

逆半群, エタール亜群, C*環の商について

慶應義塾大学理工学研究科/理化学研究所 AIP 数理科学チーム
紅村 冬大 (FUYUTA KOMURA)

ABSTRACT. 逆半群 (inverse semigroup), エタール亜群 (étale groupoid), C*環は密接な関係にある. ここでは, それぞれにおける「商」の概念がどのように結びつくかを解説する.

0. INTRODUCTION

逆半群が与えられると, 普遍亜群と呼ばれるエタール亜群が構成される [6]. また, エタール亜群からは亜群 C*環と呼ばれる C*環が構成される [9]. これらの関係性を調べることは多くの研究者によって行われている. 本稿では, 逆半群, エタール亜群, C*環の関係性を商の視点から考察する. 具体的には, 逆半群がエタール亜群の商を誘導すること (Theorem 3.1.2) を主定理として紹介する. この主定理の応用として, 逆半群のクリフォード化やアーベル化をエタール亜群の視点で捉える. また, 自由逆半群から得られる C*環の性質をエタール亜群を用いて調べる.

Section 1 では基本的な定義や性質を述べる. Section 2 では, 逆半群から得られるエタール亜群や, エタール亜群から得られる亜群 C*環について紹介する. Section 3 では, 逆半群, エタール亜群, 亜群 C*環の商の関係性について述べ, 具体例でどのような現象が起きているか確認する.

1. 準備

1.1. **逆半群.** ここでは, 逆半群の定義と性質を述べる. 詳しくは [5] や [7], [6] などの教科書を参照せよ.

S を半群とする. $s \in S$ の一般化逆元とは, $sts = s, tst = t$ を満たすような $t \in S$ のことである. 任意の $s \in S$ に対し一般化逆元が一意に存在するような半群を逆半群と呼ぶ. 以後, S を逆半群とする. $s \in S$ の一般化逆元を s^* と表す. $E(S)$ を S の idempotent からなる集合とする;

$$E(S) = \{e \in S \mid e^2 = e\}.$$

$E(S)$ は可換な部分半群になることが知られている.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, KEIO UNIVERSITY, 3-14-1 HIYOSHI, KOHOKU-KU, YOKOHAMA, 223-8522, JAPAN

MATHEMATICAL SCIENCE TEAM CENTER FOR ADVANCED INTELLIGENCE PROJECT (AIP) RIKEN

PHONE: +81-45-566-1641+42706

FAX: +81-45-566-1642

E-mail address: fuyuta.k@keio.jp.

Example 1.1.1. X を集合とする. $I(X)$ を, X の部分集合から部分集合への全単射全体からなる集合とする;

$$I(X) := \{f: U \rightarrow V \mid U, V \subset X, f \text{ は全単射}\}.$$

$f \in I(X)$ の定義域, 値域をそれぞれ $\text{dom}(f)$, $\text{ran}(f)$ によって表す. $f, g \in I(X)$ の積を $f \circ g|_{g^{-1}(\text{ran}(f))}$ と定めることによって, $I(X)$ は逆半群になる. $E(I(X))$ は X のある部分集合上の恒等写像からなる集合となる.

X の構造に応じて, $I(X)$ の元には適切な条件が課される. 例えば, X が位相空間の時は $I(X)$ は X の開集合から開集合への同相写像全体となる.

任意の逆半群が $I(X)$ の部分半群として実現できることが Wagner-Preston の定理として知られている. これは群論におけるケーリーの定理の類似物である.

S を逆半群とする. S 上の同値関係 $\nu \subset S \times S$ が congruence であるとは, 任意の $a, s, t \in S$ に対し $(s, t) \in \nu$ ならば $(as, at), (sa, ta) \in \nu$ が成り立つこととする. ν が congruence であるとき, 商写像 $S \rightarrow S/\nu$ が準同型写像になるような逆半群の構造が S/ν に定まる.

1.2. エタール亜群. ここではエタール亜群の定義と性質を述べる. 詳しくは [9] や [10], [6] などのテキストを参照せよ.

