

Čech-Dolbeault コホモロジーを用いた無限階擬微分作用素の表象理論

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
小森大地 (Daichi KOMORI)

0 導入

無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{D}_X^{\mathbb{R}}$ は佐藤-河合-柏原 [11] により偏微分方程式の変換論のために導入された解析的な対象であり、一般的によく研究されている自然階の微分方程式だけでなく応用上たびたび見られる分数階の微分方程式などを含む非常に広いクラスである。一方で $\mathcal{D}_X^{\mathbb{R}}$ の厳密な定義は非常に代数的であり、解析的な理解は容易ではない。そこで片岡 [4] と青木 [1],[2] は無限階擬微分作用素に対して表象理論 $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ を展開することでその研究を可能にした。彼らはそれぞれの層の各点での茎が同型であることを、無限階擬微分作用素の層の茎から表象の層の茎への射とその逆の射を構成することで示した。しかし、彼らの表象理論では $\mathcal{D}_X^{\mathbb{R}}$ と $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ の層としての同型が示されていない。彼らは Čech コホモロジーの理論を用いて各点の近傍で定義された作用素に対する核関数表示を得たが、この手法を大域的な場合に適用することは非常に困難であり、別の手法を考える必要がある。

本論文では、無限階擬微分作用素からその表象への射を実現するために本多-伊澤-諏訪 [3] により導入された Čech-Dolbeault コホモロジーの理論を用いた。このコホモロジー論の利点は層係数コホモロジーを無限回微分可能関数を係数とする微分形式の為す層から作られる列により計算できる点である。これにより、1 の分割のような正則関数では扱えない性質を用いることができるようになり、代表元の台を自由にコントロールすることができる。この理論を応用して実際に無限階擬微分作用素から表象への射を具体的に構成し、層としての同型を示した。

1 準備

本論文では原則として柏原-Schapira [8] の Notation に従う。また、その他の Notation は以下の通りである。

X を n 次元複素多様体とする。また、 T_X^*X をゼロ切断とし、 $\mathring{T}^*X = T^*X \setminus T_X^*X$ とする。また、 $(z; \zeta)$ を局所座標系とする。

Definition 1.1. V を $\mathring{T}^*X$ の部分集合とする。 V が $\mathring{T}^*X$ の錐であるとは、 V が次の性質を満たすことを言う。

$$(z; \zeta) \in V \Rightarrow (z; t\zeta) \in V \text{ for any } t \in \mathbb{R}_+.$$

V と V' を T^*X 内の部分集合とする。 V' が通常の位相の意味で V の相対コンパクト集合である

時、 $V' \in V$ と記述する。

Definition 1.2. V を $\mathring{T}^*X$ の錐とする。 $W \subset V$ が無限遠での V 型の無限小楔であるとは、任意の相対コンパクト集合 $K \in V$ に対してある定数 $\delta > 0$ が存在して次が成り立つことである。

$$K_\delta = \{(z; t\zeta) \mid (z; \zeta) \in K, t > \delta\} \subset W.$$

Definition 1.3. V と V' を $V' \subset V$ を満たすような $\mathring{T}^*X$ の錐とする。このとき、 V' が V 内の相対コンパクト錐であるとは、 $\text{Int } V$ に含まれるようなある相対コンパクト集合 K が存在して

$$V' = \{(z; t\zeta) \mid t \in \mathbb{R}_+, (z; \zeta) \in K\}$$

となることをいう。

2 無限階擬微分作用素の Čech-Dolbeault コホモロジーによる表示

ここでは、無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ に対して柏原-Schapira による fiber 公式を紹介し、そのコホモロジー表示に対して Čech-Dolbeault コホモロジー表示を与える。

X を n 次元複素多様体とする。

2.1 無限階擬微分作用素のコホモロジー表示

T^*X 上の無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ は次で与えられる。

$$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} = \mathcal{H}^n(\mu_\Delta(\mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)})). \quad (2.1)$$

ここで、 $\mu_\Delta(\mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)})$ は対角集合 Δ に沿った $\mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)}$ の超局所化である。 $(\mu$ の詳細は [8] を参照。) この時、超局所化に関する柏原-Schapira による次のような fiber 公式が存在する。

Theorem 2.1 ([8], Theorem 4.3.2). V を T^*X の凸開錐とすると、次が成り立つ。

$$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}(V) = \varinjlim_{U, G} H_{G \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)}). \quad (2.2)$$

