1 次元圧縮性粘性流体中を運動する質点の長時間挙動について

小池 開（Kai Koike）*

1　序

流れは流体それ自身だけでなく，それが接する構造物の影響も受ける．また，翼やタービンなど，その構造物が運動・変形を伴う場合も多く，このときの流れの研究は流体・構造連成問題と呼ばれ，古くから研究されている．その一方で，数学的な見地からの研究は比較的新しく，興味ある問題の源泉となっている．

数学的に興味のある問題としては，(i) 解の存在や一意性，あるいは (ii) 長時間挙動など解の定量・定性的な性質の理解，といったことが挙げられる．問題 (i) に関しては，その基本的な重要性から，これまでに多くの研究が蓄積されてきている．例えば [3, 4] に挙げられている文献を参考にして頂きたい．一方，(ii) のより応用的な結果に関しては，まだまだ未知の部分が多い．本稿ではとくに解の長時間挙動に関する問題を取り上げる．以下でこの問題に関して知られているいくつかの結果を紹介し，次節で著者の最近の結果 [6] を紹介する．方程式やその解析手法に関して，可能なときには入門的な文献を引用するようにしたので，偏微分方程式の数学解析に親しむ取っ掛かりにして頂ければ幸いである．

1.1　1 次元 Burgers 流体中を運動する質点の長時間挙動

最初に Vázquez–Zuazua による定理 [12] を紹介することから始める．空間 1 次元の Burgers 方程式（cf. [15, §2, §4]）で記述される流れを考え，その中に質量 m の質点を置く．[*1] 流速場を $u = u(x,t)$，質点の位置を $x = h(t)$ とすると，この流体–質点系は以下の方程式系で記述される：

$$
\begin{cases}
u_t + (u^2)_x = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}\backslash\{h(t)\},\, t > 0, \\
u(h(t) \pm 0, t) = h'(t), & t > 0, \\
mh''(t) = [\![u_x]\!](h(t), t), & t > 0, \\
h(0) = h_0,\, h'(0) = h_1;\, u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}\backslash\{h_0\}.
\end{cases}
$$

ここで関数 $f = f(x,t)$ に対して $[\![f]\!](x,t) \coloneqq \lim_{y\to x+0} f(y,t) - \lim_{y\to x-0} f(y,t)$ である（点 x における関数 f の跳び）．最初の式は Burgers 方程式で，2 つ目は質点が流体と同じ速度で運動するという条件，3 つ目は Newton の運動方程式，残りは初期条件である．質点に働く力は $[\![u_x]\!](h(t),t)$ となっているが，これは系の全運動量 $\int_{\mathbb{R}\backslash\{h(t)\}} u(x,t)\,dx + mh'(t)$ が保存するという条件から理解できる．[*2]

* 1) Faculty of Science and Technology, Keio University, 3–14–1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, 223–8522, Japan koike@math.keio.ac.jp 2) Center for Advanced Intelligence Project, RIKEN, 1–4–1 Nihonbashi, Chuo-ku, Tokyo, 103–0027, Japan kai.koike@riken.jp

[*1] 質点とは大きさのない質量を持った物体のことである．

[*2] 第 1 式を x について積分した式に第 3 式を足して，部分積分を用いる．

十分長い時間が経てば，質点の運動エネルギーは流体を通して散逸し，質点は静止状態に近づくはずである．一般に中間的な時間における解の様子は初期値によってまちまちでも，長時間では方程式の構造を反映した普遍的な挙動が見られることが多い．そのため，長時間における漸近挙動は数学的な関心の的となっている．実は上記の方程式系については（系の全運動量がゼロでない限り）質点の速度 $h'(t)$ はべき乗則 $h'(t) \sim t^{-1/2}$ に従って減衰することが証明されている [12, Theorem 1.2].[*3] とくに質点の移動距離 $\int_0^\infty h'(t)\,dt$ は発散することにも注意しておく．

証明の基本的なアイデアはスケーリングである．すなわち，$\lambda > 0$ に対して

$$u_\lambda(x,t) \coloneqq \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad h_\lambda(t) \coloneqq \frac{1}{\lambda} h(\lambda^2 t)$$

と定める．このとき (u_λ, h_λ) は方程式系

$$\begin{cases} u_{\lambda,t} + (u_\lambda^2)_x = u_{\lambda,xx}, & x \in \mathbb{R}\backslash\{h_\lambda(t)\},\, t>0, \\ u_\lambda(h_\lambda(t) \pm 0, t) = h'_\lambda(t), & t > 0, \\ (m/\lambda) h''_\lambda(t) = [\![u_{\lambda,x}]\!](h_\lambda(t), t), & t > 0, \\ h_\lambda(0) = h_0/\lambda,\, h'_\lambda(0) = \lambda h_1;\, u_\lambda(x,0) = \lambda u_0(\lambda x), & x \in \mathbb{R}\backslash\{h_0/\lambda\} \end{cases}$$

