

非 Gorenstein 環における Auslander-Reiten 予想*

千葉大学大学院 融合理学府 数学情報科学専攻

神代 真也 (Shinya Kumashiro)[†]

1 導入

Auslander-Reiten 予想はホモロジーの消滅の研究における四十年来の未解決問題である。射影次元の測量や持ち上げ問題といった諸問題との関わりの中で、様々な予想と結びつきながら、多くの研究者によって深い優れた研究がなされている。最近では、次数付き微分代数や圏論からの新たな手法も開拓されつつある。Auslander-Reiten 予想の主張は次のように述べられる。

予想 1. R を可換 Noether 環、 M を有限生成 R -加群とする。このとき、もし全ての自然数 i に対して $\text{Ext}_R^i(M, M \oplus R) = 0$ ならば M は射影加群である。

Auslander-Reiten 予想に関する先行研究について本研究に関係の深いものをいくつか述べる。より詳細については例えば論文 [6, Appendix A] を参照されたい。良く知られているように、可換環はホモロジー代数的視点から

正則環 $\Rightarrow$ 完全交叉 $\Rightarrow$ Gorenstein 環 $\Rightarrow$ Cohen-Macaulay 環 $\Rightarrow$ Noether 環

のように階層化される。Auslander-Reiten 予想はこのうち完全交叉であれば正しいことが知られている ([2])。また Gorenstein 環においても正規整域であったり、重複度と Krull 次元の差が 4 以下の場合には正しいことが知られている ([1, 6, 11])。反面、Gorenstein でない場合においては全反射予想が成り立たないこともあり、一般的な解決は困難となっている。本稿の目的はその非 Gorenstein 環における Auslander-Reiten 予想を考察することにある。主結果を述べるために必要な定義をいくつか述べる。

定義 1.1. (行列式環) $s \leq t$ を自然数、 A を可換環とする。 $A[\mathbf{X}] = A[X_{ij}]_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t}$ を A 上の mn 変数の多項式環、 $\mathbb{I}_s(\mathbf{X})$ を $s \times t$ 行列 (X_{ij}) の s 次小行列式で生成された $A[\mathbf{X}]$ のイデアルとする。このとき剰余環 $A[\mathbf{X}]/\mathbb{I}_s(\mathbf{X})$ を A 上の行列式環という。

定義 1.2. (Ulrich イデアル) $(R, \mathfrak{m})$ を Cohen-Macaulay 局所環、 I を $\mathfrak{m}$ -準素イデアルとする。このとき I が Ulrich イデアルとは、以下の二条件を満たすことをいう。

- (1) ある巴系イデアル $\mathfrak{q} \subseteq I$ に対して $I^2 = \mathfrak{q}I$ である。
- (2) I/I^2 は自由 R/I -加群である。

行列式環は可換環論、組み合わせ論、不変式論において重要な研究対象である ([5])。Ulrich イデアルは近年導入された概念であってイデアル論、表現論的に興味深い性質を多く持つことが知られている ([8, 9, 10])。またその存在性についても環の構造と関連付けて述べられる ([7])。以上の定義のもと本稿の主定理は次のように述べられる。

* This is not in final form. The final version will be submitted to elsewhere for publication.

[†] The author was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP19J10579.

定理 1.3. A は完全交叉または *Gorenstein* 正規整域とする。このとき $2s \leq t + 1$ ならば行列式環 $A[\mathbf{X}]/\mathbb{I}_s(\mathbf{X})$ に対して *Auslander-Reiten* 予想が成り立つ。

定理 1.4. R を *Cohen-Macaulay* 局所環とする。もし R/I が完全交叉となる *Ulrich* イデアル I が存在すれば *Auslander-Reiten* 予想が成り立つ。

以下、得られた結果を述べるために本稿における状況設定を述べる。

設定 1. 本稿を通して特に述べない限り $(R, \mathfrak{m})$ は *Cohen-Macaulay* 局所環とする。任意の有限生成 R -加群 M に対して、 $\mu_R(M)$ はその極小生成系の個数、 $\ell_R(M)$ は長さを表すものとする。 M が *Cohen-Macaulay* 加群のとき

$$\mathbf{r}_R(M) = \ell_R(\text{Ext}_R^d(R/\mathfrak{m}, M))$$

を M の *Cohen-Macaulay* 型という。また簡便のため、 $\text{Ext}_R^{>0}(M, N) = 0$ で勝手な正の自然数 i に対して $\text{Ext}_R^i(M, N) = 0$ が成り立つことを表すものとする ($\text{Tor}_{>0}^R(M, N) = 0$ についても同様に定義する)。

