

# 2つの有限 Jenkins-Strebel 方向を有する平坦構造における Veech 群の特徴づけ

東北大学大学院情報科学研究科情報基礎科学専攻  
熊谷駿 (Shun KUMAGAI)

## 概要

リーマン面のモジュライ空間の普遍被覆空間であるタイヒミュラー空間において、その余接バンドルはリーマン面の「平坦構造」の空間と見ることができる。一つの平坦構造のアフィン構造変形族はモジュライ空間上で円板をモデルとするオービフォールドを与えるが、その表示を与える群を Veech 群という。本講演では 2 つの有限 Jenkins-Strebel 方向の存在を仮定したとき平坦曲面が有限個の平行四辺形セルに分解され、その組み合わせ構造を用いて Veech 群の特徴づけができることについて説明する。

## 1 準備

本稿では双曲型で解析的有限型  $((g, n)$ -型) のリーマン面、すなわち種数  $g$  と標点数  $n$  が有限で  $2g - 2 + n > 0$  を満たす一次元複素多様体を考える。  $(g, n)$ -型のリーマン面から複素構造を忘れた位相曲面を  $\Sigma_{g,n}$  で表す。

本稿で興味がある対象は「リーマン面の平坦構造がつくるモジュライ空間の中の曲面族」である。まずこれを説明するための諸概念の定義から始める。

**定義 1.1.**  $\mathcal{M}_{g,n} = \{(g, n)$ -型のリーマン面  $\}/_{\text{等角同値}}$  : モジュライ空間

リーマン面  $R$  と向きを保つ同相写像  $f : \Sigma_{g,n} \rightarrow R$  の対  $(R, f)$  を標識付きリーマン面という。

標識付きリーマン面  $(R_j, f_j) (j = 1, 2)$  がタイヒミュラー同値であるとは、等角写像  $h : R_1 \rightarrow R_2$  であって  $f_2 \circ f_1^{-1}$  にホモトピックであるものが存在することをいう。

$$\begin{array}{ccc} & & R_1 \\ & \nearrow f_1 & \downarrow f_2 \circ f_1^{-1} \sim \exists h \\ \Sigma_{g,n} & \circ & \\ & \searrow f_2 & R_2 \end{array}$$

$\mathcal{T}_{g,n} = \{(g, n)$ -型の標識付きリーマン面  $\}/_{\text{タイヒミュラー同値}}$  : タイヒミュラー空間

これらについて次のことが知られている。詳しくは [6], [9] を参照されたい。

- $\mathcal{T}_{g,n}$  は  $(3g - 3 + n)$  次元の複素多様体である.
- $\mathcal{T}_{g,n}$  は球に同相な有界領域として  $\mathbb{C}^{3g-3+n}$  に埋め込まれる.
- $\mathcal{T}_{g,n}$  は  $\mathcal{M}_{g,n}$  の普遍被覆空間である. 被覆変換群は写像類群  $MCG_{g,n} = \{f : \Sigma_{g,n} \rightarrow \Sigma_{g,n} : \text{向きを保つ同相写像}\} / \text{イソトピー}$  であり,  $\mathcal{T}_{g,n}$  に高々有限周期の固定点を許して作用する. とくに  $\mathcal{M}_{g,n}$  は複素  $(3g - 3 + n)$  次元のオービフォールドである.

タイヒミュラー空間に関する重要な概念として写像の最大歪曲度が挙げられる. これは写像が等角写像に比べてどのくらい離れているかを表す量で, 例えば平面上の正円をどのくらいの短径/長径比に写すかの評価で定義される. 二つの標識付きリーマン面を結ぶ写像の持ちうる最大歪曲度の下限を用いてタイヒミュラー空間上に完備な距離 (タイヒミュラー距離) が定義される.

平坦構造はリーマン面上のある種のアトラスで, 局所的に平面上の初等幾何が実現できるものである. これはタイヒミュラー距離における極值的写像を表現する過程で現れる.

**定義 1.2.** 任意の局所座標変換が  $z \mapsto \pm z + c$  の形である  $R$  上のアトラスで極大のもの  $\omega$  を  $R$  上の平坦構造といい, 曲面と平坦構造の対  $(R, \omega)$  を平坦曲面という.

