

弾性体の運動を記述する 1 次元領域上の 数理モデルの解析 *

日本女子大学大学院 理学研究科 数理・物性構造科学専攻
小杉千春 (Chiharu KOSUGI)

概要

輪ゴムのような弾性体を 2 次元平面内の閉曲線とみなし, その伸縮運動を記述する数理モデルについて考察する. これまで, 常微分方程式系を用いた数理モデルを導出し, その解の存在と一意性を示すとともに, 数値解の存在とその収束も証明することができた. 本講演では, 数値計算結果をもとにモデルに対する問題点を指摘する予定である. また, 関連する偏微分方程式に対する初期値境界値問題の解の存在も示す.

1 問題設定

ここでは, 自然長が 1 である輪ゴムのような弾性体を平面上の閉曲線とみなし, その伸縮運動について考える. まず, 図 1 のように各 $x \in [0, 1]$ の点が時刻 t で $u(t, x) \in \mathbb{R}^2$ に移るとする. ここで, 弾性体の線密度を ρ , 歪みを ε とし, $T > 0$ に対して, 領域 $Q(T) := (0, T) \times (0, 1)$ 上の関数 u が, 次の Beam 型方程式に対する初期値境界値問題 P を満たすものとする.

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left(f(\varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0, \quad \varepsilon = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| - 1 \text{ on } Q(T), \\ \frac{\partial^i}{\partial x^i} u(t, 0) &= \frac{\partial^i}{\partial x^i} u(t, 1) \text{ for } 0 \leq t \leq T \text{ and } i = 1, 2, 3, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = v_0(x) \text{ for } 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

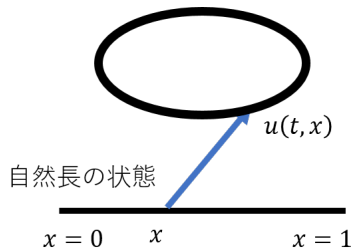


図 1 領域

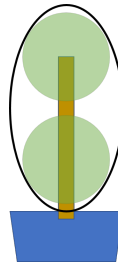


図 2 形状記憶合金

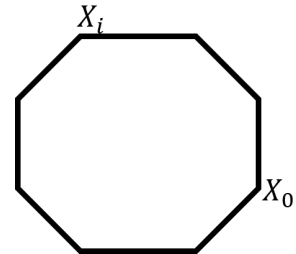


図 3 ODE モデル

* 本研究は愛木豊彦教授 (日本女子大学・理学部) との共同研究に基づくものである.

ここで, γ は正定数, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ はリプシッツ連続, u_0 は初期位置, v_0 は初速度を表す. 以下, $H := L^2(0, 1)^2$, $V := \{z \in W^{2,2}(0, 1)^2 | z(0) = z(1), z_x(0) = z_x(1)\}$ とする. この問題 P の弱解を次のように定義する.

問題 P の弱解の定義 以下を満たすとき, u を P の弱解という.

$u \in W^{1,\infty}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V)$, $u(0) = u_0$, and

$$-\rho \int_{Q(T)} u_t \cdot \eta_t dxdt + \gamma \int_{Q(T)} u_{xx} \cdot \eta_{xx} dxdt + \int_{Q(T)} f(\varepsilon) u_x \eta_x dxdt = \int_0^1 v_0 \cdot \eta(0) dx, \text{ for any}$$

$\eta \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ with $\eta(T) = 0$.

2 研究背景

ここで, 問題 P を考える動機について述べる. 本研究の目的は, 図 2 のように形状記憶合金でできた針金の一部をお湯につけることで生じる回転運動を解析することである. そのために, 極めて簡単な場合を想定して導出した, 以下の常微分方程式系 (ODE) について考察する. 時刻 t に対し, i 番目の質点の位置を $X_i(t) \in \mathbb{R}^2$ で表すことにする (図 3 参照). 各 $i = 0, 1, \dots, N-1$ に対し,

$$m \frac{d^2 X_i}{dt^2} = f_1(\varepsilon_i) \frac{X_{i+1} - X_i}{\ell_i} - f_1(\varepsilon_{i-1}) \frac{X_i - X_{i-1}}{\ell_{i-1}}, f_1(\varepsilon) = \frac{\kappa}{2} \left(\varepsilon + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+\varepsilon)^2} \right), \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\ell_i - \ell_*}{\ell_*}, \ell_i = |X_{i+1} - X_i|, X_i(0) = X_{0i}, \frac{d}{dt} X_i(0) = V_{0i}, X_N = X_0, X_{N-1} = X_{-1}.$$

ここで, m は各質点の質量, κ は弾性係数, ℓ_* は各区間の自然長を表している. この問題において以下のエネルギーが保存される.