亜群とは全ての射が可逆な小圏である. 本稿では次のような記号を用いる.

Definition 1.2.1. 亜群 G とは

- unit space と呼ばれる部分集合 $G^{(0)} \subset G$,
- domain map と range map $d, r: G \rightarrow G^{(0)}$,
- $G^{(2)} \subset G \times G$ 上で定義されている積

$$G^{(2)} := \{(\alpha, \beta) \in G \times G \mid d(\alpha) = r(\beta)\} \ni (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta \in G$$

で構成され, これらは以下を満たす;

- (1) 任意の $x \in G^{(0)}$ に対し, $d(x) = r(x) = x$ が成り立つ,
- (2) 任意の $(\alpha, \beta) \in G^{(2)}$ に対し, $d(\alpha)\beta = \beta$ と $\alpha r(\beta) = \alpha$ が成り立つ,
- (3) 任意の $(\alpha, \beta) \in G^{(2)}$ に対し, $d(\alpha\beta) = d(\beta)$ と $r(\alpha\beta) = r(\alpha)$ が成り立つ,
- (4) 任意の $(\alpha, \beta), (\beta, \gamma) \in G^{(2)}$ に対し, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ が成り立つ,
- (5) 任意の $\gamma \in G$ に対し, ある $\gamma' \in G$ が存在して $(\gamma', \gamma), (\gamma, \gamma') \in G^{(2)}$, $d(\gamma) = \gamma'\gamma$ と $r(\gamma) = \gamma\gamma'$ が成り立つ.

上の 5 における γ' は γ によって一意に決定されるので, γ' を γ^{-1} と表す.

Example 1.2.2. 群は, unit space $G^{(0)}$ が 1 点集合となる亜群 G と同一視することができる. 集合は, $G = G^{(0)}$ となる亜群 G と同一視することができる.

Example 1.2.3. I を集合とし, 各 $i \in I$ に対し群 Γ_i が与えられているとする. この時, 集合としての直和 $\prod_{i \in I} \Gamma_i$ には, I を unit space に持ち $d = r$ となるような亜群の構造が自然に入る.

群に対して位相群という概念を考えるように, 亜群に対しても位相亜群という概念が定義される. 位相亜群とは, 亜群の構造と相性の良い位相を備えた

亜群のことである. $d: G \rightarrow G^{(0)}$ が局所同相写像になる時, G をエタール亜群と呼ぶ. エタール亜群は, ある種の離散性を備えた位相亜群である.

Proposition 1.2.4. G をエタール亜群, $x \in G^{(0)}$ とする. このとき $G_{\{x\}} := d^{-1}(\{x\})$, $G^{\{x\}} := r^{-1}(\{x\})$ は離散集合となる.

本稿では, 多くの場合 $G^{(0)}$ が局所コンパクトハウスドルフ空間であることを仮定する. 一方で, G がハウスドルフ空間であることは仮定しない. 亜群 C^* 環や逆半群から得られるエタール亜群を考える際は, これらの仮定が自然である.

エタール亜群 G が与えられた状況を考える. 与えられたエタール亜群 G から新たなエタール亜群を構成する方法は色々あるが, 本稿では

- (1) エタール亜群を不変集合に制限する.
- (2) 正規部分亜群による商をとる.

という操作を考える. そのために, 不変集合や正規部分亜群を定義する.

Definition 1.2.5. $F \subset G^{(0)}$ が不変集合であるとは, 任意の $\alpha \in G^{(0)}$ に対し $d(\alpha) \in F$ ならば $r(\alpha) \in F$ が成り立つことである. $x \in G^{(0)}$ が不動点であるとは, $\{x\}$ が不変集合であることと定義する. 不変集合 F に対し, G の F への制限 $G_F := d^{-1}(F)$ は G の部分亜群となる. 特に, G の不動点全体からなる集合への制限を G_{fix} と表す.