一般に平坦構造はリーマン面上の正則二次微分と対応づけて扱われるが, 簡単のため本稿では省略する. (詳しくは [4] を見よ.)

**定理 1.3** (Teichmüller existence theorem [1]). 任意の  $x_j = [R_j, f_j] \in \mathcal{T}_{g,n}$  ( $j = 1, 2$ ) に対し, ある  $R_1, R_2$  上の平坦構造  $\omega_1, \omega_2$  とそれに関する  $x_1, x_2$  の間の極值的アフィン変形  $g : R_1 \rightarrow R_2$  が存在する. すなわちある  $0 < k < 1$  に対して次をみたす.

1.  $g \sim f_2 \circ f_1^{-1}$
2.  $g$  は  $\omega_1, \omega_2$  の座標について至る所局所的に  $z \mapsto \pm \begin{pmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix} z_{(注)} + c$  の形である.
3.  $x_1, x_2$  間のタイヒミュラー距離の下限は  $g$  で達成される.

(注: 平面上のアフィン写像:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = (ax + by) + i(cx + dy)$  where  $z = x + iy$ )

**定義 1.4.**  $(R, \omega), (R_j, \omega_j) (j = 1, 2)$  を平坦曲面とする.

1. 写像  $f : (R_1, \omega_1) \rightarrow (R_2, \omega_2)$  が  $\omega_1, \omega_2$  の座標について至る所局所的に  $z \mapsto Az + c \dots (\star)$  ( $A \in GL(2, \mathbb{R}), c \in \mathbb{C}$ ) の形であるときアフィン変形という. アフィン変形  $f : (R, \omega) \rightarrow (R, \omega)$  を  $(R, \omega)$  上のアフィン写像といい,  $(R, \omega)$  上のアフィン写像全体のなす群を  $\text{Aff}^+(R, \omega)$  で表す.
2. アフィン変形  $f : (R_1, \omega_1) \rightarrow (R_2, \omega_2)$  に対し, 局所表示  $(\star)$  における微分  $A$  は高々符号を除いて一意である. 対応  $f \mapsto [A] \in PGL(2, \mathbb{R})$  を  $D$  で表す.
3.  $\Gamma(R, \omega) := \{D(f) \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid f \in \text{Aff}^+(R, \omega)\}$  を **Veech 群** という.

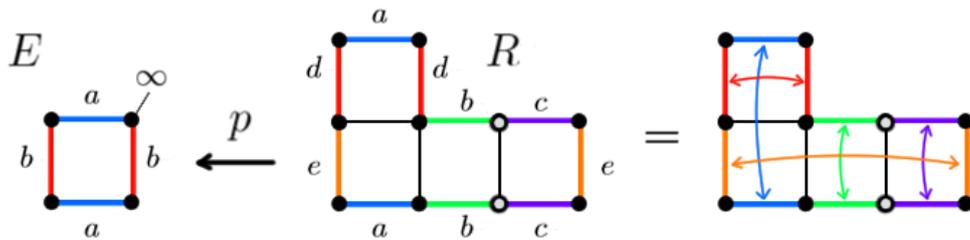
$(R, \omega)$  を平坦曲面とする. 各  $t \in \mathbb{D}$  に対し,  $\omega$  のすべての座標を  $z \mapsto z + t\bar{z} = \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} z \cdots (*)$  で変形して得られるアトラスを  $\omega_t$  とおくと, これは新たにリーマン面の構造  $R_t$  と平坦曲面  $(R_t, \omega_t)$  を定める.  $f_t := id_{\Sigma_{g,n}} : R \rightarrow R_t$  は  $(*)$  の形で表示されるアフィン変形であり, 標識付きリーマン面の族  $\Delta(R, \omega) := \{[R_t, f_t] \in T(R) \mid t \in \mathbb{D}\}$  は  $\mathcal{T}_{g,n}$  に等長に埋め込まれる円盤になる ( $\cdot$ : 定理 1.3).  $\Delta(R, \omega)$  を射影  $\mathcal{T}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$  で写した像  $C(R, \omega) \subset \mathcal{M}_{g,n}$  は次の定理で特徴付けられる.