の解となる．ここで形式的に $\lambda \to \infty$ の極限を取ると，スケールされた質点の質量 m/λ はゼロとなる．しかも u_λ の初期値は $\lambda \to \infty$ の極限で，原点に集中したデルタ関数となる．このことから，極限関数 $\lim_{\lambda\to\infty} u_\lambda$ は単純な関数形を持つことが分かる（cf. 自己相似解）．一方，$u(x,t) = t^{-1/2} u_{t^{1/2}}(t^{-1/2}x, 1)$ という関係から，$t \to \infty$ の極限は $\lambda \to \infty$ の極限とつながっている．このような考えにもとづいて，u および h の長時間挙動を調べることができる．実際の証明では種々の「エネルギー評価」を行うことになる（エネルギー評価については [15] に入門的な解説がある）．

1.2　1 次元圧縮性粘性流体中を運動する質点の長時間挙動

上記の Burgers 方程式は圧縮性 Navier–Stokes 方程式を単純化したモデルと考えることができる [15, §2]．従って，本来の圧縮性 Navier–Stokes 方程式に対して，長時間挙動に関する同様の問題を考えることは自然なことである．次節で紹介する著者の結果はまさにこうした結果である．

圧縮性 Navier–Stokes 方程式に対しては，流体領域が有界な場合，すなわち流体が $\mathbb{R}\backslash\{h(t)\}$ ではなく $(a,b)\backslash\{h(t)\}$ $(-\infty < a < h(t) < b < \infty)$ を流れる場合には，いくつかの先行研究がある．例えば Shelukhin [8, 9] は解の時間大域存在と一意性，および解が平衡状態（密度一様，流速ゼロの状態）に $t \to \infty$ で収束することを示している．また [2] でも関連した問題が論じられている．こうした研究では収束のレート（例えば Burgers 方程式の場合には $h'(t) \sim t^{-1/2}$）にはあまり重きが置かれていないようで，明らかにされていない．[*4] むしろ，方程式の構造を上手く利用して，できるだけ初期値の大きさに条件を課さずに解析を行うことに重点が置かれている．長時間挙動に関しては次節で述べるように，流体が $\mathbb{R}\backslash\{h(t)\}$ を流れる場合の方が複雑で興味深い．

[*3] ここで $|f(t)| \sim t^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ はある定数 $C \geq 1$ に対して $C^{-1}(t+1)^{-\alpha} \leq |f(t)| \leq C(t+1)^{-\alpha}$ が成り立つことを表す．

[*4] おそらく解は指数的に平衡状態に収束する．有界領域で Dirichlet 境界条件を仮定すると，多くの場合，解の平衡状態への収束は指数的である．非有界領域では代数的（べき乗則 $t^{-\alpha}$）となることが多い．

1.3　1 次元分子気体中を運動する質点の長時間挙動

流れの空間的なスケールが短い場合や，圧力が小さい場合には，気体流の Navier–Stokes 方程式による記述は正当化できないことが知られている．このような場合には，巨視的な量だけでなく，気体分子速度の分布関数を用いて流れを記述しなければならない．このような気体を分子気体といい，Navier–Stokes 方程式の代わりに Boltzmann 方程式を用いて流れを記述する（教科書としては [14] が読みやすい）．分子気体についても，運動物体の長時間挙動の研究は興味深く，いくつかの研究が知られている．このことについては，前々回のテクニカルレポートにまとめてあるので，参考にして頂きたい [5]．ここでは [5, §4.4] で未解決の問題として触れたことを紹介する．なぜなら次節で述べる結果は，この問題に対する部分的な進展となっているからである．

1 次元 Boltzmann 方程式で記述される流れと，その中を運動する質点を考える．上述の Vázquez–Zuazua が考えた設定との相違点として，ここでは質点は線形ばねにつながれているとする．すなわち，質点の運動方程式はばね定数を $k>0$ として，

$$mh''(t)=F(t)-kh(t)$$

である（$F(t)$ は気体が質点に及ぼす力）．ただし，ばねの平衡位置は $x=0$ としている．Tsuji–Aoki [10, 11] は数値計算によって，$h(t)$ の長時間挙動を調べた．彼らの計算結果はべき乗則 $h(t)\sim t^{-3/2}$ の成立を示唆している．[*5]