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \frac{m}{2} |V_i|^2 + \ell_* \hat{f}_1(\varepsilon_i) \right\}, \quad \text{ただし, } \hat{f}_1 \text{ は } f_1 \text{ の原始関数である.}$$

まず, (ODE) について Euler 法を用いて数値計算を実行したところ, 上のエネルギーが保存されていないことが判明した. そこで, この問題に対し [3] を参考に, 上のエネルギーが保存されるような次の構造保存スキーム (D-ODE) を導出し, 数値解を得ることができた. ただし, 正の整数 K に対し, $\Delta t = T/K$ とし, $X_i^{(n)}, V_i^{(n)}, \varepsilon_i^{(n)}$ は既知であり, $X_i^{(n+1)}, V_i^{(n+1)}, \varepsilon_i^{(n+1)}$ は未知である (数値計算結果については後で述べる).

$$\begin{aligned} & m \frac{V_i^{(n+1)} - V_i^{(n)}}{\Delta t} \\ &= -\frac{\kappa}{4} \left(\varepsilon_{i-1}^{(n+1)} + \varepsilon_{i-1}^{(n)} + 1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon_{i-1}^{(n+1)})(1 + \varepsilon_{i-1}^{(n)})} \right) \frac{X_i^{(n+1)} - X_{i-1}^{(n+1)} + X_i^{(n)} - X_{i-1}^{(n)}}{|X_i^{(n+1)} - X_{i-1}^{(n+1)}| + |X_i^{(n)} - X_{i-1}^{(n)}|} \\ &+ \frac{\kappa}{4} \left(\varepsilon_i^{(n+1)} + \varepsilon_i^{(n)} + 1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon_i^{(n+1)})(1 + \varepsilon_i^{(n)})} \right) \frac{X_{i+1}^{(n+1)} - X_i^{(n+1)} + X_{i+1}^{(n)} - X_i^{(n)}}{|X_{i+1}^{(n+1)} - X_i^{(n+1)}| + |X_{i+1}^{(n)} - X_i^{(n)}|}, \\ & \frac{X_i^{(n+1)} - X_i^{(n)}}{\Delta t} = \frac{V_i^{(n+1)} + V_i^{(n)}}{2}. \end{aligned}$$

注意 1. 問題 P は (ODE) において, $N \rightarrow \infty$ とし, 4 階微分の項 γu_{xxxx} を付加し, f_1 から特異性を除去するように近似したものである.

注意 2. 構造保存スキームの構成は一意的でない. つまり, (D-ODE) 以外にも (ODE) に対するエネルギーが保存される数値スキームは存在し得る.

3 主定理

定理 1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ がリプシッツ連続かつ単調増加で, $f(0) = 0$ を満たし, $u_0 \in V, v_0 \in H$ ならば, 問題 P は弱解をもつ.

注意 3. 形式的に方程式の第 3 項を計算すると $f'(\varepsilon)\varepsilon_x u_x + f(\varepsilon)u_{xx}$ となり, これはリプシッツ連続ではないため, 一意性を通常の方法で示すことができない.

注意 4. 問題 P にあるような Beam 型方程式に対し, 解 $u(t)$ の定義域と値域が $\mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ を仮定し, 減衰項付きの場合, [1] で強解が考察されている.

(ODE) に関する結果は以下の通りである.

定理 2.