**定理 1.5** (Earle, Gardiner [2]).  $f \in MCG_{g,n}$  の作用が  $\Delta(R, \omega) \subset \mathcal{T}_{g,n}$  を集合として固定するためには  $f \in \text{Aff}^+(R, \omega)$  なることが必要かつ十分である. さらに,  $\Delta(R, \omega)$  に対するアフィン写像  $f$  の作用は円盤に対する  $D(f)$  のメビウス変換の鏡像共役に一致する. (i.e.  $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau-d}$  for each  $\tau \in \mathbb{H} \cong \mathbb{D}$  where  $D(f) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ )

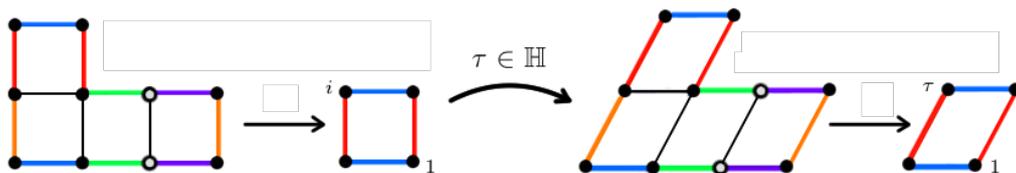
とくに Veech 群  $\Gamma(R, \omega)$  は  $PSL(2, \mathbb{R})$  の離散部分群であり,  $C(R, \omega)$  は  $\mathbb{D}/\Gamma(R, \omega)$  の鏡像に同一視されるオービフォールドになる.  $\Gamma(R, \omega)$  が有限の双曲面積を有するとき  $C(R, \omega)$  は代数曲線と見なすことができ, タイヒミュラー曲線と呼ばれる.

## 2 例

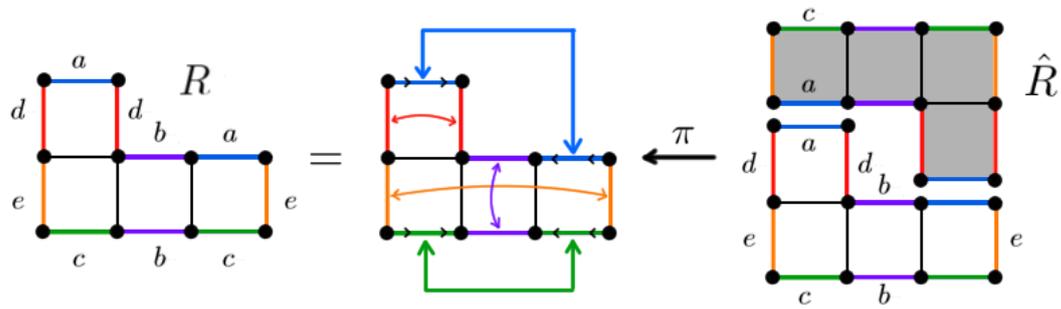
一点抜きトーラス  $\Sigma_{1,1}$  の連結な有限被覆面を **(oriented) origami** [5] という.  $\Sigma_{1,1}$  に単位正方形トーラス  $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + i\mathbb{Z} \setminus \{\infty\}$  の複素構造と  $\mathbb{C}$  への自然な射影から得られる平坦構造を入れ, 被覆で持ち上げることで origami は平坦曲面になる.



origami は図のような, 有限個の正方形の ‘上辺’ $\leftrightarrow$  ‘下辺’, ‘左辺’ $\leftrightarrow$  ‘右辺’ を平行移動で同一視して貼り合わせた曲面とみなすこともできる. 一般に, このように平面上の有限個の多角形に対して平行移動による貼り合わせ規則を与えることで平坦曲面の例を作ることができる.



$\Delta(R, \omega)$  は上図のような  $1, \tau \in \mathbb{H} \cong \mathbb{D}$  が張る平行四辺形から得られる平坦曲面の族と解釈できる.



origami の貼り合わせ規則の拡張として ‘上辺’ $\leftrightarrow$ ‘上辺’, ‘下辺’ $\leftrightarrow$ ‘下辺’ については半回転と平行移動で貼り合わせることを許した場合, 平坦曲面であって先程の構成で得られないもの (**non oriented origami** [8]) が現れる. これは貼り合わせ規則の origami との違いに応じた構成により, 二重被覆面として origami を取ることができる.

