する.

3.1 正則ベクトル場の作用

ここで記号について説明する.

M : コンパクトケーラー多様体 $\dim_{\mathbb{C}}(M) = m$, K : M 上の正則ベクトル場,
 E : $\text{rank}_{\mathbb{C}}(E) = q$ の M 上の正則ベクトル場,
 $\{e_i \mid i = 1 \cdots q\}$: E の局所正則フレーム,
 $\Gamma(E)$: E の C^∞ 級切断.

$\Lambda : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ は次の条件を満たす微分演算子である.

fs ($f : M$ 上の C^∞ 級関数, $s \in \Gamma(E)$) に対して

$$\Lambda(fs) = (Kf) \cdot s + f\Lambda(s), \quad \bar{\partial}\Lambda = \Lambda\bar{\partial}. \quad (3.5)$$

ここで $\bar{\partial}$ は M の外微分演算子 d の反正則部分である. Λ を E 上の K の作用と呼ぶ. $E = T'M$ の時 Λ は反交換子 $\theta(K)(Y) := [K, Y]$ で与えられる.

3.2 特性類の表記について

ここでは E の特性類を記述する記号について説明する.

$\varphi(x_1, \dots, x_q)$: 次数 $m = \dim_{\mathbb{C}}(M)$ の複素係数の $x_1, \dots, x_q$ についての斉次対称多項式.

次に $\varphi(A)$ を定義する. ここで A は自己準同型 $A : V \rightarrow V$. (V : q 次元複素ベクトル空間). λ_i ($i = 1, \dots, q$) を A の固有値とする. この時

$$\varphi(A) := \varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_q) \quad (3.6)$$

と定義する. この時 $x_1, \dots, x_q$ を以下のような E のチャーンクラスの形式的分解で定義する.

$$\prod_{i=1}^q (1 + tx_i) := 1 + tc_1(E) + t^2 c_2(E) + \cdots + t^q c_q(E). \quad (3.7)$$

上記の設定のもとで特性類 $\varphi(E)$ を以下のように定義する.

$$\varphi(E) := \varphi(x_1, \dots, x_q). \quad (3.8)$$

$\{N_\alpha\}$ を K の零点集合の連結成分とする. この時 N_α は M のコンパクトケーラー部分多様体になっていると仮定する. 以下, N_α のコホモロジー類 $\varphi(\Lambda_\alpha)$ を定義する. Λ_α を $\Lambda|_{N_\alpha}$ (Λ の N_α への制限) とする. (3.5) の条件より, Λ_α は $E_\alpha := E|_{N_\alpha}$ で自己準同型になる. もし Λ_α の固有値が各連結成分 N_α 上定数なら Λ を定数タイプと呼ぶ. ここでは Λ は定数タイプと仮定する. 以下のような表記を導入する:

$\{\lambda_i^\alpha \mid i = 1, \dots, r\}$: Λ_α の固有値 ($r \leq q$),

m_i^α : λ_i^α の重複度 ($\sum_{i=1}^r m_i^\alpha = q$),

$E_\alpha(\lambda_i^\alpha)$: $(\Lambda_\alpha - \lambda_i^\alpha)$ が冪零になる E_α の最大の部分束, ($\text{rank}_{\mathbb{C}}(E_\alpha(\lambda_i^\alpha)) = m_i^\alpha$).

この時, $E_\alpha = \bigoplus_{i=1}^r E_\alpha(\lambda_i^\alpha)$ と分解される. $c_i(E_\alpha(\lambda_i^\alpha))$ を $E_\alpha(\lambda_i^\alpha)$ の第 i Chern 類, $x_j(\lambda_i^\alpha)$ ($j = 1, \dots, m_i^\alpha$) を以下のように $E_\alpha(\lambda_i^\alpha)$ のチャーンクラスの形式的分解によって定義する.

$$\prod_{j=1}^{m_i^\alpha} (1 + tx_j(\lambda_i^\alpha)) := 1 + tc_1(E_\alpha(\lambda_i^\alpha)) + t^2 c_2(E_\alpha(\lambda_i^\alpha)) + \dots + t^q c_q(E_\alpha(\lambda_i^\alpha)). \quad (3.9)$$

上の設定の下で $\underline{\varphi}(\Lambda_\alpha)$ は次のように定義される.