Definition 1.2.6. 部分亜群 $H \subset G$ が正規部分亜群であるとは,

$$G^{(0)} \subset H \subset \text{Iso}(G)$$

を満たし, さらに $\alpha H \alpha^{-1} \subset H$ が任意の $\alpha \in G$ で成り立つこととする. ここで, $\text{Iso}(G)$ は $d(\alpha) = r(\alpha)$ となるような $\alpha \in G$ 全体からなる集合である.

Proposition 1.2.7 ([4]). G を亜群, $H \subset G$ を正規部分亜群とする. $\alpha, \beta \in G$ に対し, $d(\alpha) = d(\beta)$ かつ $\alpha\beta^{-1} \in H$ である時 $\alpha \sim \beta$ と書く. この時 $\sim$ は G の同値関係となる. また, $G/H := G/\sim$ には亜群の構造が定まり, 商写像 $G \rightarrow G/H$ が亜群の準同型になる.

Proposition 1.2.8 ([4]). G を亜群, $H \subset G$ を開正規部分亜群とする. このとき G/H もエタール亜群となる. また, G/H がハウスドルフであることと $H \subset G$ が閉であることは同値である.

1.3. C^* 環. ここでは, C^* 環の定義や例を紹介する. 詳しくは [12] などの教科書を参照せよ.

$*$ -代数とは, 積, 対合 (involution) を持つ $\mathbb{C}$ 線形空間のことである. C^* 環とは, ノルムを持つ $*$ -代数 A で, 任意の $a, b \in A$ に対し $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$, $\|a^*a\| = \|a\|^2$ が成り立つもののことである. C^* 環は必ずしも積の単位元を持っている必要はない.

Example 1.3.1. X を局所コンパクトハウスドルフ空間とする. $C_0(X)$ を X 上の無限遠で消える複素数値連続関数からなる集合とする. ここで, 連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ が無限遠で消えるとは任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ がコンパクト集合となることである. X がコンパクトである時, $C_0(X)$ は X 上の連続関数全体からなる集合 $C(X)$ と一致する.

$C_0(X)$ は各点での演算によって $\mathbb{C}$ 代数となり, 各点での複素共役によって対合が定まり $*$ -代数となる. また, $f \in C_0(X)$ のノルムを $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ によって定めると, $C(X)$ は C^* 環となる. Gelfand-Naimark の定理により, 任意の単位的な可換 C^* 環はある $C(X)$ と同型になる.

Example 1.3.2. Hilbert 空間 H に対し, H 上の有界線形作用素全体からなる集合を $B(H)$ とする. $B(H)$ は自然な構造によって C^* 環となる. 任意の C^* 環は, $B(H)$ の部分環として実現できることが Gelfand-Naimark の定理として知られている.

2. 逆半群, エタール亜群, C^* 環の関係

2.1. 逆半群からエタール亜群へ. S を逆半群, X を位相空間とする. S から $I(X)$ への準同型写像 $\alpha: S \ni s \mapsto \alpha_s \in I(X)$ を作用と呼び, $\alpha: S \curvearrowright X$ と表す. 以下では, 作用 $\alpha: S \curvearrowright X$ から構成されるエタール亜群 $S \ltimes_\alpha X$ について説明する.

$\alpha: S \curvearrowright X$ を作用とする.

$$S \ltimes_\alpha X := \{(s, x) \in S \times X \mid x \in \text{dom}(\alpha_s)\} / \sim$$

と集合 $S \ltimes_\alpha X$ を定める. ここで, $(s, x) \sim (t, y)$ であるとは以下の二条件が満たされることと定義した;

- $x = y$ である.
- $se = te$ かつ $x \in \text{dom}(\alpha_e)$ となる $e \in E(S)$ が存在する.