2 定理 1.3 の証明

Auslander-Reiten 予想の主張は容易に局所環に帰着できる。更に *Auslander-Ding-Solberg* によって次のことが知られている。

事実 2.1. ([2]) $(R, \mathfrak{m})$ を *Noetherian* 局所環、 $a \in \mathfrak{m}$ を R の非零因子とする。このとき *Auslander-Reiten* 予想が R で成り立つことと $R/(a)$ で成り立つことは同値である。

従って、 R が *Cohen-Macaulay* 局所環であれば、 Q を巴系イデアルとすると *Artin* 局所環 R/Q に帰着できる。また、完全交叉で *Auslander-Reiten* 予想が成り立つこともこの事実から従う。本研究の鍵となるのは上記の命題を正則列で生成されたイデアルの冪へ拡張させた次の命題である。

命題 2.2. $(R, \mathfrak{m})$ を *Gorenstein* 局所環、 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を R の正則列とする。 $Q = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ とおく。このとき次は同値である。

- (1) R に対して *Auslander-Reiten* 予想が成り立つ。
- (2) R/Q^ℓ に対して *Auslander-Reiten* 予想が成り立つような自然数 $\ell > 0$ が存在する。
- (3) 全ての自然数 $1 \leq \ell \leq n$ に対して、 R/Q^ℓ で *Auslander-Reiten* 予想が成り立つ。

このことから次が従う。

定理 2.3. s, t を自然数として $2s \leq t + 1$ と仮定する。 R を *Gorenstein* 局所環で $\{x_{ij}\}_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t}$ は R の正則列をなすとせよ。 $I = \mathbb{I}_s(x_{ij}^{\alpha_{ij}})$ で $s \times t$ 行列 $(x_{ij}^{\alpha_{ij}})$ の s 次小行列式で生成された R のイデアルを表す。ただし、 α_{ij} は自然数とする。このとき、*Auslander-Reiten* 予想が R で成り立つことと R/I で成り立つことは同値である。

先に述べたように、 A が完全交叉または *Gorenstein* 正規整域であれば *Auslander-Reiten* 予想が成り立つことが知られている。このことと定理 2.3 を合わせることで定理 1.3 が得られる。定理 2.3 を通して新たに *Auslander-Reiten* 予想が成り立つことがわかったクラスをいくつか紹介したい。

例 2.4. $(A, \mathfrak{n})$ を *Gorenstein* 正規整域または完全交叉として、 $A[[\mathbf{X}]] = A[[X_1, X_2, \dots, X_n]]$, $A[[X, Y]]$ を A 上の形式的冪級数環とする。このとき以下は *Auslander-Reiten* 予想が成り立つ。

- (1) $A[[\mathbf{X}]]/I$ ただし $I = \mathbb{I}_2 \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_{n-1} & X_n \\ X_2 & X_3 & \dots & X_n & X_1 \end{pmatrix}$.

- (2) $A[[X^5, X^7, X^8, X^{11}]]$.
- (3) 三元生成数値半群環 $A[[X^a, X^b, X^c]]$.
- (4) Rees 代数 $A[[X_1^{m_1}Y, X_2^{m_2}Y, \dots, X_n^{m_n}Y]]$.

3 定理 1.4 の証明

次に定理 1.4 について述べる。以下、 $(R, \mathfrak{m})$ は d 次元 Cohen-Macaulay 局所環とする。定理 1.4 を示す鍵は次の命題である。

定理 3.1. 次は同値である。

- (1) $R/\mathfrak{q} \cong S/Q^2$ となる正次元局所完全交叉 S とその正則列 Q 、 R の正則列 $\mathfrak{q}$ が存在する。
- (2) 以下の条件を満たす $\mathfrak{m}$ -準素イデアル I と巴系イデアル $\mathfrak{q}$ が存在する。
 - (i) $I^2 \subseteq \mathfrak{q} \subsetneq I$ かつ $I/\mathfrak{q}$ は自由 R/I -加群である。
 - (ii) R/I は完全交叉である。