### 3 先行研究

Veech 群の非自明な例としては Veech [12], Earle, Gardiner [3] が与えた具体例が知られていた.

Schmithüsen [10] は一般の origami に対して被覆のモノドロミーを用いたアプローチによって Veech 群の組み合わせ論的特徴づけと生成系等を特定するアルゴリズムを構成し, これをもって多くの例が与えられることになった. この手法はさらに四之宮 [11] により正  $2n$  角形の平坦曲面の被覆面に対して拡張され, また筆者 [7] により non oriented origami において二重被覆面との関連から Veech 群を特定する応用が与えられている.

これらの先行研究において行列が Veech 群に属するかの判定はしばしば課題となっており, 後述する局所的な平面幾何を用いて逐一对処されてきた. 本稿の主題は行列が Veech 群に属するための必要かつ十分な条件として扱いやすいものを与えることである.

### 4 2つの有限 Jenkins-Strebel 方向を有する平坦構造

$(R, \omega)$  を平坦曲面とする.

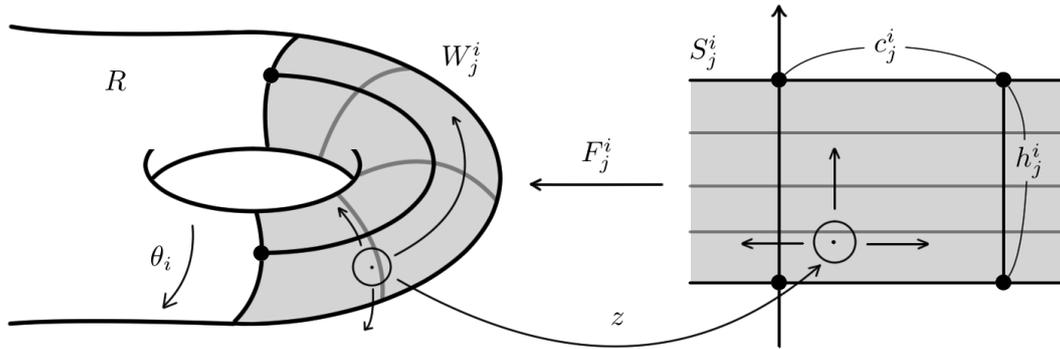
ユークリッド計量を  $\omega$  の座標でリフトした  $R$  上の計量を考えると測地線は局所的に線分であり, その方向は  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  で well-defined である. いま閉測地線の存在を仮定したとき, ホモトピックな同じ向きの閉測地線を集めることで  $R$  上の円柱領域が得られる.

**定義 4.1.**  $\theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  が平坦曲面  $(R, \omega)$  の (有限)Jenkins-Strebel 方向とは,  $R$  上ほとんど至る所の点が方向  $\theta$  の閉測地線上にあることをいう.

$(R, \omega)$  の Jenkins-Strebel 方向を仮定したとき,  $R$  はその方向の円柱領域への分解を持つ. 今回は解析

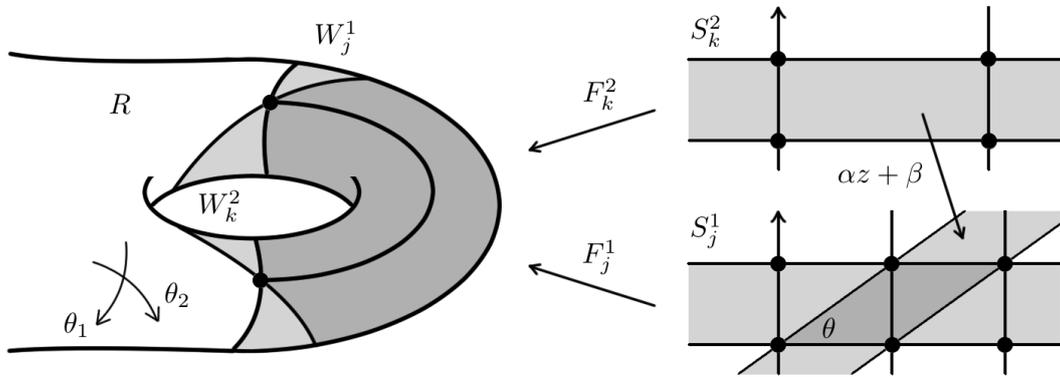
的有限型を仮定しているため円柱領域の成分は高々有限個である (一般にそのような Jenkins-Strebel 方向は有限であるという).