Boltzmann 方程式は Navier–Stokes 方程式に比べても厄介な方程式であり，その数学解析は非常な困難を伴うことが多い．一方，長時間挙動に関しては，少なくとも形式的には，Boltzmann 方程式と圧縮性 Navier–Stokes 方程式の解は似たような振る舞いをする．なぜなら，長時間が経過すれば気体は平衡状態に近づき，流体力学極限の理論（cf. [14]）が使える状況になると考えられるからである．そこで，上記の数値計算による結果を数学的に理解するための一歩として，圧縮性 Navier–Stokes 方程式の場合に数学解析を行うことが考えられる．これが次節で述べる結果である．次節では Vázquez–Zuazua の結果と同様，ばねのない場合（$k=0$）を扱うが，著者の最近の研究によって，ばねがある場合にも拡張できることが分かっている（数値計算で観察された長時間挙動 $h(t)\sim t^{-3/2}$ の成立を厳密に証明することができる）．

2　1 次元圧縮性粘性流体中を運動する質点の長時間挙動

2.1　問題の定式化

空間 1 次元の圧縮性 Navier–Stokes 方程式で記述される流れを考え，その中に質量 m の質点を置く．質点の位置を $X=h(t)$，流体の密度場と流速場を $\rho=\rho(X,t)$ および $U=U(X,t)$ とおくとき，この流体–質点

---

*5 正確には計算コストを下げるために Boltzmann 方程式ではなく BGK モデルを用いている．

系は次の方程式系で記述される：

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho U)_X = 0, & X \in \mathbb{R}\backslash\{h(t)\},\ t>0, \\ (\rho U)_t + (\rho U^2)_X + P(\rho)_X = \nu U_{XX}, & X \in \mathbb{R}\backslash\{h(t)\},\ t>0, \\ U(h(t)\pm 0, t) = h'(t), & t>0, \\ mh''(t) = [\![-P(\rho)+\nu U_X]\!](h(t),t), & t>0, \\ h(0)=h_0,\ h'(0)=h_1, \\ \rho(X,0)=\rho_0(X),\ U(X,0)=U_0(X), & X\in\mathbb{R}\backslash\{h_0\}. \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで正定数 ν は粘性，$P = P(\rho)$ は圧力である．ここで圧力 P は密度 ρ の関数（適当な条件を満たす既知関数）であるとしている．この仮定を満たす気体は順圧的（barotropic）であるという．一般には圧力はエントロピー（あるいは温度）にも依存するが，ここでは簡単のために順圧的であると仮定する．最初の 2 つの方程式は圧縮性 Navier–Stokes 方程式で，3 つ目は質点が流体と同じ速度で運動するという条件，4 つ目は Newton の運動方程式，残りは初期条件である．質点に働く力が $[\![-P(\rho)+\nu U_X]\!](h(t),t)$ となっているのは，流体力学における応力の公式から従うが，Burgers 方程式の場合に説明したように，運動量 $\int_{\mathbb{R}\backslash\{h(t)\}}(\rho U)(x,t)\,dx + mh'(t)$ が保存するという条件からも導出できる．以下では簡単のため $m=1$ とする．

上記の方程式は時間に依存した領域 $\mathbb{R}\backslash\{h(t)\}$ 上で成り立つ．解析をし易くするため，Lagrange 質量座標系を用いて方程式を書き直す．すなわち，$x \in \mathbb{R}_* \coloneqq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ および $t \geq 0$ に対して，$X = X(x,t)$ を以下の方程式で定める：

$$x = \int_{h(t)}^{X(x,t)} \rho(X',t)\,dX'.$$

仮定 $\inf_{X\in\mathbb{R}\backslash\{h(t)\}} \rho(X,t) > 0$ の下で，これは全単射

$$\mathbb{R}_* \ni x \mapsto X(x,t) \in \mathbb{R}\backslash\{h(t)\}$$

を定める．この新しい座標系では，質点の座標は常に $x=0$ であることに注意しておく．また，新しい従属変数を $v(x,t) \coloneqq \rho^{-1}(X(x,t),t)$ および $u(x,t) \coloneqq U(X(x,t),t)$ で定める．また，$p(v) \coloneqq P(v^{-1})$, $v_0(x) \coloneqq \rho_0^{-1}(X(x,0))$ および $u_0(x) \coloneqq U_0(X(x,0))$ とおく．このとき (2.1) は次の方程式系と同値である [15, §5]：