定理 3.1(2)(i) の条件は以下に示すように Ulrich イデアルの存在性と密接に関係していることが知られている。

命題 3.2. [8, Lemma 2.3. and Proposition 2.3.] $R/\mathfrak{m}$ は無限体とすると次は同値である。

- (1) I が *Ulrich* イデアルである。
- (2) 勝手な I の極小節減 $\mathfrak{q}$ に対して $I^2 \subseteq \mathfrak{q} \subsetneq I$ かつ $I/\mathfrak{q}$ は自由 R/I -加群である。

この命題と定理 2.2 を合わせることで定理 1.4 を得る。そのうえ、Sally の結果 [13, Theorem 1.] の拡張を含む次の結果を得る。

系 3.3. R/I が完全交叉となる *Ulrich* イデアル I が存在したと仮定する。 $d = \dim R$, $r = r(R)$, $v = v(R)$ とおくと、次が正しい。

- (1) 全ての有限生成 R -加群 M に対して

$$\mathrm{pd}_R M = \inf\{n \geq 0 \mid \mathrm{Ext}_R^n(M, M \oplus R) \neq 0\}$$

が成り立つ。特に、 R に対して *Auslander-Reiten* 予想が成り立つ。

- (2) $r + d \leq v$.
- (3) $R/\mathfrak{q} \cong S/Q^2$ となる r 次元局所完全交叉 S とその正則列 Q 、 R の正則列 $\mathfrak{q}$ が存在する。
- (4) (cf. [13, Theorem 1.]) v 次元正則局所環 T からの全射準同型写像 $T \rightarrow R$ があるとせよ。

$$0 \rightarrow F_{v-d} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow R \rightarrow 0$$

を R の極小 T 自由分解とする。このとき

$$\mathrm{rank}_T F_0 = 1 \quad \text{かつ} \quad \mathrm{rank}_T F_i = \sum_{j=0}^{v-r-d} \beta_{i-j} \binom{v-r-d}{j}$$

$$\text{for } 1 \leq i \leq v-d, \text{ where } \beta_k = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0 \\ k \cdot \binom{r+1}{k+1} & \text{if } 1 \leq k \leq r \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

参考文献

- [1] T. ARAYA, The Auslander-Reiten conjecture for Gorenstein rings, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **137** (2009), no.6, 1941–1944.
- [2] M. AUSLANDER, S. DING, AND Ø. SOLBERG, Liftings and Weak Liftings of Modules, *Journal of Algebra*, **156** (1993), 273–317.
- [3] M. AUSLANDER, I. REITEN, On a generalized version of the Nakayama conjecture, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **52** (1975), 69–74.
- [4] W. BRUNS AND J. HERZOG, Cohen-Macaulay Rings, Cambridge University Press (1993).
- [5] W. BRUNS AND U. VETTER, Determinantal Rings, Lecture Notes in Mathematics 1327, (1988), Springer-Verlag, Berlin.
- [6] L. W. CHRISTENSEN AND H. HOLM, Algebras that satisfy Auslander’s condition on vanishing of cohomology, *Mathematische Zeitschrift*, **265** (2010), no. 1, 21–40.
- [7] S. GOTO, R. ISOBE, AND S. KUMASHIRO, The structure of chains of Ulrich ideals in Cohen-Macaulay local rings of dimension one, *Acta Mathematica Vietnamica*, **44**(1) (2019), 65–82.
- [8] S. GOTO, K. OZEKI, R. TAKAHASHI, K.-I. WATANABE, AND K.-I. YOSHIDA, Ulrich ideals and modules, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **156** (2014), 137–166.
- [9] S. GOTO, K. OZEKI, R. TAKAHASHI, K.-I. WATANABE, AND K.-I. YOSHIDA, Ulrich ideals and modules over two-dimensional rational singularities, *Nagoya Mathematical Journal*, **221** (2016), 69–110.
- [10] S. GOTO, R. TAKAHASHI, AND N. TANIGUCHI, Ulrich ideals and almost Gorenstein rings, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **144** (2016), 2811–2823.
- [11] C. HUNEKE AND G. J. LEUSCHKE, On a conjecture of Auslander and Reiten, *Journal of Algebra*, **275** (2004), 781–790.
- [12] S. KUMASHIRO, Auslander-Reiten conjecture for non-Gorenstein Cohen-Macaulay rings, arXiv:1906.02669, 2019.
- [13] J. SALLY, Cohen-Macaulay local rings of maximal embedding dimension, *Journal of Algebra*, **56** (1979), 168–183.