ここで、 U は $U \cap \Delta = \pi(V)$ を満たす $X \times X$ の開集合を、 G は $C_\Delta(G) \subset V^\circ$ を満たす $X \times X$ の閉集合を動く。

2.2 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ の Čech-Dolbeault コホモロジーによる表示

本多-伊澤-諏訪 [3] による Čech-Dolbeault コホモロジーの理論を用いて前節の Theorem 2.1 で得られたコホモロジー $H_{G \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)})$ に対して具体的な Čech-Dolbeault 表示を与える。

Definition 2.2. 新たな層 $C_{X \times X}^{\infty, (p, q, r)}$ を $X \times X$ 上の C^∞ 関数を係数に持つ $(p+q, r)$ -形式の層とする。つまり、 $X \times X$ の局所座標系 $z = (z_1, z_2)$ と $X \times X$ の開集合 V に対して、 V 上の $(p+q, r)$ -

形式 $f(z_1, z_2) \in C_{X \times X}^{\infty, (p, q, r)}(V)$ は次のように書ける。

$$f(z_1, z_2) = \sum_{|I|=p, |J|=q, |K|=r} f_{IJK}(z_1, z_2) dz_1^I \wedge dz_2^J \wedge d\bar{z}^K.$$

ただし、 $f_{IJK}(z_1, z_2)$ は V の C^∞ 関数。

U, G を Theorem 2.1 の条件を満たすものとし、 $V_0 = U \setminus G, V_1 = G \cap U, V_{01} = V_0 \cap V_1$ とおく。また、 U と $U \setminus G$ の開被覆をそれぞれ $\mathcal{V} = \{V_0, V_1\}, \mathcal{V}' = \{V_0\}$ とおく。すると、本多・伊澤・諏訪 [3] の結果により相対 Čech-Dolbeault 複体 $(C_{X \times X}^{\infty, (p, q, r)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}'), \bar{\partial})$ が次のように得られる。

$$C_{X \times X}^{\infty, (p, q, r)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}') = C_{X \times X}^{\infty, (p, q, r)}(V_1) \oplus C_{X \times X}^{\infty, (p, q, r-1)}(V_{01}).$$

Definition 2.3. 無限階擬微分作用素型の相対 Čech-Dolbeault コホモロジー $H_{\bar{\partial}}^{p, q, r}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ を相対 Čech-Dolbeault 複体 $(C_{X \times X}^{\infty, (p, q, r)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}'), \bar{\partial})$ の r 次コホモロジーで定義する。

この時、次の定理が成り立つ。

Theorem 2.4. 以下の同型が成立する。

$$H_{\bar{\partial}}^{0, n, n}(U, U \setminus G) \simeq H_{G \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0, n)}). \quad (2.3)$$

故に、 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ の凸開錐 V での切断は次のように表せる。

$$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}(V) = \lim_{U, G} H_{G \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0, n)}) = \lim_{U, G} H_{\bar{\partial}}^{0, n, n}(U, U \setminus G).$$

ただし、 U と G は Theorem 2.1 で定義された $X \times X$ の部分集合を動く。

3 無限階擬微分作用素の表象

Čech-Dolbeault コホモロジーの理論は C^∞ 関数を基に展開されているが、一方で片岡・青木による表象理論は正則関数を基に展開されており、Čech-Dolbeault 表示から彼らの導入した表象 $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ へ直接射を構成することができない。そこで、新たな表象のクラス $\mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$ を経由して射を構成する。

3.1 C^∞ 型の表象の為す層 $\mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$

ここでは、新しい表象のクラスとして C^∞ 型の表象を導入する。 V を $\mathring{T}^*X$ の開錐とし、 $z^* = (z; \zeta)$ を T^*X の局所座標系とする。 $\mathring{T}^*X$ 上の二つの錐状層 $\mathfrak{S}^\infty, \mathfrak{N}^\infty$ を定義する。

Definition 3.1. T^*X 上の層 $C_z^\infty \mathcal{O}_\zeta$ を次で定義する。

$$f(z, \zeta) \text{ が } f(z, \zeta) \in C_z^\infty \mathcal{O}_\zeta(V) \text{ である} \Leftrightarrow \text{関数 } f(z, \zeta) \text{ は } V \text{ 上の } C^\infty \text{ 関数であり} \\ \text{変数 } \zeta \text{ に関しては } V \text{ 上の正則関数である。}$$

