

トーラス上のミラー関手の全単射性

千葉大学大学院理学研究院 小林和志* (Kazushi Kobayashi)

1 背景

1.1 ホモロジー的ミラー対称性

本稿では、トーラス上におけるホモロジー的ミラー対称性に関連した話題を取り扱う。そのため、本節ではまずそれについての簡単な説明を行うことにする。

はじめに、ミラー対称性とはそもそも何なのかということに関して言及しておく。 M をカラビ・ヤウ多様体とする。カラビ・ヤウ多様体は複素構造 J とシンプレクティック構造 ω を両方備えているので、(何かしらの意味で定義された) M の複素構造のみに依存して定まる量を $J(M)$ 、 M のシンプレクティック構造のみに依存して定まる量を $\omega(M)$ と書くことにする。このとき、ミラー対称性とは、任意のカラビ・ヤウ多様体 M に対してあるカラビ・ヤウ多様体 $\check{M}$ が存在し、

$$J(M) \cong \omega(\check{M}) \quad (1)$$

といった関係式が成り立つという現象のことである。特に、このような関係にあるカラビ・ヤウ多様体の組 $(M, \check{M})$ はしばしばミラー対と呼ばれる。ミラー対の例として最も基本的であると考えられているのは楕円曲線の組であるが、これを高次元化したものである複素トーラスとシンプレクティックトーラスの組もミラー対の例を与える。

実際には、一口にミラー対称性 (予想) と言っても、上記の (1) における $J(M)$ や $\omega(\check{M})$ のとり方に依拠していくつかの定式化の仕方が考えられる。そのような定式化の中の1つであって、(1) における $J(M)$ 、 $\omega(\check{M})$ の部分をそれぞれある適切な導来圏 (三角圏) としたようなものが 1994 年に Kontsevich によって提案されたホモロジー的ミラー対称性 (予想) [11] であり、これを正確に述べると以下ようになる。

予想 1.1 (Kontsevich). 任意のカラビ・ヤウ多様体 M に対してあるカラビ・ヤウ多様体 $\check{M}$ が存在し、 M 上で定義される連接層の成す有界導来圏 $D^b(\text{Coh}(M))$ と $\check{M}$ 上で定義される深谷圏 $\text{Fuk}(\check{M})$ から得られる三角圏 $\text{Tr}(\text{Fuk}(\check{M}))$ の間に、三角圏としての圏同値

$$D^b(\text{Coh}(M)) \cong \text{Tr}(\text{Fuk}(\check{M}))$$

が存在する。

この予想 1.1 に関して、いくつか注意事項を記しておく。まず、深谷圏 $\text{Fuk}(\check{M})$ とは、 $\check{M}$ 内のラグランジュ部分多様体¹ とその上のユニタリ局所系の組の成す A_∞ 圏のことである [4]。今回は A_∞

*E-mail : afka9031@chiba-u.jp

¹シンプレクティック多様体 (M, ω) 内のラグランジュ部分多様体 L とは、 $\dim L = \frac{1}{2} \dim M$ となるような部分多様体であって、 $\omega|_L = 0$ を満たすようなもののことである。

圏の定義等の詳細は省略するが、ここで注意すべき点は、 $Fuk(\check{M})$ はあくまでも A_∞ 圏であって三角圏の構造を持つわけではないので直接左辺の $D^b(Coh(M))$ と比較することができないということである。そこで必要となるのが Bondal, Kapranov, Kontsevich によって考案された A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ から三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ を作り出す構成法 [3], [11] であり、これによって A_∞ 圏 $Fuk(\check{M})$ を用いて三角圏 $Tr(Fuk(\check{M}))$ を構成することができ、この $Tr(Fuk(\check{M}))$ と $D^b(Coh(M))$ を三角圏として比較してみると実は本質的に同じものになっているのではないだろうか?というのを問うているのがホモロジー的ミラー対称性 (予想) というわけである。歴史的には、この予想 1.1 はまず始めに楕円曲線上における場合が研究され ([15], [14], [1] など)、その後、その一般化としてアーベル多様体上における場合に関する研究も成されていった ([12], [5] など)。