いま,  $(R, \omega)$  に二つの異なる Jenkins-Strebel 方向  $\theta_1, \theta_2$  を仮定する. このとき各方向の各円柱領域に対し  $\omega$  の座標の解析接続により被覆  $F_j^i : (\mathbb{C}$  の帯状領域)  $\rightarrow$  ( $\theta_i$  方向の円柱領域) をとると,



2 方向の円柱領域の共通部分は平面上の平行四辺形領域と同一視される.

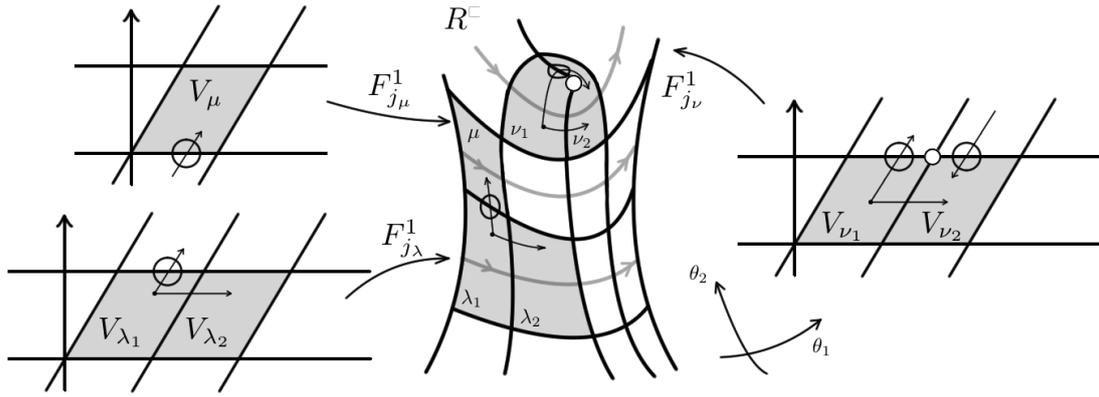
各々の平行四辺形領域が各方向にどう隣接しているかは  $\{F_j^i\}$  を用いて見ることができる. これに従って対応する有限個の平行四辺形セルの辺を貼り合わせることで得られる平坦曲面と  $(R, \omega)$  を同一視することができる.



この観察の帰結として, 一般に「2 つの有限 Jenkins-Strebel 方向」の仮定は平坦曲面が解析的有限型であることの十分条件であることがわかる (Earle, Gardiner [3]).

いま, 得られた有限個の平行四辺形セルを  $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  とし,  $\hat{\Lambda} := \Lambda \times \{\pm 1\}$  とおく.

各  $(\lambda, \varepsilon) \in \hat{\Lambda}$  に対し,  $\mathbf{x}(\lambda, \varepsilon)$  (resp.  $\mathbf{y}(\lambda, \varepsilon)$ ) を番号  $\lambda$  のセルから座標  $\varepsilon F_j^1|_{\text{loc}}^{-1}$  でみて  $\theta_1$  (resp.  $\theta_2$ ) 方向正の向きに測地線を伸ばした先の (セル番号, 座標変換の符号) で定義する.



上図の例では  $\mathbf{x}(\lambda_1, +1) = (\lambda_2, +1)$ ,  $\mathbf{y}(\lambda_1, +1) = (\mu, +1)$ ,  $\mathbf{y}(\nu_1, +1) = (\nu_2, -1)$  である。

このとき  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  は  $\text{Sym}(\hat{\Lambda})$  の元を定める。  $M = [M_\lambda]_{\lambda \in \Lambda} \in \mathbb{R}_+ P^\Lambda$  を平行四辺形のモジュライ比とすると、  $\hat{G} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle < \text{Sym}(\hat{\Lambda})$  は次の 4 条件をみたす並べ替え群を与える。