Definition 3.2. 1. 関数 $f(z, \zeta)$ は次の条件を満たす時、 V 上の C^∞ 型のヌル表象という。

N1. ある V 型の無限小楔 W が存在し、 $f(z, \zeta)$ は W 上の $C_z^\infty \mathcal{O}_\zeta$ 関数である。

N2. 任意の相対コンパクト錐 $V' \underset{\text{cone}}{\subseteq} V$ と任意の多重添字 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対してある V' 型の無限小楔 $W' \subset W$ と定数 $h > 0, C > 0$ が存在して

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial \bar{z}^\beta} f(z, \zeta) \right| \leq C \cdot e^{-h|\zeta|} \quad \text{on } W'.$$

2. 関数 $f(z, \zeta)$ は次の条件を満たす時、 V 上の C^∞ 型の表象という。

S1. ある V 型の無限小楔 W が存在し、 $f(z, \zeta)$ は W 上の $C_z^\infty \mathcal{O}_\zeta$ 関数である。

S2. 任意の相対コンパクト錐 $V' \underset{\text{cone}}{\subseteq} V$ と任意の多重添字 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対してある V 型の無限小楔 $W' \subset W$ が存在して次の条件を満たす:

任意の $h > 0$ に対してある定数 $C > 0$ が存在して

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial \bar{z}^\beta} f(z, \zeta) \right| \leq C \cdot e^{h|\zeta|} \quad \text{on } W'.$$

S3. 任意の $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} f(z, \zeta)$ が V 上のヌル表象である。

3. V 上の C^∞ 型の表象、ヌル表象全体をそれぞれ $\mathfrak{S}^\infty(V), \mathfrak{N}^\infty(V)$ と書く。また、

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{z^*}^\infty &= \varinjlim_{V \ni z^*} \mathfrak{S}^\infty(V), \\ \mathfrak{N}_{z^*}^\infty &= \varinjlim_{V \ni z^*} \mathfrak{N}^\infty(V), \end{aligned}$$

とおく。ただし V は z^* を含む錐状の開近傍を動く。

Remark 3.3. これらの層は $\mathfrak{S}^\infty|_{T_X^* X} = \mathfrak{S}|_{T_X^* X}, \mathfrak{N}^\infty|_{T_X^* X} = 0$ とおくことで T^*X 上の層に拡張できる。

Proposition 3.4. V を $\mathring{T}^*X$ 上の開錐とする。この時、 $\mathfrak{N}^\infty(V)$ は $\mathfrak{S}^\infty(V)$ のイデアルである。

$\mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$ を、次の対応で定義される前層を層化して得られる層とする。

$$V \mapsto \mathfrak{S}^\infty(V)/\mathfrak{N}^\infty(V).$$

ただし、 V は $\mathring{T}^*X$ 上の開錐とする。すると次の層の完全列が得られる。

$$0 \longrightarrow \mathfrak{N}^\infty \longrightarrow \mathfrak{S}^\infty \xrightarrow{\kappa_2} \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty \longrightarrow 0. \quad (3.1)$$

ここで κ_2 は規準的射 $\mathfrak{S}^\infty \rightarrow \widehat{\mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty} \rightarrow \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$ の合成で得られる。

ここで、凸固有閉錐 $\tilde{V}$ に対しても上と同じような完全列

$$0 \rightarrow \mathfrak{N}^\infty(\tilde{V}) \rightarrow \mathfrak{S}^\infty(\tilde{V}) \rightarrow \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty(\tilde{V}) \rightarrow 0,$$

が望まれるが、それは次のように示される。定義から明らかに次の可換図式が存在する。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathfrak{N}(\tilde{V}) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(\tilde{V}) & \xrightarrow{\kappa_1(\tilde{V})} & \mathfrak{S}/\mathfrak{N}(\tilde{V}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \iota_2(\tilde{V}) & & \downarrow \iota_1(\tilde{V}) & & \downarrow \iota(\tilde{V}) \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{N}^\infty(\tilde{V}) & \longrightarrow & \mathfrak{S}^\infty(\tilde{V}) & \xrightarrow[\kappa_2(\tilde{V})]{} & \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty(\tilde{V}),
\end{array}$$

ただし、 $\iota_1(\tilde{V})$ と $\iota_2(\tilde{V})$ は規準的な埋め込みであり、横の列は完全である。ここで $\iota(\tilde{V})$ が同型射であると仮定する。すると $\kappa_2(\tilde{V})$ の全射性から合成射 $\iota(\tilde{V}) \circ \kappa_1(\tilde{V})$ が全射であることがわかり、欲しかった完全性が得られる。 ι の同型性は次の章で与える。