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}(\Lambda_\alpha) := & \varphi(\lambda_1^\alpha + x_1(\lambda_1^\alpha), \dots, \lambda_1^\alpha + x_{m_1^\alpha}(\lambda_1^\alpha), \lambda_2^\alpha + x_1(\lambda_2^\alpha), \dots, \lambda_2^\alpha + x_{m_2^\alpha}(\lambda_2^\alpha), \dots, \\ & \dots, \lambda_r^\alpha + x_1(\lambda_r^\alpha), \dots, \lambda_r^\alpha + x_{m_r^\alpha}(\lambda_r^\alpha)). \end{aligned} \quad (3.10)$$

F_α を $E|_{N_\alpha}$ の曲率 $(1, 1)$ -形式とする. $\Lambda_\alpha + \frac{i}{2\pi} F_\alpha$ を N_α 上の $\text{End}(E|_{N_\alpha})$ の微分形式とみなすと $\underline{\varphi}(\Lambda_\alpha)$ は (3.6) を用いて次のようにあらわされる.

$$\underline{\varphi}(\Lambda_\alpha) = \varphi(\Lambda_\alpha + \frac{i}{2\pi} F_\alpha). \quad (3.11)$$

3.3 The Bott residue formula

正則接束 $T'M|_{N_\alpha}$ 上の K の作用で誘導される 準同型 $\theta|_{N_\alpha}$ に対して系列

$$0 \rightarrow T'N_\alpha \rightarrow T'M|_{N_\alpha} \xrightarrow{\theta|_{N_\alpha}} T'M|_{N_\alpha} \quad (3.12)$$

は完全であると仮定する. これより $\text{Im}(\theta|_{N_\alpha}) \cong T'M|_{N_\alpha}/T'N_\alpha$ となる. これより同型写像 $\theta_\alpha^\nu := \theta^\nu|_{N_\alpha} : T'M|_{N_\alpha}/T'N_\alpha \rightarrow T'M|_{N_\alpha}/T'N_\alpha$ を得る. R_α^ν を正則法束 $T'M|_{N_\alpha}/T'N_\alpha$ の $(1, 1)$ -形式とする. この時 Bott residue formula は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} \int_M \underline{\varphi}(E) &= \sum_\alpha \int_{N_\alpha} \frac{\underline{\varphi}(\Lambda_\alpha)}{\det(\theta_\alpha^\nu + \frac{i}{2\pi} R_\alpha^\nu)} \\ &= \sum_\alpha \int_{N_\alpha} \frac{\varphi(\Lambda_\alpha + tF_\alpha)}{\det(\theta_\alpha^\nu + tR_\alpha^\nu)} \Big|_{t=\frac{i}{2\pi}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

私たちは Bott residue formula として二つ目の等式を導出した.

4 Bott residue formula を得る方針

ポテンシャルのないオリジナルの位相的シグマモデル (A モデル) において変換の生成子 Q を $\delta X = i\alpha\{Q, X\}$ (X は理論に現れる場) で定義すると $\{Q, \{Q, X\}\} = 0$ を満たす. このときシグマモデルの観測量 $\mathcal{O}_W$ として $\{Q, \mathcal{O}_W\} = 0$ となる場で構成されたものを考える. 実は Q は外微分形式 d と対応付けることができ, 観測量 $\mathcal{O}_W$ は微分形式 W と対応付けることができる. この対応を考慮して観測量を $\mathcal{O}_W$ と表わしている. 相関関数は Feynman の経路積分を用いて以下のように定義される.

$$\langle \mathcal{O}_W \rangle = \int \mathfrak{D}\phi \mathfrak{D}\chi \mathfrak{D}\psi \mathcal{O}_W \exp(-L). \quad (4.14)$$

この時 ϕ の次数 d によって分解することができて d 次相関関数というものを考えられるようになる。 d 次相関関数は $t \rightarrow \infty$ の弱結合極限を用いることで計算でき [3], 特に 0 次相関関数は微分形式の多様体上の積分と考えることができる。一方, ポテンシャルのある今回のモデルでは局所化原理を用いて計算を行う。これは「相関関数の値はフェルミオン場の超対称変換が消える場の配位の近傍の寄与を計算すると得られる」というものであり, 正則ベクトル場 K の零点近傍の寄与を足し上げればよいということになる。