1. (両立性)  $\forall \gamma \in \pi_1(R^*)$  について  $\hat{G}$  の貼り合わせ規則に従い一周、モジュライ比  $M$  の平行四辺形セルを貼り合わせることができる。 ( $\prod_\gamma \frac{M_k}{M_j} = 1$  の形の等式をみたす.)
2. (非分岐)  $\mathbf{y}(\lambda, \varepsilon) \neq (\lambda, -\varepsilon)$  for  $\forall \lambda \in \hat{\Lambda}$ .
3. (対称性)  $\sigma(\lambda, \varepsilon) = \sigma^{-1}(\lambda, -\varepsilon)$  for  $\forall \sigma \in \hat{G}$ .
4. (連結性) 作用  $\hat{G} \curvearrowright \hat{\Lambda}$  は transitive または half-transitive である。

**定義 4.2.**  $\Lambda$  を有限集合とする。  $\hat{\Lambda} := \Lambda \times \{\pm 1\}$ ,  $\hat{G} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle < \text{Sym}(\hat{\Lambda})$ ,  $M \in \mathbb{R}_+ P^\Lambda$  からなる対  $\mathcal{O} = (\hat{\Lambda}, \hat{G}, M)$  で上の 4 条件をみたすものを **extended origami** という。

アフィン写像  $f \in \text{Aff}^+(R, \omega)$  は測地線を測地線に写し、測地線が並行である状況を変えない。また測地線の向き、平行四辺形のモジュラスの変化は平面上の初等幾何により  $D(f)$  にのみ依存する形 ( $\theta \mapsto D(f)\theta$ ,  $m \mapsto D(f)m$ ) で記述することができる。  $(\theta_1, \theta_2)$  方向と  $(D(f)\theta_1, D(f)\theta_2)$  方向についてそれぞれ  $(R, \omega)$  を平行四辺形に分解して得られる extended origami は“一致”しなければならない。さらに、次に述べるより強い結果が成り立つ。

## 5 主結果

**定理 5.1** (K. [7]). 平坦曲面  $(R, \omega)$  と二つの有限 Jenkins-Strebel 方向  $(\theta_1, \theta_2)$  の組は同一視の下で  $\Theta = (\theta_1, \theta_2) \in (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})^2$  with  $\theta_1 \neq \theta_2$ ,  $k > 0$ ,  $\mathcal{O}$  : extended origami からなる対  $P(R, \omega, (\theta_1, \theta_2)) = (\Theta, k, \mathcal{O})$  と一対一対応する。

(注 : 平坦曲面の同一視は微分  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  のアフィン変形で定義する。 extended origami の同一視はモジュライ比と対称性を保つ  $\hat{\Lambda}$  の並べ替えで定義する.)

向きに対する  $PSL(2, \mathbb{R})$  の作用は自由であり, ある行列を微分を持つようなアフィン写像の存在は特定の 2 方向の分解の比較によって特徴付けられる. したがって,

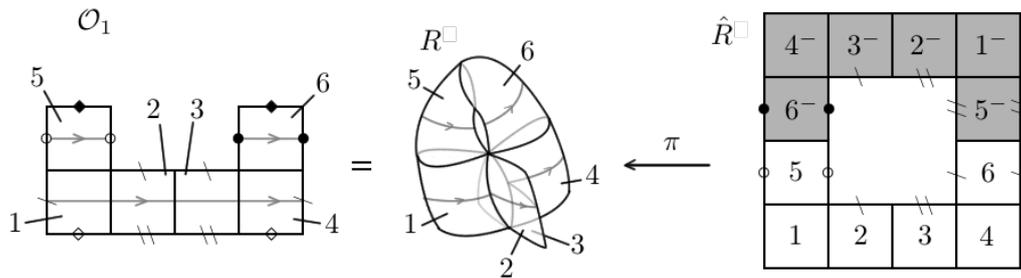
$$A \in \Gamma(R, \omega) \Leftrightarrow \text{‘terminal decomposition’ } P(R, \omega, (A\theta_1, A\theta_2)) \text{ が存在}_1 \text{ して}$$

$$\text{‘initial decomposition’ の変形 } A \cdot P(R, \omega, (\theta_1, \theta_2)) \text{ と一致}_2$$