- (1) $X_{0i} \neq X_{0j} (i \neq j)$, $V_{0i} \in \mathbb{R}^2$ ならば, (ODE) は一意解 $X \in C([0, T]; \mathbb{R}^{2N})$ をもつ.
- (2) 十分大きい K に対し, つまり, 十分小さい Δt に対し, (D-ODE) は各 $n = 0, 1, \dots, N-1$ について, 一意解 $(X_i^{(n+1)}, V_i^{(n+1)}) \in \mathbb{R}^4$ をもつ.
- (3) (D-ODE) の解 $(X_i^{(n+1)}, V_i^{(n+1)})$ を折れ線で繋いだ関数を $X_K: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ とすると, ある定数 $C > 0$ に対し,

$$|X(t) - X_K(t)| \leq C|\Delta t| \text{ for } 0 \leq t \leq T \text{ and large } K. \quad (3.1)$$

4 証明の方針

定理 1 について

(Step 1) $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ を, V の完全正規直交系を H で正規化したものとし, V_n を $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ で生成される閉線形部分空間とする. 次に, 以下を満たす u_0 と v_0 の近似列 $\{u_{0n}\}, \{v_{0n}\}$ をとる.

$$u_{0n} \in V_n, v_{0n} \in V_n (n = 1, 2, \dots), \quad u_{0n} \rightarrow u_0 \text{ in } V, v_{0n} \rightarrow v_0 \text{ in } H.$$

これを用いて, 以下の P の近似問題 P_n を考える.

Find $u_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)}(t)\varphi_k(t)$ satisfying

$$\int_0^1 u_{ntt}\varphi_j dx + \gamma \int_0^1 u_{nxx}\varphi_{jxx} dx + \int_0^1 f(\varepsilon_n)u_{nx}\varphi_{jx} dx = 0 \quad \text{on } [0, T] \text{ and } \forall j = 1, 2, \dots, n,$$

$$u_n(0) = u_{0n}, u_{nt}(0) = v_{0n}, \varepsilon_n = |u_{nx}| - 1.$$

各 n に対し, P_n の解の存在を示すために, 次のようにおく.

$$\begin{aligned} u_{0n} &= \sum_{k=1}^n a_{0k}^{(n)} \varphi_k, v_{0n} = \sum_{k=1}^n b_{0k}^{(n)} \varphi_k, \\ a_0^n &= (a_{01}^{(n)}, a_{02}^{(n)}, \dots, a_{0n}^{(n)}) \in \mathbb{R}^{2n}, b_0^n = (b_{01}^{(n)}, b_{02}^{(n)}, \dots, b_{0n}^{(n)}) \in \mathbb{R}^{2n}, \\ F &= (F_1, F_2, \dots, F_n), G = (G_1, G_2, \dots, G_n), \\ F_j(a^{(n)}) &= \rho \sum_{k=1}^n a_k^{(n)}(t) \int_0^1 \varphi_{kxx} \cdot \varphi_{jxx} dx, \\ G_j(a^{(n)}) &= \int_0^1 f(|\sum_{k=1}^n a_k^{(n)}(t) \varphi_{kx}| - 1) (\sum_{k=1}^n a_k^{(n)}(t) \varphi_{kx} \cdot \varphi_{jx}) dx \text{ for } n = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

これらの記号を用いて, 次の常微分方程式 I_n を考える.

Find $a^{(n)} = (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}) \in C^2([0, T])^{2n}$ satisfying

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 a^{(n)}}{dt^2} &= -F(a^{(n)}) - G(a^{(n)}), \\ a^{(n)}(0) &= a_0^{(n)}, \frac{da^{(n)}}{dt}(0) = b_0^{(n)}. \end{aligned}$$

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, Banach の不動点定理を用いると, I_n の解の存在と一意性を示すことができる.
つまり, 近似問題 P_n は一意解をもつ.

(Step 2) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, P_n の解 u_n は, 以下の保存量をもつ.

$$\frac{\rho}{2} \int_0^1 u_{nt}^2(t) dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^1 u_{nxx}^2(t) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \hat{g}(u_{nx}^2(t)) dx \text{ (ただし, } \hat{g}: f \text{ の不定積分).}$$

これと f の仮定を用いると, 次の一様評価が得られる.

$$\exists C > 0 \quad \text{s.t.} \quad |u_{nxx}(t)|_H \leq C, \quad |u_{nt}(t)|_H \leq C, \quad |u_{nx}(t)|_H \leq C \quad \text{for } \forall t \in [0, T], \forall n \in \mathbb{N}.$$

(Step 3) 上の一様評価と Aubin のコンパクト定理より以下が得られる.