(s, x) の同値類を $[s, x]$ と表す. $S \ltimes_\alpha X$ の unit space を

$$S \ltimes_\alpha X^{(0)} := \{[e, x] \in S \ltimes_\alpha X \mid e \in E(S), x \in \text{dom}(\alpha_e)\}$$

と定義する. $S \ltimes_\alpha X^{(0)}$ は写像

$$S \ltimes_\alpha X^{(0)} \ni [e, x] \mapsto x \in X$$

によって X と同一視される. $d([s, x]) = x$, $r([s, x]) = \alpha_s(x)$ によって domain map, range map が定義される. $[s, y], [t, x] \in S \ltimes_\alpha X$ の積は $y = \alpha_t(x)$ である時に定義され, それは $[st, x]$ である. 最後に, $[s, x]$ の逆元は $[s^*, \alpha_s(x)]$ となる. 以上の構造によって $S \ltimes_\alpha X$ は亜群となる. また, 開集合 $U \subset \text{dom}(\alpha_s)$ に対し,

$$[s, U] := \{[s, x] \in S \ltimes_\alpha X \mid x \in U\}$$

と定める. $[s, U]$ たちは $S \ltimes_\alpha X$ の開基を成し, この位相によって $S \ltimes_\alpha X$ はエタール亜群となる.

逆半群 S は, idempotent からなる集合 $E(S)$ のスペクトラム $\widehat{E(S)}$ に自然な作用を持つ. この作用から得られるエタール亜群は普遍亜群と呼ばれ, 重要なエタール亜群である. 以下, この作用について説明する.

S を逆半群とする. $\widehat{E(S)}$ を, $E(S)$ から $\{0, 1\}$ への 0 でない準同型全体からなる集合とする. $\widehat{E(S)}$ は $\{0, 1\}^{E(S)}$ の部分集合とみなせるので, $\widehat{E(S)}$ の位相として $\{0, 1\}^{E(S)}$ の相対位相を考える. チコノフの定理などを用いると, $\widehat{E(S)}$ は局所コンパクトハウスドルフ空間となることがわかる.

作用 $\beta: S \curvearrowright \widehat{E(S)}$ を定義する. $s \in S$ に対し,

$$\text{dom}(\beta_s) := \{\xi \in \widehat{E(S)} \mid \xi(s^*s) = 1\}, \text{ran}(\beta_s) := \{\xi \in \widehat{E(S)} \mid \xi(ss^*) = 1\}$$

と定める. $\text{dom}(\beta_s), \text{ran}(\beta_s)$ は $\widehat{E(S)}$ のコンパクト開集合となる. $\xi \in \text{dom}(\beta_s)$ に対し $\beta_s(\xi) \in \text{ran}(\beta_s)$ を $\beta_s(\xi)(e) := \xi(s^*es)$ によって定める. $\beta_s: \text{dom}(\beta_s) \rightarrow \text{ran}(\beta_s)$ は位相同型を与え, $S \ni s \mapsto \beta_s \in I(\widehat{E(S)})$ は作用となる.

Definition 2.1.1. S を逆半群とする. $G_u(S) := S \ltimes_\beta \widehat{E(S)}$ を S の普遍亜群 (universal groupoid) と呼ぶ.

任意の Boolean action $S \curvearrowright X$ に対し, $S \ltimes X$ は $G_u(S)$ に埋め込むことができる. Boolean action やこの普遍性については, [11] や [6] を参照せよ.

2.2. エタール亜群から C*環へ. エタール亜群から得られる C*環 (亜群 C*環) の定義 (の気持ち) を簡単に述べる. ページ数の都合上詳しく述べることはできないので, 詳しくは [10] や [6] を参考せよ. 流れとしては, 然るべき G 上の関数からなる convolution algebra を完備化することで亜群 C*環が構成される. 以下, その流れを簡単に説明する.

G をエタール亜群とし, $G^{(0)}$ が局所コンパクトハウスドルフ空間であると仮定する. 開ハウスドルフ部分空間 $U \subset G$ に対し, U 上のコンパクトサポートを持つ複素数値連続関数全体からなる線形空間を $C_c(U)$ と書く. また, $C_c(U)$ の元を $G \setminus U$ 上で 0 と拡張することで G 上の関数とみなす (G がハウスドルフ性を持たない時, $C_c(U)$ の元は U 上では連続だが G 上で連続とは限らない). $\mathcal{C}(G) := \text{span}_U C_c(U)$ と定義する¹⁾. ただし, U は G の全ての開ハウスドルフ部分空間に渡る. $\mathcal{C}(G)$ は各点での和によって $\mathbb{C}$ ベクトル空間になる. $f, g \in \mathcal{C}(G)$ に対し, $f * g, f^* \in \mathcal{C}(G)$ を以下で定義する;

$$f * g(\gamma) := \sum_{\alpha\beta=\gamma} f(\alpha)g(\beta), f^*(\gamma) := \overline{f(\gamma^{-1})}.$$