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, & x\in\mathbb{R}_*,\ t>0, \\ u_t + p(v)_x = \nu\left(\dfrac{u_x}{v}\right)_x, & x\in\mathbb{R}_*,\ t>0, \\ u(\pm 0,t) = h'(t), & t>0, \\ h''(t) = [\![-p(v)+\nu u_x/v]\!](0,t), & t>0, \\ h(0)=h_0,\ h'(0)=h_1;\ v(x,0)=v_0(x),\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}_*. \end{cases} \tag{2.2}$$

本稿では定常解 $(v,u,V) \equiv (\bar{v},0,0)$ のまわりの小さな解を考える（以下では簡単のため $\bar{v}=1$ とする）．すなわち，初期値が $(\bar{v},0,0)$ の十分小さな近傍にある状況を考える．[*6] そこで，$\tau \coloneqq v-1$, $V(t) \coloneqq h'(t)$,

---

[*6] 偏微分方程式論では，このような解を「小さな解」（small solution）とよぶ．非線形な方程式を考える場合，小さくない解を考えるにはかなり工夫した解析が必要となる．今回のように空間 1 次元の場合には [8, 9] のように，小さくない解の一意存在を示せる場合もあるが，以下で述べるような詳しい長時間挙動の解析は容易ではない．

$\tau_0 \coloneqq v_0 - 1$ および $V_0 \coloneqq h_1$ とおく．このとき (2.2) は次のように書き直せる：

$$
\begin{cases}
\tau_t - u_x = 0, & x \in \mathbb{R}_*,\, t > 0, \\
u_t + p(1+\tau)_x = \nu \left(\dfrac{u_x}{1+\tau} \right)_x, & x \in \mathbb{R}_*,\, t > 0, \\
u(\pm 0, t) = V(t), & t > 0, \\
V'(t) = [\![-p(1+\tau) + \nu u_x/(1+\tau)]\!](0,t), & t > 0, \\
V(0) = V_0;\, \tau(x,0) = \tau_0(x),\, u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}_*.
\end{cases}
\tag{2.3}
$$

また，非線形項（ここでは変数 τ, u, V について 2 次以上の項）を無視すると，以下の線形化方程式系が得られる：

$$
\begin{cases}
\tau_t - u_x = 0, & x \in \mathbb{R}_*,\, t > 0, \\
u_t - c^2 \tau_x = \nu u_{xx}, & x \in \mathbb{R}_*,\, t > 0, \\
u(\pm 0, t) = V(t), & t > 0, \\
V'(t) = [\![c^2 \tau + \nu u_x]\!](0,t), & t > 0, \\
V(0) = V_0;\, \tau(x,0) = \tau_0(x),\, u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}_*.
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

ここで $c > 0$ は $c^2 = -p'(1)$ で定義される正数で，音速とよばれる（物理的に自然な条件 $p'(1) < 0$ を仮定する）．方程式系 (2.4) の最初の 2 式は

$$
\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}
$$

とおくとき，

$$
\boldsymbol{u}_t + A \boldsymbol{u}_x = B \boldsymbol{u}_{xx} \tag{2.5}
$$

と表せる．行列 A の固有値は $\lambda_1 = c$ および $\lambda_2 = -c$ であり，対応する右および左固有ベクトルとして

$$
r_1 = \frac{2c}{p''(1)} \begin{pmatrix} -1 \\ c \end{pmatrix}, \quad r_2 = \frac{2c}{p''(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}
$$

および

$$
l_1 = \frac{p''(1)}{4c} \begin{pmatrix} -1 & 1/c \end{pmatrix}, \quad l_2 = \frac{p''(1)}{4c} \begin{pmatrix} 1 & 1/c \end{pmatrix}
$$

が取れる（条件 $p''(1) \neq 0$ を仮定する）．また，$u_i = l_i \boldsymbol{u}$ と定めれば，$\boldsymbol{u} = u_1 r_1 + u_2 r_2$ であることに注意する．加えて，$u_{0i}(x) = u_i(x,0)$ とおく．

上記の分解 $\boldsymbol{u} = u_1 r_1 + u_2 r_2$ について補足しておく．いま (2.5) で $\nu = 0$ としたものに左から l_i を作用させると，次式を得る：

$$
u_{it} + \lambda_i u_{ix} = 0.
$$

この方程式の解は（ここでは質点を無視すると）$u_i(x,t) = u_{0i}(x - \lambda_i t)$ と表せる．すなわち，u_i は初期値 u_{0i} が速度 λ_i で平行移動したものである．従って，u_1 は $\boldsymbol{u}$ の中で速度 $\lambda_1 = c$ で流れる成分，u_2 は速度 $\lambda_2 = -c$ で流れる成分であると見なせる．元の $\boldsymbol{u}$ は 2 つの成分が混ざってしまっているので，このように分解しておいた方が物理的な直感が効いて解析がし易くなるのである．