$\exists \{n_j\} \subset \{n\}, \exists u \in L^2(0, T; X) \cap W^{1,2}(0, T; H)$ s.t.

$$u_{n_j} \rightarrow u \text{ weakly in } L^2(0, T; V), \text{ in } L^2(0, T; X), u_{n_{j_t}} \rightarrow u_t \text{ weakly in } L^2(0, T; H) \text{ as } j \rightarrow \infty,$$

ただし, $X = \{z \in H | z \in W^{1,2}(0, 1), z(0) = z(1)\}$.

以上の収束より, u は弱解の定義を満たす.

定理 2 について

はじめに, 以下のように記号を設定する.

記号 $W := \{z \in \mathbb{R}^{4N} | \delta \leq |X_i - X_{i-1}| \leq M', |V_i - V_{i-1}| \leq M (i = 0, 1, \dots, N-1)\}$,

$$\begin{aligned} V_i^{(n+1)} &= -\frac{\kappa \Delta t}{4m} \left(\varepsilon_{i-1}^{(n+1)} + \varepsilon_{i-1}^{(n)} + 1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon_{i-1}^{(n+1)})(1 + \varepsilon_{i-1}^{(n)})} \right) \frac{X_i^{(n+1)} - X_{i-1}^{(n+1)} + X_i^{(n)} - X_{i-1}^{(n)}}{|X_i^{(n+1)} - X_{i-1}^{(n+1)}| + |X_i^{(n)} - X_{i-1}^{(n)}|} \\ &\quad + \frac{\kappa}{4} \left(\varepsilon_i^{(n+1)} + \varepsilon_i^{(n)} + 1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon_i^{(n+1)})(1 + \varepsilon_i^{(n)})} \right) \frac{X_{i+1}^{(n+1)} - X_i^{(n+1)} + X_{i+1}^{(n)} - X_i^{(n)}}{|X_{i+1}^{(n+1)} - X_i^{(n+1)}| + |X_{i+1}^{(n)} - X_i^{(n)}|} + V_i^{(n)} \\ &=: g_i^{(K)}(X^{(n+1)}, X^{(n)}, V^{(n)}), \\ X_i^{(n+1)} &= \Delta t \frac{V_i^{(n+1)} + V_i^{(n)}}{2} + X_i^{(n)} =: f_i^{(K)}(V^{(n+1)}, V^{(n)}, X^{(n)}). \end{aligned}$$

また、与えられた $Z^{(n)} = (X^{(n)}, V^{(n)}) \in \mathbb{R}^{4N}$ に対し、 $F_n^{(K)} : \mathbb{R}^{4N} \rightarrow \mathbb{R}^{4N} (n = 0, 1, \dots, K-1)$ を次のように定める。

$$\begin{aligned} F_n^{(K)}(Z) &= (f_1^{(K)}(V, V^{(n)}, X^{(n)}), f_2^{(K)}(V, V^{(n)}, X^{(n)}), \dots, f_N^{(K)}(V, V^{(n)}, X^{(n)}), \\ &\quad g_1^{(K)}(X, X^{(n)}, V^{(n)}), g_2^{(K)}(X, X^{(n)}, V^{(n)}), \dots, g_N^{(K)}(X, X^{(n)}, V^{(n)})) \text{ for } Z = (X, V) \in \mathbb{R}^{4N}. \end{aligned}$$

定理 2 の証明で、次の補題を用いる。

補題.