これらの構造によって, $\mathcal{C}(G)$ は involution $f \mapsto f^*$ を持つ $\mathbb{C}$ 代数 (*-代数) となる. $\mathcal{C}(G)$ を稠密に含む C*環のうち universal なものを $C^*(G)$ と書き, full 亜群 C*環と呼ぶ. ここで, universality とは「 $\mathcal{C}(G)$ を稠密に含む C*環は $C^*(G)$ の商 C*環となる」ということを意味する. 他に, $\mathcal{C}(G)$ は左正則表現から定まるノルム (被約ノルム) を持つ. 被約ノルムによる完備化を $C_\lambda^*(G)$ と書き被約亜群 C*環と呼ぶ. full 亜群 C*環の universality から全射 $C^*(G) \rightarrow C_\lambda^*(G)$ が定まるが, この全射が同型写像になるかどうかは G の従順性と呼ばれる性質と関係し深い話題である. 詳しくは [1] や [2] を参照せよ.

3. 逆半群, エタール亜群, C*環の商の関係性

3.1. 逆半群の商とエタール亜群の商, 不変集合. ここでは, 逆半群の congruence が普遍亜群の不変集合, 正規部分群を誘導することを解説する.

¹⁾ G がハウスドルフ性を持つ時, $\mathcal{C}(G)$ は $C_c(G)$ と一致する.

S を逆半群, ν を S の congruence, $q: S \rightarrow S/\nu$ を商写像とする. $\hat{q}: \widehat{E(S/\nu)} \rightarrow \widehat{E(S)}$ を

$$\hat{q}: \widehat{E(S/\nu)} \ni \xi \mapsto \xi \circ q \in \widehat{E(S)}$$

によって定める. $\hat{q}$ は像 $F_\nu := \hat{q}(\widehat{E(S/\nu)})$ への同相写像を与える. $F_\nu \subset \widehat{E(S)}$ は $G_u(S)$ の不変閉集合となることも分かる. また, F_ν は恒等写像 1 を含み (unital), $\xi\eta \neq 0$ となるような $\xi, \eta \in F_\nu$ に対し $\xi\eta \in F_\nu$ が成り立つ (multiplicative). ここで, $\xi\eta$ は各点での積によって定義される.

実は, 以下のことが成り立つ.

Proposition 3.1.1 ([3]). $F_\nu \subset \widehat{E(S)}$ は $G_u(S)$ の unital かつ multiplicative な閉不変集合である. 逆に, $G_u(S)$ の unital かつ multiplicative な閉不変集合はこの形で与えられる.

F_ν は「 ν が $E(S)$ をどれくらい割るか」という情報を持っている. 実際, $e, f \in E(S)$ が $(e, f) \in \nu$ であることと任意の $\xi \in F_\nu$ に対し $\xi(e) = \xi(f)$ が成り立つことは同値である.

次に, ν が不変亜群の正規部分亜群を誘導することを解説する. $\ker \nu := q^{-1}(E(S/\nu)) \subset S$ と $\ker \nu \subset S$ を定めると, $\ker \nu$ は S の部分逆半群であり, $s \ker \nu s^* \subset \ker \nu$ が任意の $s \in S$ について成り立つ (つまり, $\ker \nu$ は S の正規部分逆半群である). 自然に $G_u(\ker \nu) \subset G_u(S)$ とみなすことができるが, $\ker \nu$ が部分逆半群であることから $G_u(\ker \nu) \subset G_u(S)$ は部分亜群となる. $G_u(\ker \nu) \subset G_u(S)$ は正規であるとは限らないが, F_ν に制限すると正規となり以下の定理が成り立つ.