3.2 二つの表象のクラスの同値性

$\mathfrak{S}$ を T^*X 上の表象の為す層、 $\mathfrak{N}$ を T^*X をヌル表象の為す層とする。([2] を参照。) 表象の定義から、次のような埋め込みが存在する

$$\iota_1 : \mathfrak{S} \hookrightarrow \mathfrak{S}^\infty, \quad \iota_2 : \mathfrak{N} \hookrightarrow \mathfrak{N}^\infty.$$

さらに、これらは次の射を誘導する

$$\iota : \mathfrak{S}/\mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty.$$

Theorem 3.5. 誘導された射

$$\iota : \mathfrak{S}/\mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$$

は層の同型射である。

この定理は $\mathfrak{N}^\infty$ に対する、Hörmander[9] の $\bar{\partial}$ 作用素に対する可解性定理の類似の結果から従う。

4 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ と $\mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$ の層としての同値性

この章では X を複素 n 次元ベクトル空間と仮定する。また、 $X \times X$ と TX を次の射により同一視する。

$$\varrho : X \times X \ni (z, w) \mapsto (z, w - z) \in TX. \quad (4.1)$$

この時、明らかに次が可換となる。

$$\begin{array}{ccc}
X \times X & \xrightarrow{\varrho} & TX \\
& \searrow p_1 & \swarrow \tau \\
& X &
\end{array}$$

この章の目的は射 $\varsigma : \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$ を具体的に構成し、次の主定理を示すことである。

Theorem 4.1. 無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ はその表象の為す層 $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ と層同型である。

4.1 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ から $\mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$ への射 ς

$\tilde{V}$ を T^*X の固有凸閉錐とし、 V と V' を $\tilde{V} \underset{\text{cone}}{\subseteq} V' \underset{\text{cone}}{\subseteq} V$ を満たす固有凸閉錐とする。さらに、 $\pi(\tilde{V})$ をコンパクト、 $\pi(V')$ と $\pi(V)$ は相対コンパクトであると仮定する。柏原-Schapira の fiber 公式により

$$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}(V) = \varinjlim_{U, G} H_{G \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0, n)})$$

がある条件のもとで成り立つ。もし次のような射が構成されれば

$$\tilde{\varsigma}: H_{G \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0, n)}) \rightarrow \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty(V'),$$

二つの帰納極限 $\varinjlim_{U, G}$, $\varinjlim_{\tilde{V} \underset{\text{cone}}{\subseteq} V' \underset{\text{cone}}{\subseteq} V}$ to $\tilde{\varsigma}$ をこの順で取ること、次の射が実現される。

$$\varsigma_{\tilde{V}}: \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}(\tilde{V}) \longrightarrow \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty(\tilde{V}).$$

従って以降では射 $\tilde{\varsigma}$ を具体的に構成する。

まずは TX 上の γ -位相を定義する。 γ を TX の凸閉錐とする。

Definition 4.2. TX 上の γ -位相とは、次で与えられる開集合 Ω により与えられる位相である。

1. Ω は通常の位相の意味で開集合である。
2. Ω は $\Omega \dot{+} \gamma = \Omega$ を満たす。

ただし、 $\dot{+}$ は次で定義される

$$\Omega \dot{+} \gamma = \bigsqcup_{z \in \tau(\Omega)} (\Omega_z + \gamma_z).$$

ここで $\Omega_z = \Omega \cap \tau^{-1}(z)$, $\gamma_z = \gamma \cap \tau^{-1}(z)$ であり $\gamma_z = \emptyset$ であれば $\Omega_z + \gamma_z = \Omega_z$ とする。

TX の開集合 V は γ -位相の元で開集合である時、 γ -開集合であると呼ぶ。

Γ_1, Γ_2 を次の条件を満たす T^*X の固有凸閉錐とする。

1. $V' \underset{\text{cone}}{\subseteq} \Gamma_2 \underset{\text{cone}}{\subseteq} \Gamma_1 \underset{\text{cone}}{\subseteq} V$.
2. $G \cap U \subset \varrho^{-1}(\text{Int}(\Gamma_1^\circ)) \cup \Delta$ in $p_1^{-1}(\pi(V'))$.