2.2 主結果

以下に述べる定理では (2.3) の解を，振る舞いがよく理解できる関数（移流項付き Burgers 方程式の自己相似解）と余り，という形に分け，その余りの部分に対して時空間評価（あるいは各点評価）を与える．時空間評価というのは，エネルギーなどの大域的な量ではなく，時空間の各点での評価を与えることを意味する．

まず，そのよく理解できる関数を定義する．初期値を用いて

$$m_i \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} l_i \begin{pmatrix} \tau_0 \\ u_0 \end{pmatrix}(x)\, dx, \quad m_V \coloneqq l_i \begin{pmatrix} 0 \\ V_0 \end{pmatrix}$$

と定める．そして Θ_i は

$$\partial_t \Theta_i + \lambda_i \partial_x \Theta_i + \partial_x \left(\frac{\Theta_i^2}{2} \right) = \frac{\nu}{2} \partial_x^2 \Theta_i, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0$$

および

$$\lim_{t \to +0} \Theta_i(x,t) = (m_i + m_V)\delta(x)$$

を満たす関数，すなわち移流項付き Burgers 方程式の自己相似解とする（自己相似解については [13] に入門的な解説がある）．ここで δ はデルタ関数である．初期時刻 $t = 0$ での特異性を回避するため，$\theta_i(x,t) \coloneqq \Theta_i(x, t+1)$ と定める．θ_i は Cole–Hopf 変換を用いて具体的に計算できる：

$$\theta_i(x,t) = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{2(t+1)}} \left(e^{\frac{m_i + m_V}{\nu}} - 1 \right) e^{-\frac{(x - \lambda_i(t+1))^2}{2\nu(t+1)}} \left[\sqrt{\pi} + \left(e^{\frac{m_i+m_V}{\nu}} - 1 \right) \int_{\frac{x - \lambda_i(t+1)}{\sqrt{2\nu(t+1)}}}^{\infty} e^{-y^2}\, dy \right]^{-1}. \tag{2.6}$$

いま定義した θ_i と解 u_i との差を $v_i \coloneqq u_i - \theta_i$ とおく．v_i に対する各点評価を述べるために，いくつか関数を定義する：

$$\psi_{3/2}(x,t;\lambda_i) = [(x - \lambda_i(t+1))^2 + (t+1)]^{-3/4},$$
$$\tilde{\psi}(x,t;\lambda_i) = [|x - \lambda_i(t+1)|^3 + (t+1)^2]^{-1/2}$$

および

$$\Psi_i(x,t) \coloneqq \psi_{3/2}(x,t;\lambda_i) + \tilde{\psi}(x,t;\lambda_{i'}).$$

ここで $i' = 3 - i$ $(i = 1, 2)$ である．

最初に解の一意存在と Sobolev H^4-ノルムの一様有界性に関する定理を述べる．解の存在はもっと広い空間でも証明できるが，後で述べる主定理を証明するには現状では H^4-ノルムの一様有界性が必要なので，ここでは正則性を下げることには拘っていない．以下では整数 $k \geq 0$ に対して $||\cdot||_k \coloneqq ||\cdot||_{H^k(\mathbb{R}_*)}$ と書く．

Theorem 2.1. $\tau_0, u_0 \in H^4(\mathbb{R}_*)$, $V_0 \in \mathbb{R}$ は適当な両立条件を満たすとする．[*7] このとき正定数 $\varepsilon_0, C > 0$ が存在して，

$$\varepsilon \coloneqq ||\tau_0||_4 + ||u_0||_4 \leq \varepsilon_0$$

[*7] 初期値が方程式と整合的であるという条件．1 つは $u_0(\pm 0) = V_0$ という条件である．

を満たせば，(2.3) は

$$
\begin{aligned}
&\tau \in C([0,\infty); H^4(\mathbb{R}_*)) \cap C^1([0,\infty); H^3(\mathbb{R}_*)),\\
&u \in C([0,\infty); H^4(\mathbb{R}_*)) \cap C^1([0,\infty); H^2(\mathbb{R}_*)),\\
&u_x \in L^2(0,\infty; H^4(\mathbb{R}_*)),\\
&V \in C^2([0,\infty))
\end{aligned}
$$