我々のモデルの相関関数はパラメータ s に依存していないので $s \rightarrow 0$ と $s \rightarrow \infty$ の二つは等しいといえて, $s \rightarrow 0$ ではオリジナルの A 模型に比べ超対称性は少し異なる形をしているがポテンシャル項の寄与が無視できるので上に述べたように 0 次相関関数は微分形式の多様体上の積分とみなせる。一方, $s \rightarrow \infty$ ではポテンシャル項の寄与が大きくなり局所化原理から相関関数は正則ベクトル場の零点近傍の寄与を足し上げればよいということになる。したがって, $s \rightarrow 0$ で $\mathcal{O}_W \rightarrow \mathcal{O}_{\varphi(E)}$ となる観測量を構成してこれの相関関数を計算すればよいことになる (具体的な構成方法については [4] を参照していただきたい)。ここでは 0 次相関関数の積分測度をどのように定めるのかを紹介したい。0 次相関関数を考えているので写像 ϕ は定値写像 $\phi(z, \bar{z}) = \phi_0 (\in M)$ にホモトピックである。そこで場 ϕ, χ, ψ を ϕ_0 の周りで展開することを考える。この時 χ (または $\psi_{\bar{z}}$) は $\phi_0^{-1}(T'M)$ (または $\phi_0^{-1}(T'M) \otimes \overline{T'^*}\mathbb{CP}^1$) の切断になる (複素共役についても同じ)。ここで $\phi_0^{-1}(T'M)$ は自明束 $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^m$ に同型なので $\chi^i, \chi^{\bar{i}}$ (または $\psi_z^i, \psi_z^{\bar{i}}$) は $\mathbb{CP}^1$ 上の $(0,0)$ -形式 (または $(0,1)$ -形式, $(1,0)$ -形式) であるとみなせる。 $\mathbb{CP}^1$ のケーラー計量を用いて $\mathbb{CP}^1$ 上の微分形式のラプラシアンによる固有値分解を用いて各場を展開する。ラプラシアンは以下のようにあらわされる ($\dagger$ は $\mathbb{CP}^1$ のホッジ作用素による随伴作用素であることを意味している)。

$$\begin{aligned} \Delta &:= dd^\dagger + d^\dagger d & \Delta_\partial &:= \partial\partial^\dagger + \partial^\dagger\partial & \Delta_{\bar{\partial}} &:= \bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial} \\ \Delta &= 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar{\partial}} \end{aligned}$$

$\Delta^{(p,q)}$ を $\Omega^{(p,q)}(\mathbb{CP}^1)$ への制限とする。零固有値の (p,q) -形式のベクトル空間は (p,q) -形式の調和形式のベクトル空間 $H^{p,q}(\mathbb{CP}^1)$ として知られていて次の事実がある。

$$\dim_{\mathbb{C}}(H^{0,0}(\mathbb{CP}^1)) = 1, \quad \dim_{\mathbb{C}}(H^{1,0}(\mathbb{CP}^1)) = \dim_{\mathbb{C}}(H^{0,1}(\mathbb{CP}^1)) = 0. \quad (4.15)$$

$\{E_n \mid n > 0\}$ を次の条件を満たす $\frac{1}{2}\Delta^{(0,0)}$ の正固有値の集合とする。

$$0 < E_1 \leq E_2 \leq E_3 \leq \dots \quad (4.16)$$

この時 $f_n(z, \bar{z})$ を次の条件を満たす $(0,0)$ -形式とする。

$$\frac{1}{2}\Delta^{(0,0)}f_n(z, \bar{z}) = E_nf_n(z, \bar{z}). \quad (4.17)$$

Lemma 1 $\frac{1}{2}\Delta^{(1,0)}$ と $\frac{1}{2}\Delta^{(0,1)}$ の正の固有値は $\{E_n \mid n > 0\}$ で与えられて固有値 E_n の $(1,0)$, $(0,1)$ 形式はそれぞれ $\partial f_n(z, \bar{z})$, $\bar{\partial} f_n(z, \bar{z})$ で与えられる。

Proof)

$\frac{1}{2}\Delta = (\partial\partial^\dagger + \partial^\dagger\partial)$ なので,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta f_n(z, \bar{z}) &= (\partial\partial^\dagger + \partial^\dagger\partial)f_n(z, \bar{z}) \\
&= \partial\partial^\dagger f_n(z, \bar{z}) \\
&= \partial(\partial\partial^\dagger + \partial^\dagger\partial)f_n(z, \bar{z}) \\
&= \frac{1}{2}\partial\Delta f_n(z, \bar{z}) \\
&= E_n \partial f_n(z, \bar{z}).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

したがって $\partial f_n(z, \bar{z})$ は固有値 E_n の $(1, 0)$ -形式である. ω を固有値 E を持つ $(1, 0)$ -形式とする. この時 $(0, 0)$ -形式 $\partial^\dagger\omega$ は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\partial^\dagger\omega &= (\partial\partial^\dagger + \partial^\dagger\partial)\partial^\dagger\omega \\
&= \partial^\dagger\partial\partial^\dagger\omega \\
&= \partial^\dagger(\partial\partial^\dagger + \partial^\dagger\partial)\omega \\
&= \frac{1}{2}\partial^\dagger\Delta\omega \\
&= E\partial^\dagger\omega.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