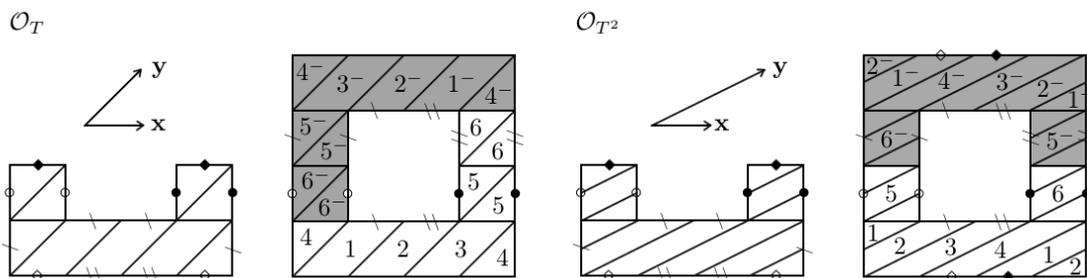
**定理 5.2** (K. [7]). 平坦曲面  $(R, \omega)$  が二つの有限 Jenkins-Strebel 方向  $\theta_1, \theta_2$  をもつとする. このとき  $A \in PSL(2, \mathbb{R})$  が  $\Gamma(R, \omega)$  に属するためには,  $A\theta_1, A\theta_2$  が再び有限 J-S 方向<sub>1</sub> であって  $A \cdot P(R, \omega, (\theta_1, \theta_2)) = P(R, \omega, (A\theta_1, A\theta_2))_2$  であることが必要かつ十分である.

本質的には  $(\theta_1, \theta_2), (A\theta_1, A\theta_2)$  への分解が与える extended origami が同型かをもって Veech 群に属するかを判定できる.

**例 5.3.** 図のような non oriented origami を考える. (辺の記号は貼り合わせの対応を表し, 記号がない辺はすべて向かい合う辺を対応づけているものとする. 頂点はすべて標点として考える.)  
貼り合わせて得られる曲面  $R$  は  $(1, 6)$  型のリーマン面である.



Jenkins-Strebel 方向  $0, \frac{\pi}{2}$  による分解は上図右のような二重被覆面  $\hat{R}$  を与える origami に対応する.  $\mathbf{x}_1 = (1234)(5)(6), \mathbf{y}_1 = (156^-4^-)(23^-)$  である.



行列  $\bar{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z})$  に対応する方向の分解は  $\mathbf{x}_T = (1234)(5)(6), \mathbf{y}_T = (12^-3564^-)$  であり,  $\bar{T} \notin \Gamma(R, \omega)$  である. 一方, 行列  $\bar{T}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z})$  に対応する方向の分解は  $\mathbf{x}_{T^2} = (1234)(5)(6), \mathbf{y}_{T^2} = (156^-4^-)(23^-)$  であり,  $\bar{T}^2 \in \Gamma(R, \omega)$  であることがわかる.

## 参考文献

- [1] L. V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966.
- [2] C. J. Earle, F. P. Gardiner, *Geometric isomorphisms between infinite dimensional Teichmüller spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **348** (1996), 1163–1190.
- [3] C. J. Earle, F. P. Gardiner, *Teichmüller Disks and Veech's  $\mathcal{F}$ -Structures*, Contemp. Math. **201** (1997), 165–189.
- [4] F. P. Gardiner, N. Lakic, *Quasiconformal Teichmüller Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [5] F. Herrlich, G. Schmithüsen, *Dessins d'enfants and origami curves*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., **13** (2009), 767–809.
- [6] Y. Iwayoshi, M. Taniguchi, *An Introduction to Teichmüller Space*, Springer-Verlag, Tokyo (1992).
- [7] S. Kumagai, *Veech groups and extended origamis*, arXiv:1908.09226.
- [8] M. Möller, *Teichmüller curves, Galois actions and  $\widehat{GT}$ -relations*, Math. Nachr. **278** (2005), no.9, 1061–1077.
- [9] S. Nag, *The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces*, John Wiley and Sons, 1988.
- [10] G. Schmithüsen, *An algorithm for finding the Veech group of an origami*, Experiment. Math. **13** (2004), no. 4, 459–472.
- [11] Y. Shinomiya, *Veech groups of flat structures on Riemann surfaces*, Contemp. Math. **575** (2012), 343–362.
- [12] W. Veech, *Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards*, Invent. Math. **97** (1989), no.4, 553–584.