および

$$||\tau(t)||_4 + ||u(t)||_4 + \left(\int_0^\infty ||u_x(s)||_4^2\,ds\right)^{1/2} + \sum_{k=0}^{2} |\partial_t^k V(t)| \le C\varepsilon \quad (t \ge 0)$$

を満たす古典解を一意的に持つ．

以下で述べる主定理の仮定を述べるために関数

$$u_{0i}^-(x) := \int_{-\infty}^{x} u_{0i}(y)\,dy, \quad u_{0i}^+(x) := \int_x^\infty u_{0i}(y)\,dy$$

を定義する．以下が主定理である．

Theorem 2.2. $\tau_0, u_0 \in H^4(\mathbb{R}_*)$, $V_0 \in \mathbb{R}$ は適当な両立条件を満たすとする．このときある正定数 $\delta_0, C > 0$ が存在して，

$$
\begin{aligned}
\delta := \varepsilon + \sum_{i=1}^{2} \Bigg[&||u_{0i}^-||_{L^1(-\infty,0)} + ||u_{0i}^+||_{L^1(0,\infty)} + \sup_{x\in\mathbb{R}_*} \left\{ (|x|+1)^{3/2} |u_{0i}(x)| \right\} \\
&+ \sup_{x>0} \left\{ (|x|+1)(|u_{0i}^-(-x)| + |u_{0i}^+(x)|) \right\} \Bigg] \le \delta_0
\end{aligned}
$$

を満たせば，(2.3) の解 (τ, u, V) に対して

$$|v_i(x,t)| \le C\delta\Psi_i(x,t) \quad (x \in \mathbb{R}_*,\, t > 0)$$

が $i = 1, 2$ に対して成り立つ．

Remark 2.1. 定理 2.2 の δ に関する仮定は，ある正定数 $\alpha > 0$ に対して

$$\delta_\alpha := \varepsilon + \sum_{i=1}^{2} \sup_{x\in\mathbb{R}_*} (|x|+1)^{2+\alpha} |u_{0i}(x)|$$

が十分小さければ満たされる．

定理 2.2 から，質点の速度 $V(t)$ は

$$|V(t)| = |u(\pm 0, t)| \le C\delta(t+1)^{-3/2}$$

を満たすことが分かる．これは $|\theta_i(0,t)| \le C\delta e^{-c^2 t/(2\nu)}$ および $|\Psi_i(0,t)| \le C\delta(t+1)^{-3/2}$ から従う．[*8] また，$m_1 + m_V \ne 0$ かつ $m_2 + m_V = 0$ の場合には，$|V(t)| \ge C^{-1}(t+1)^{-3/2}$ も成り立つことが著者の最近の研究で分かっている．その意味で $t^{-3/2}$ というレートは最適である．

[*8] C は十分大きな正定数を表す一般的な記号とする．

上記の定理から質点の速度 $V(t)$ はべき乗則 $t^{-3/2}$ で減衰することが分かった．とくに $\int_0^\infty V(t)\,dt < \infty$ で，質点は有限の距離しか移動しない．これは Burgers 方程式の場合と対照的である．このような速い減衰が得られる要因は気体の圧縮性にある．例えば θ_i の公式 (2.6) を見ると，音速 c がゼロでないことで，$\theta(0,t)$ は指数的に減衰することが見てとれる．θ_i の減衰がもっとも遅いのは $|x-\lambda_i(t+1)| = O(1)$ の部分である．このように，減衰の遅い部分が気体の圧縮性によって無限遠に伝播することで，原点での流速，すなわち質点の速度 $V(t) = u(\pm 0, t)$ の減衰が速くなるのである．一方，指数的でない減衰 $t^{-3/2}$ が何によって引き起こされているかというと，方程式の非線形性による．実際，非線形項をすべて無視すると（初期値が空間無限遠で指数的に減衰すると仮定すれば），$V(t)$ は指数的に減衰する．このように，質点の速度 $V(t)$ の長時間挙動には，方程式の双曲性（圧縮性）と非線形性が関わっているのである．

3　証明のアイデア

この問題では，解が原点で特別に速く減衰するという特徴を捉える必要がある．そのためには大域的な積分量を用いたエネルギー評価ではなかなか解析がしにくい．そこで，今回は Green 関数の各点評価という手法を応用して解析を行った．Green 関数（以下で定義する関数 G）とは，局在化された入力に対する系の応答を記述する関数であり，方程式の解のうちで特別に単純なものである．一般の解は Green 関数の重ね合わせで記述できるので，Green 関数の各点評価があれば，それを利用して解の各点評価を得ることが期待できる．