(1) 以下を満たす $K_1 \in \mathbb{N}$ が存在する:

$$K \geq K_1 \text{ ならば } F_n^{(K)} : W \rightarrow W \text{ となる } \delta > 0, M > 0, M' > 0 \text{ が存在する.}$$

(2) 以下を満たす $K_2 \in \mathbb{N}$ が存在する:

$$K \geq K_2 \text{ ならば } Z = F_n^K(Z) \text{ となる } Z \in W \text{ が唯一つ存在する.}$$

(定理 2 の証明の方針)

(1) Banach の不動点定理を用いる。具体的には、

$$m \frac{d^2 X_i}{dt^2} = f_1(\varepsilon_i) \frac{X_{i+1} - X_i}{\ell_i} - f_1(\varepsilon_{i-1}) \frac{X_i - X_{i-1}}{\ell_{i-1}}, \frac{dX_i}{dt} = V_i, X_i(0) = X_{0i}, V_i(0) = V_{0i},$$

から得られる積分方程式を用いて、

$$\begin{aligned} f_i(Z)(t) &= \int_0^{t_1} V_i(t) dt + X_{0i}, \\ g_i(Z)(t) &= \frac{1}{m} \left(\int_0^{t_1} f_1(\varepsilon_i) \frac{X_{i+1}(t) - X_i(t)}{\ell_i} - f_1(\varepsilon_{i-1}) \frac{X_i(t) - X_{i-1}(t)}{\ell_{i-1}} dt \right) + V_{0i}, \end{aligned}$$

とし、 $F : C([0, T])^{4N} \rightarrow C([0, T])^{4N}$ を次のように定める。

$$F(Z) = (f_1(Z), \dots, f_N(Z), g_1(Z), \dots, g_N(Z)) \text{ for } Z = (X, V) \in C([0, T])^{4N}.$$

このとき、 $\delta > 0, M > 0, M' > 0$ に対し、

$$W_0 := \{Z \in C([0, T])^{4N} | \delta \leq |X_i(t) - X_{i-1}(t)| \leq M', |V_i(t) - V_{i-1}(t)| \leq M (\forall t \in [0, T])\} \text{ とし,}$$

ある $\delta > 0, M > 0, M' > 0$ に対し, $F : W_0 \rightarrow W_0$ が縮小写像となることを示せば良い.

(2) 補題から容易に示すことができる.

(3) 十分大きい K に対し, Gronwall の補題を用いて, (3.1) が成り立つことを示す. よって $X_K \rightarrow X$ in $C([0, T]; \mathbb{R}^{2N})$ ($K \rightarrow \infty$), となる.

5 数値計算結果

最後に, 2 節で述べた数値計算結果とそれに対する考察から生じた数理モデルの問題点及び改善点について述べる. まず, (ODE) は対称な初期値を選べば, 1 次元常微分方程式に書き換えられることを示す.

対称な場合 A を角度 $\theta = \frac{2\pi}{N}$ の回転行列とし, $i = 0, 1, \dots, N-1$ に対し,

$$X_{0i} = A^i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_{0i} = 0, \quad (5.1)$$

とすると, (ODE) の解 X_i は, $X_i(t) = A^i R(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, と表される. ただし, R は次の 1 次元常微分方程式の初期値問題の解である.

$$m \frac{d}{dt^2} R(t) = -2f(\varepsilon) \sin \frac{\theta}{2}, \varepsilon = \frac{2R \sin \frac{\theta}{2} - l_*}{l_*}, R(0) = 1, R'(0) = 0. \quad (5.2)$$