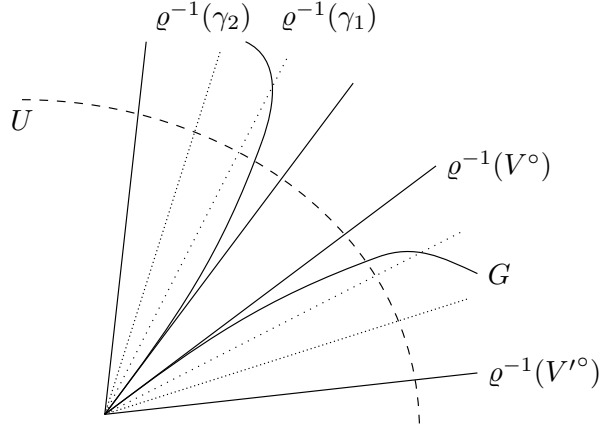


図1 Geometrical relations in $X \times X$

まず、積分路を構成する。 $i = 1, 2$ に対して $\gamma_i = \Gamma_i^\circ$ とおく。 D_1 と D_2 を $X \times X$ の開集合でその境界は区分的に C^∞ 級の滑らかさを持つとする。さらに以下の条件を満たすものとする。

- D1. $i = 1, 2$ に対して $\varrho(D_i)$ は γ_i -開集合。
- D2. $i_\Delta(\pi(V')) \subset D_1$ 。ただし、 $i_\Delta : X \rightarrow X \times X$ は対角埋め込み。
- D3. $\overline{D}_2 \cap p_1^{-1}(\pi(V')) \subset \text{Int}(\gamma_2)$ 。
- D4. $\overline{D} \cap p_1^{-1}(\pi(V')) \subset U$ 。ただし、 $D = D_1 \setminus D_2$ とおいた。
- D5. $\overline{E} \cap p_1^{-1}(\pi(V')) \subset U \setminus G$ 。ただし、 $E = \partial D_1 \setminus D_2$ とおいた。
- D6. ∂D_1 と ∂D_2 は $p_1^{-1}(\pi(V'))$ 内で横断的に交差する。
- D7. 任意の $z \in \pi(V')$ に対して $p_1^{-1}(z)$ と ∂D_1 (または ∂D_2) は横断的に交差する。

Remark 4.3. このような D_1 と D_2 は少なくとも一つ構成可能である。

D_1 と D_2 上の条件を満たす $X \times X$ の開集合とする。 $D = D_1 \setminus D_2$, $E = \partial D_1 \setminus D_2$ とし、さらに $D_z = D \cap p_1^{-1}(z)$, $E_z = E \cap p_1^{-1}(z)$ とおく。

Definition 4.4. $u \in H_{\vartheta}^{0,n,n}(U, U \setminus G)$ とし、その代表元を $\omega = (\omega_1, \omega_{01})$ とする。この時

$$\tilde{\zeta} : H_{G \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)}) = H_{\vartheta}^{0,n,n}(U, U \setminus G) \rightarrow \mathfrak{S}^\infty / \mathfrak{N}^\infty(V') \quad (4.2)$$

を

$$\tilde{\zeta}(\omega)(z, \zeta) = \int_{D_z} \omega_1(z, w) \cdot e^{\langle w-z, \zeta \rangle} - \int_{E_z} \omega_{01}(z, w) \cdot e^{\langle w-z, \zeta \rangle}. \quad (4.3)$$

で定義する。

4.2 射 $\tilde{\zeta}$ の良定義性

ここでは $\tilde{\zeta}$ が良定義であることを確認する。 V と V' を前章と同じものとする。

Proposition 4.5. $\omega = (\omega_1, \omega_{01})$ を $u \in H_{\check{\partial}}^{0,n,n}(U, U \setminus G)$ の代表元とする。この時、射 ζ は次の性質を持つ。

1. 像 $\zeta(\omega)$ は V' 上の C^∞ 型の表象 $\mathfrak{S}^\infty(V')$ に属する。
2. ω が相対 Čech-Dolbeault コホモロジーの意味で 0 と等しければ、像 $\zeta(\omega)$ は V' 上の C^∞ 型のヌル表象 $\mathfrak{N}^\infty(V')$ に属する。
3. 像 $\zeta(\omega)$ は D_1 と D_2 の取り方に依らない。

この命題から次の系が従う。

Corollary 4.6. 写像 ζ は良定義である。

4.3 主結果 Theorem 4.1の証明

ここでは主定理を示す。青木の結果により以下の定理が得られる。

Theorem 4.7 ([2], Theorem 4.3 and Theorem 4.5). 層の茎の間の表象写像

$$\sigma : \mathcal{O}_{X,z^*}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathfrak{S}_{z^*} / \mathfrak{N}_{z^*}$$