1 次元圧縮性 Navier–Stokes 方程式の場合，質点がないときには，Liu–Zeng によって Green 関数の各点評価が与えられている [7]．また，半空間で Robin 境界条件を課す場合にも，Green 関数の各点評価が Deng–Wang によって与えられている [1]．これらの先行研究で用いられた方法は，今回の質点を伴う系にも適用できる．ただし，Green 関数の各点評価から一般の解の各点評価を得るステップには，先行研究では不十分な点がある．それは [1] では，定理 2.2 のように Burgers 方程式の自己相似解 θ_i と解 u_i の差 v_i の各点評価という形ではなく，解 u_i それ自身の各点評価しか得られていないということである．この方法を今回の問題に適用すると，$V(t) \sim t^{-1}$ という不十分な減衰評価しか得られない．つまり，境界のあるセッティングでは，自己相似解を取り出しての各点評価ができていないのである．今回の研究の技術的な貢献は，この点を解決したことにあると言える．

以下で証明の概要を述べる．

3.1　解の存在とそのエネルギー評価

定理 2.1 は反復法による時間局所解の構成と，エネルギー評価による時間大域解への延長で証明する．これは標準的な方法であり，教科書 [15] に優れた解説があるので参考にして頂きたい．ここでは誌面の都合上，これ以上は説明しないことにする．

3.2　解の各点評価

次に定理 2.2 の証明について説明する．まず $G = G(x,t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ を以下の方程式系で定める：

$$\begin{cases} \partial_t G + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} \partial_x G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \partial_x^2 G, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ G(x,0) = \delta(x) I_2, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ここで $I_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ は恒等行列である．また，$G^* = G^*(x,t) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ を

$$G^*(x,t) = \frac{1}{2(2\pi\nu t)^{1/2}} e^{-\frac{(x-ct)^2}{2\nu t}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{c} \\ -c & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2(2\pi\nu t)^{1/2}} e^{-\frac{(x+ct)^2}{2\nu t}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{c} \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

で定める．このとき G に対して，以下の時空間評価が成り立つ [7]：

$$\left| \partial_x^l G(x,t) - \partial_x^l G^*(x,t) - e^{-\frac{c^2}{\nu}t} \sum_{j=0}^{l} \delta^{(l-j)}(x) Q_j(t) \right| \le C(t+1)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{l+1}{2}} \left(e^{-\frac{(x-ct)^2}{Ct}} + e^{-\frac{(x+ct)^2}{Ct}} \right). \tag{3.1}$$

ここで $\delta^{(k)}$ はデルタ関数の k-階微分，$Q_j = Q_j(t)$ は 2×2 の多項式係数の行列である．この評価は Fourier 逆変換の積分路を Cauchy の積分定理で変形する手法によって示される [7].

上記の G に加えて，

$$G_T(x,t) \coloneqq \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s/\sqrt{\nu s + c^2} + 2} \tilde{G} \right](x,t), \quad G_R(x,t) \coloneqq (G - G_T)(x,t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を導入する．ここで $\mathcal{L}^{-1}$ は時間に関する逆 Laplace 変換で，s は Laplace 時間変数である．

方程式 (2.3) を空間について Fourier 変換，時間について Laplace 変換して，いくらかの計算を行うと，解は次の積分方程式を満たすことが分かる：$x > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix}(x,t) &= \int_0^\infty G(x-y,t) \begin{pmatrix} \tau_0 \\ u_0 \end{pmatrix}(y)\,dy + \int_0^\infty G_R(x+y,t) \begin{pmatrix} \tau_0 \\ u_0 \end{pmatrix}(y)\,dy \\
&+ \int_{-\infty}^0 G_T(x-y,t) \begin{pmatrix} \tau_0 \\ u_0 \end{pmatrix}(y)\,dy + G_T(x,t) \begin{pmatrix} 0 \\ V_0 \end{pmatrix} \\
&+ \int_0^t \int_0^\infty G(x-y,t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ N_x \end{pmatrix}(y,s)\,dyds \\
&+ \int_0^t \int_0^\infty G_R(x+y,t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ N_x \end{pmatrix}(y,s)\,dyds \\
&+ \int_0^t \int_{-\infty}^0 G_T(x-y,t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ N_x \end{pmatrix}(y,s)\,dyds \\
&+ \int_0^t G_T(x,t-s) \begin{pmatrix} 0 \\ [\![N]\!] \end{pmatrix}(0,s)\,ds.
\end{aligned}$$