Theorem 3.1.2 ([3]). $G_u(\ker \nu)_{F_\nu}$ は $G_u(S)_{F_\nu}$ の開正規部分亜群である. また,

$$\Phi: G_u(S)_{F_\nu} \ni [s, \hat{q}(\xi)] \mapsto [q(s), \xi] \in G_u(S/\nu)$$

によって定まる写像 Φ はエタール亜群としての全射準同型であり,

$$\Phi^{-1}(G_u(S/\nu)^{(0)}) = G_u(\ker \nu)_{F_\nu}$$

を満たす. 特に, エタール亜群の準同型定理により $G_u(S)_{F_\nu}/G_u(\ker \nu)_{F_\nu}$ と $G_u(S/\nu)$ は同型である.

逆半群 T が Clifford であるとは, 任意の $t \in T$ に対し $t^*t = tt^*$ が成り立つことである. 任意の逆半群 S に対し, そのクリフォード化 $S^{\text{Clif}} := S/\nu_{\text{Clif}}$ が存在する. すなわち, S^{Clif} は「任意のクリフォード逆半群 T と準同型 $\varphi: S \rightarrow T$ に対し, $\tilde{\varphi} \circ q = \varphi$ となる準同型 $\tilde{\varphi}: S^{\text{Clif}} \rightarrow T$ が存在する」という普遍性によって特徴付けられる逆半群である (ここで, $q: S \rightarrow S^{\text{Clif}}$ を商写像とした). 同様にして, S のアーベル化 S^{ab} も定義される [8].

Theorem 3.1.2 は, 商逆半群の普遍亜群の計算に役立つ. 例えば, 以下のよう主張が成り立つ.

Corollary 3.1.3 ([3]). 以下の二つの同型が成り立つ;

$$G_u(S^{\text{Clif}}) \simeq G_u(S)_{\text{fix}}, G_u(S^{\text{ab}}) \simeq G_u(S)^{\text{ab}}.$$

ただし, $G_u(S)^{\text{ab}}$ は [4, Definition 3.2.2] で定義されるエタール亜群である.

3.2. 逆半群の商と C*環の商. 逆半群 S に対し, S によって生成される普遍 C*環を $C^*(S)$ と書き, 逆半群 C*環と呼ぶ. また, S の左正則表現を用いることで, 被約逆半群 C*環 $C_\lambda^*(S)$ が定義される. Paterson[6] によって, $C^*(S)$ と $C_\lambda^*(S)$ はそれぞれ $C^*(G_u(S))$ や $C_\lambda^*(G_u(S))$ と同型になることが知られている. ここでは, これまでに得られた $G_u(S)$ に関する事柄を用いて逆半群 C*環の具体例を解析する.

集合 X に対し, $\text{FIS}(X)$ を X が生成する自由逆半群とする. $\text{FIS}(X)$ は X を含み, 「 X から逆半群 T への写像は, $\text{FIS}(X)$ から T への準同型に一意的に延びる」という普遍性によって特徴付けられる (詳しくは [5] を見よ). また, $\text{FCIS}(X)$ を X が生成する自由 Clifford 逆半群とする. $\text{FCIS}(X)$ は $\text{FIS}(X)^{\text{Clif}}$ と自然に同型となる.

Proposition 3.2.1. X を集合とする. また, 集合 A が生成する自由群を $\mathbb{F}(A)$ と表す. この時, 以下の同型が存在する;

$$G_u(\text{FCIS}(X)) \simeq \coprod_{\emptyset \neq A \subset X} \mathbb{F}(A).$$

また, 上の同型により C*環の同型

$$C^*(\text{FCIS}(X)) \simeq \bigoplus_{\emptyset \neq A \subset X} C^*(\mathbb{F}(A)), C_\lambda^*(\text{FCIS}(X)) \simeq \bigoplus_{\emptyset \neq A \subset X} C_\lambda^*(\mathbb{F}(A))$$

が導かれる.