が存在し、特に同型写像である。

Subsections 4.1 と 4.2 の結果から、 $\mathring{T}^*X$ の任意の固有凸閉錐 $\tilde{V}$ に対して以下の射が存在する

$$\varsigma_{\tilde{V}} : \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}(\tilde{V}) \longrightarrow \mathfrak{S}^\infty / \mathfrak{N}^\infty(\tilde{V}).$$

$\tilde{V}'$ を $\tilde{V}$ に含まれる固有凸閉錐とする。すると、Proposition 4.5により次の図式が可換となることがわかる

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}(\tilde{V}) & \xrightarrow{\varsigma_{\tilde{V}}} & \mathfrak{S}^\infty / \mathfrak{N}^\infty(\tilde{V}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}(\tilde{V}') & \xrightarrow{\varsigma_{\tilde{V}'}} & \mathfrak{S}^\infty / \mathfrak{N}^\infty(\tilde{V}'). \end{array}$$

$\mathring{T}^*X$ の固有凸閉錐の族は錐状層がそこで定義されるような集合の基底となるので、写像の族 $\{\varsigma_{\tilde{V}}\}_{\tilde{V}}$ は $\mathring{T}^*X$ での層の射を与える

$$\varsigma : \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathfrak{S}^\infty / \mathfrak{N}^\infty.$$

それ故に、 $\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}$ から C^∞ 型の表象クラスへの射が定義される。残りの問題は層の射 ς が同型であることを示すことであるが、それは各茎の間の射 $\varsigma_{z^*} : \mathcal{O}_{X,z^*}^{\mathbb{R}} \rightarrow (\mathfrak{S}^\infty / \mathfrak{N}^\infty)_{z^*}$ が同型であることを示せば

十分である。ここで、各点 $z^* \in \mathring{T}^*X$ に対して以下の図式が可換となることは容易に示される。

$$\begin{array}{ccc}
 & & (\mathfrak{S}/\mathfrak{N})_{z^*} \\
 & \nearrow \sigma & \downarrow \iota_{z^*} \\
 \mathcal{O}_{X,z^*}^{\mathbb{R}} & & \\
 & \searrow \varsigma_{z^*} & \downarrow \\
 & & (\mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty)_{z^*}
 \end{array}$$

Theorem 4.7により σ は同型写像であり、縦の射もまた Theorem 3.5により同型写像となる。よって ς_{z^*} が同型写像となることがわかり、Theorem 4.1が得られた。

参考文献

- [1] Takashi Aoki, *Calcul Exponential des opérateurs Microdifférentiels d'ordre infini* I, II. Ann. Inst. Fourier. Grenoble. (1983/1986).
- [2] Takashi Aoki, Symbols and formal symbols of pseudodifferential operators, Group Representation and Systems of Differential Equations, Proceedings Tokyo, (1982) (ed. K. Okamoto), Adv. Stud. Pure Math., 4, Kinokuniya, Tokyo; North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, (1984), 181-208.
- [3] Naofumi Honda, Takeshi Izawa and Tatsuo Suwa, Sato hyperfunctions via relative Dolbeault cohomology. (in preparation)
- [4] Kiyoomi Kataoka, On the theory of Radon transformations of hyperfunctions and its applications, Master's Thesis, Univ. Tokyo, (1976) (in Japanese).
- [5] Masaki Kashiwara and Takahiro Kawai, Micro-hyperbolic pseudo-differential operators I, J. Math. Soc. Japan, **27** (1975), 359-404.
- [6] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels dans le domaine complexe, Invent. Math, **46** (1978), 17-38.
- [7] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, Micro-hyperbolic systems. Acta Math. **142**, (1979), 1-55.
- [8] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, Sheaves on Manifold. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, **292**, Springer-Verlag, (1990).
- [9] Hörmander Lars, An introduction to complex analysis in several variables. North-Holland mathematical library, **7** (1990).
- [10] Mikio Sato, *Theory of hyperfunctions. I and II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA **8** (1959/1960).
- [11] Mikio Sato, Takahiro Kawai and Masaki Kashiwara, Microfunctions and pseudo-differential equations. In *Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations (Proc. Conf., Katata, 1971; dedicated to the memory of Andre Martineau)*. Springer, Berlin, 265–529. Lecture Notes in Math., **287**, (1973).