$x < 0$ に対しても同様の公式が成り立つ．この積分方程式について少し説明を加える．まず右辺第 1 式は，初期時刻に位置 $y > 0$ で与えた擾乱 $(\tau_0, u_0)(y)$ が，時刻 t で位置 x に及ぼす影響を表す．また，G の空間引数 $x-y$ は，この擾乱が距離 $x-y$ を移動したものと解釈できる．一方，右辺第 2 式は，G の空間引数 が $x+y$ となっている．これは擾乱が距離 $x+y$ を移動したこと，つまり $y > 0$ から原点にひとまず移動し，そこで反射されて位置 x に到達したと解釈できる．また，右辺第 3 式は擾乱が $y < 0$ から原点に到達し，そのまま透過して位置 x に到達したと解釈できる．その他の式についても同様の解釈ができる．[*9]

G_T および G_R についても (3.1) のような時空間評価を導くことができ，実は G_T と G は長時間挙動に関してはほとんど同じ評価を満たす．そうすると，G_R は $G - G_T$ に比例するため，G と G_T が互いに打ち消し合って，G_R は G よりも速く減衰する．すなわち，反射波は素早く減衰する．この物理的な観察は自己相似解 θ_i の質量（$m_i + m_V$）を適切に定義するために重要な役割を果たす．

[*9] この事情から，添字 T（transmission）と添字 R（reflection）を用いた．

後は次の方針に従って証明を行う．まず解 u_i が定理 2.2 で述べた評価を満たすと仮定する．この仮定の下で積分方程式の右辺を評価し，これがまた定理 2.2 で述べた評価を満たすことを示す．これが示せると，多少の工夫が必要となるが，解が実際に定理 2.2 で述べた評価を満たすことが分かる．実際にこれを示すには G, G_T, G_R の時空間評価を用いて，種々の積分を時空間の各点 (x,t) で細かく評価することになる．

4　展望

定理 2.2（とそのばねのある場合への拡張）によって，節 1.3 で述べた数値計算結果がある程度，数学的に理解できるようになった．ただ，今回の圧縮性 Navier–Stokes 方程式に対する結果を Boltzmann 方程式の場合に拡張するにはまだ困難があり，これは今後の研究課題となっている．

参考文献

[1] L. Du and H. Wang, *Pointwise wave behavior of the Navier-Stokes equations in half space*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **38** (2018), 1349–1363.

[2] E. Feireisl, V. Mácha, Š. Nečasová, and M. Tucsnak, *Analysis of the adiabatic piston problem via methods of continuum mechanics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **35** (2018), 1377–1408.

[3] G. P. Galdi, *On the motion of a rigid body in a viscous liquid: a mathematical analysis with applications*, Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 653–791.

[4] B. H. Haak, D. Maity, T. Takahashi, and M. Tucsnak, *Mathematical analysis of the motion of a rigid body in a compressible Navier-Stokes-Fourier fluid*, Math. Nachr. **292** (2019), 1972–2017.

[5] K. Koike, 分子気体力学による流体中の物体運動の解析, 北海道大学数学講究録 **173**, 2018, pp. 349–358.

[6] ———, *Long-time behavior of a point mass in a one-dimensional viscous compressible fluid and pointwise estimates of solutions*, arXiv:1904.00992 (2019).

[7] T.-P. Liu and Y. Zeng, *Large time behavior of solutions for general quasilinear hyperbolic-parabolic systems of conservation laws*, Mem. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 599.

[8] V. V. Shelukhin, *The unique solvability of the problem of motion of a piston in a viscous gas*, Dinamika Sploshn. Sredy **31** (1977), 132–150.

[9] ———, *Stabilization of the solution of a model problem on the motion of a piston in a viscous gas*, Dinamika Sploshn. Sredy **33** (1978), 134–146.

[10] T. Tsuji and K. Aoki, *Moving boundary problems for a rarefied gas: Spatially one-dimensional case*, J. Comput. Phys. **250** (2013), 574–600.

[11] ———, *Decay of a linear pendulum in a collisional gas: Spatially one-dimensional case*, Phys. Rev. E **89** (2014), 052129.

[12] J. L. Vázquez and E. Zuazua, *Large time behavior for a simplified 1D model of fluid–solid interaction*, Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), 1705–1738.

[13] 儀我美一，儀我美保, 非線形偏微分方程式, 共立出版, 1999.

[14] 曾根良夫，青木一生, 分子気体力学, 朝倉書店, 1994.

[15] 松村孝明，西原健二, 非線形微分方程式の大域解, 日本評論社, 2004.