$C^*(S)$ の普遍性から, 逆半群 S から T への準同型は $C^*(S)$ から $C^*(T)$ への準同型を導く (被約逆半群 C*環はこのような普遍性を持っておらず, $C_\lambda^*(S)$ から $C_\lambda^*(T)$ への準同型が導かれるとは限らない. この準同型が導かれるかどうか確かめるには左正則表現から定まるノルムについて計算する必要があり, 一般には難しい問題である). 特に $\text{FIS}(X)$ から $\text{FCIS}(X)$ への自然な全射準同型は, $C^*(\text{FIS}(X))$ から $C^*(\text{FCIS}(X))$ への全射準同型を導く. $|X| \geq 2$ であるとき, $C^*(\text{FCIS}(X))$ は位数 2 の full 群 C*環を直和成分として含むので完全ではない. 特に, $C^*(\text{FIS}(X))$ も完全でないことがわかる. ここでは完全な C*環の全射像が完全になることを用いた. C*環の完全性や上の事実に関しては [2] を参照せよ.

実は, $C_\lambda^*(\text{FIS}(X))$ から $C_\lambda^*(\text{FCIS}(X))$ に全射準同型が延びることがエタール亜群の理論を用いると以下のようにして分かる. $\text{FCIS}(X)$ は $\text{FIS}(X)$ の Clifford 化であるから, Corollary 3.1.3 を用いると $G_u(\text{FCIS}(X)) = G_u(\text{FIS}(X))_{\text{fix}}$ となることがわかる. $C_\lambda^*(G_u(\text{FIS}(X)))$ から $G_u(\text{FIS}(X))_{\text{fix}}$ へは,

$$\mathcal{C}(G_u(\text{FIS}(X))) \ni f \mapsto f|_{G_u(\text{FIS}(X))_{\text{fix}}} \in \mathcal{C}(G_u(\text{FIS}(X))_{\text{fix}})$$

を延長するような全射準同型が存在する²⁾. したがって, $C_\lambda^*(\text{FIS}(X))$ から $C_\lambda^*(\text{FCIS}(X))$ に全射準同型が延びることが分かる. $|X| \geq 2$ であるとき, $C_\lambda^*(\text{FCIS}(X))$ は nuclear ではないので, $C_\lambda^*(\text{FIS}(X))$ も nuclear ではない. 一方, $C_\lambda^*(\text{FCIS}(X))$ は完全である. $C_\lambda^*(\text{FIS}(X))$ が完全であるかどうかは, 著者

²⁾左正則表現の定義に基づいて f と $f|_{G_u(\text{FIS}(X))_{\text{fix}}}$ の被約ノルムを計算することで, この写像が有界であり定義域が全体に延びることが確かめられる.

の知ってる限りでは未知であると考えている. C^* 環の nuclearity に関しては [2] を参照せよ.

Acknowledgement. 本研究は理研の大学院生リサーチ・アソシエイト制度の下での成果です.

REFERENCES

- [1] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault. *Amenable Groupoids*. Monographie de l'Enseignement mathématique. L'Enseignement Mathématique, 2000.
- [2] N. P. Brown and N. Ozawa. *C^* -algebras and Finite-dimensional Approximations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Soc., 2008.
- [3] F. Komura. in preparation.
- [4] F. Komura. Quotients of étale groupoids and the abelianizations of groupoid C^* -algebras. arXiv:1812.07194.
- [5] Mark V Lawson. *Inverse Semigroups*. WORLD SCIENTIFIC, 1998.
- [6] A. Paterson. *Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2012.
- [7] M. Petrich. *Inverse semigroups*. Pure and applied mathematics. Wiley, 1984.
- [8] Brunetto Piochi. Solvability in inverse semigroups. *Semigroup Forum*, 34(1):287–303, Dec 1986.
- [9] J. Renault. *A Groupoid Approach to C^* -Algebras*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1980.
- [10] A. Sims. Hausdorff étale groupoids and their C^* -algebras. arXiv:1710.10897v1, 2017.
- [11] Benjamin Steinberg. A groupoid approach to discrete inverse semigroup algebras. *Advances in Mathematics*, 223(2):689 – 727, 2010.
- [12] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras I*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2001.