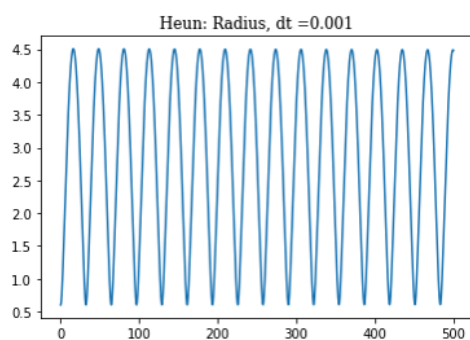


図 4 対称な場合

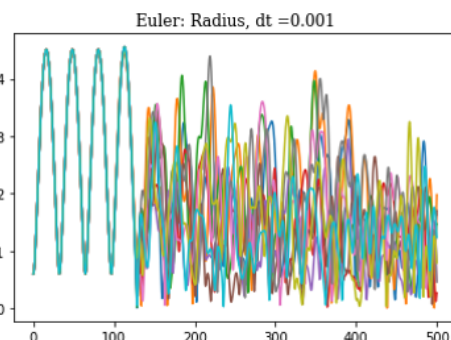


図 5 Euler 法

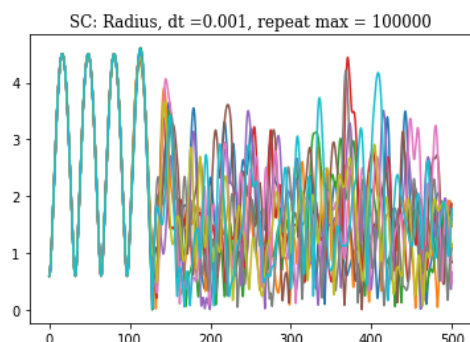


図 6 SPNM 法

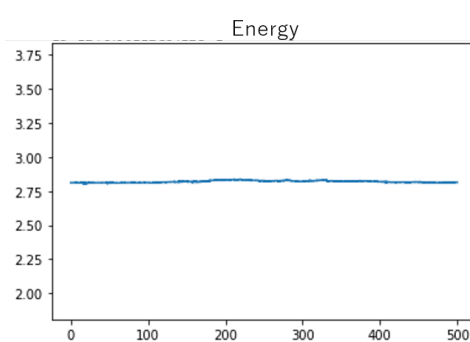


図 7 保存量

ここで、図 4 の縦軸は (5.2) の解 R 、横軸は時間を表している。図 5, 図 6 の縦軸はそれぞれ (5.1) を満たす初期値に対し、Euler 法、構造保存数値解法 (SPNM 法) を用いて得られた (2.1) の数値解 X_i から定まる $R_i = |X_i|$ を表している。図 7 は、SPNM 法を用いた際の保存量の時間経過を表している。

考察

図 4～図 7 をもとに、(ODE) に対する数値計算の問題点について述べる。

まず、図 4 から分かるように、(5.2) の数値解は挙動が安定している。一方、2 節で述べたように、Euler 法を用いた場合は、時間の経過とともに (5.2) の数値解との差が大きくなっていくことが図 5 から分かる。

そこで、2 節で構成した、理論的には保存量が保たれることが保証されている数値スキーム (D-ODE) を用いて数値計算を行った。ここで、図 7 から分かるように、保存量がほぼ一定で保たれているのに対し、図 6 から、解の挙動は時間の経過とともに Euler 法の場合とほぼ変わらないという結果になった。

モデルの問題点

構造保存数値解法は、保存系のもつ解の大域的な制約 (本研究においてはエネルギー保存性) が、数値解においても再現され、解空間が数値誤差によって不自然に拡大縮小するようなことを防ぐことができる数値解法と考えられている。しかし、考察から分かるように、本研究では、この構造保存数値解法の利点を十分に活かすことができなかったと考えている。

モデルの改善点

以上の考察より、数値モデルの改善点として次のことが挙げられる。

- 数値スキームの構成を見直す。
- 応力 $f(\varepsilon)$ の定義を再検討する。

1 つ目の改善点については注意 2. で述べたように、(ODE) に対する構造保存スキームは一意的でないため、(D-ODE) 以外のより良い構造保存スキームが存在し得る。また、SPNM 法以外の方法も検討したい。

(ODE) の最大の特徴は、応力 $f(\varepsilon)$ の定義である。本稿では述べなかったが、実は応力の定義と構造保存スキームの構成は無関係ではない。そこで、2 つ目の改善点として、応力の見直しを挙げる。

参考文献

- [1] H. Takeda, S. Yoshikawa, On the initial value problem of the semilinear beam equation with weak damping I: Smoothing effect. J. Math. Anal. Appl. 401 (2013), 244–258.
- [2] S. Yoshikawa, An error estimate for structure-preserving finite difference scheme for the Falk model system of shape memory alloys. IMA J. Numer. Anal. 37 (2017), 477–504.
- [3] Daisuke Furihata, Takayasu Matsuo, Discrete variational derivative method: A structure-preserving numerical method for partial differential equations, Chapman and Hall CRC, 2010.