したがって $\partial^\dagger\omega$ はいずれかの $f_n(z, \bar{z})$ に一致する. $\Delta^{(1,0)}$ の場合については示せた. $\frac{1}{2}\Delta^{(0,1)}$ についても $\frac{1}{2}\Delta = (\bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial})$ を用いれば同様の方法で示せる. $\square$

以上のことから

$$\phi^i = \phi_0^i + \sum_{n>0} \phi_n'^i f_n(z, \bar{z}), \quad \phi^{\bar{i}} = \phi_0^{\bar{i}} + \sum_{n>0} \phi_n'^{\bar{i}} \bar{f}_n(z, \bar{z}), \tag{4.20}$$

$$\chi^i = \chi_0^i + \sum_{n>0} \chi_n'^i f_n(z, \bar{z}), \quad \chi^{\bar{i}} = \chi_0^{\bar{i}} + \sum_{n>0} \chi_n'^{\bar{i}} \bar{f}_n(z, \bar{z}), \tag{4.21}$$

$$\psi_z^i = \sum_{n>0} \psi_n'^i \frac{1}{\sqrt{E_n}} \partial_z f_n(z, \bar{z}), \quad \psi_z^{\bar{i}} = \sum_{n>0} \psi_n'^{\bar{i}} \frac{1}{\sqrt{E_n}} \partial_z \bar{f}_n(z, \bar{z}). \tag{4.22}$$

と展開する. $\mathbb{CP}^1$ の体積は 1 とする. Δ はエルミート作用なので $\{f_0(z, \bar{z}) = 1, f_1(z, \bar{z}), f_2(z, \bar{z}), \dots\}$ は $\Omega^{(0,0)}$ の正規直行基底だとみなせて次が成り立つ.

$$(f_n, f_m) := \int_{\mathbb{CP}^1} \bar{f}_n(z, \bar{z}) f_m(z, \bar{z}) dz \wedge d\bar{z} = \delta_{n,m} \quad (n, m \geq 0). \tag{4.23}$$

$$(f_n, (\bar{\partial}^\dagger \bar{\partial} + \bar{\partial} \bar{\partial}^\dagger) f_m) = E_m \delta_{n,m} = (f_n, \bar{\partial}^\dagger \bar{\partial} f_m) = (\bar{\partial} f_n, \bar{\partial} f_m), \text{ なので}$$

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \partial_z \bar{f}_n(z, \bar{z}) \partial_{\bar{z}} f_m(z, \bar{z}) dz \wedge d\bar{z} = E_m \delta_{n,m} \quad (n, m > 0). \tag{4.24}$$

この理由により ψ を展開する基底として $\{\frac{1}{\sqrt{E_n}} \partial_z f_n(z, \bar{z}) \mid n > 0\}$ と $\{\frac{1}{\sqrt{E_n}} \partial_{\bar{z}} f_n(z, \bar{z}) \mid n > 0\}$ を用いている. したがって, $s \rightarrow \infty$ での 0 次相関関数の積分測度は以下で与えられる.

$$\mathfrak{D}\phi \mathfrak{D}\chi \mathfrak{D}\psi = \left(\prod_{i=1}^m d\phi_0^i d\phi_0^{\bar{i}} d\chi_0^i d\chi_0^{\bar{i}} \right) \left(\prod_{i=1}^m \prod_{n=1}^\infty \frac{d\phi_n'^i d\phi_n'^{\bar{i}}}{2\pi i} d\chi_n'^i d\chi_n'^{\bar{i}} d\psi_n'^i d\psi_n'^{\bar{i}} \right). \tag{4.25}$$

これを用いて零点近傍での相関関数を実際に計算することで (3.13) を導出した.

参考文献

- [1] A. Alekseev. *Notes on Equivariant localization*. Vienna, Preprint ESI 744 (1999).
- [2] E. Witten. *Supersymmetry and Morse Theory*. J.Differential Geometry 17(1982), 661–692.
- [3] M. Jinzenji. *Classical Mirror Symmetry* SpringerBriefs in Mathematical Physics, 29. Springer, Singapore, 2018.
- [4] M. Jinzenji, K.Kuwata *Holomorphic Vector Field and Topological Sigma Model on $\mathbb{CP}^1$* *World Sheet* arxiv:hep-th/1906.10383v2
- [5] R. Bott. *Vector fields and characteristic numbers*. Michigan Math.J.14(1967), 231–244.
- [6] R. Bott. *A residue formula for holomorphic vector fields*. J.Differential Geometry 4(1967),311–330.
- [7] Richard J. Szabo. *Equivariant Localization of Path Integrals* arxiv:hep-th/9608068v1 1996.
- [8] Si Li. *Supersymmetric Quantum Mechanics and Lefschetz fixed-point formula*. arxiv:hep-th/0511101 2005.