それでは、実際に予想 1.1 を攻略しようとした場合、どのようにアプローチするのが有効なのだろうか? この問いに対する答えの 1 つとして、ここでは与えられた導来圏 (三角圏) に対する“生成系”に注目したアイデアを紹介しておく。一般的に、与えられた三角圏 $\mathcal{C}$ に対してある A_∞ 圏 $\mathcal{C}'$ が存在して

$$\mathcal{C} \cong Tr(\mathcal{C}')$$

が成り立つとき、 $\mathcal{C}'$ は $\mathcal{C}$ を生成するという。ただし、与えられた三角圏 $\mathcal{C}$ に対してそれを生成するような A_∞ 圏 $\mathcal{C}'$ を見つけるということは必ずしも容易ではない。しかしながら、ここではとりあえず、 $Tr(Fuk(\check{M}))$, $D^b(Coh(M))$ を生成するような A_∞ 圏 $\mathcal{A}_{\check{M}}$, $\mathcal{B}_M$ がそれぞれとれたと仮定してみよう：

$$Tr(Fuk(\check{M})) \cong Tr(\mathcal{A}_{\check{M}}), \quad D^b(Coh(M)) \cong Tr(\mathcal{B}_M).$$

もちろん、 $\mathcal{A}_{\check{M}}$ としては $Fuk(\check{M})$ そのものを考えることもできるが、生成系としてはできるだけ小さいものをとる方が望ましい。このとき、もし A_∞ 圏としての圏同値 $\mathcal{A}_{\check{M}} \cong \mathcal{B}_M$ が存在するのであれば、三角圏としての圏同値 $Tr(\mathcal{A}_{\check{M}}) \cong Tr(\mathcal{B}_M)$ が存在する、すなわち予想 1.1 が成り立つということも自動的に証明されたことになる。

実際のところ、 $\mathcal{B}_M$ としては一般の A_∞ 圏ではなく、 M 上で定義されたある種の正則ベクトル束から成る DG 圏をとることができると期待されており、また、ミラー対 $(M, \check{M})$ がトーラスの組である場合に関しては、厳密に証明されているわけではないと思われるものの、 $\mathcal{A}_{\check{M}}$ の対象としてアフラインなラグランジュ部分多様体とその上のユニタリ局所系の組のみを考えておけば十分ではないかということが予想されている。

1.2 SYZ 構成

前節では、ミラー対称性、特にホモロジー的ミラー対称性の概要について簡単に説明したわけであるが、そもそもこれらの双対性を議論する土台となるミラー対と呼ばれるカラビ・ヤウ多様体の組はどのようにして得ることができるのであろうか? この問いに対する答えとなり得ることが期待されている有力なアイデアとして SYZ 構成 (予想) [16] と呼ばれているものがあるので、本節ではこの構成法について簡単に説明しておく。一般的に、ファイバーがトーラスであるようなファイバー束のことをトーラスファイバー束と呼ぶ。SYZ 構成 (予想) とは、要するに、ミラー対と呼ばれるカラビ・ヤウ多様体の組 $(M, \check{M})$ は、ある共通の底空間 B 上で定義される 2 つの特殊ラグランジュトーラスファイバー束 $\pi: M \rightarrow B$, $\check{\pi}: \check{M} \rightarrow B$ として実現することができるということを主張するものである²。特に、任意の点 $b \in B$ 上における 2 つのトーラスファイバー $\pi^{-1}(b)$, $\check{\pi}^{-1}(b)$

²一般的には、ファイバー $\pi^{-1}(b)$, $\check{\pi}^{-1}(b)$ ($b \in B$) として特異ファイバーが含まれる場合があり、その際には特異ファイバーが含まれない場合には起こり得なかった様々な技術的困難が発生する。このような意味で、“SYZ 予想”と書く方がより正確ではある。

は互いに双対な関係にあり、この双対性は T-双対性と呼ばれている。この構成法に従うと、例えば、 n 次元複素トーラス X とそのミラーパートナー $\check{X}$ から成るミラー対 $(X, \check{X})$ は、 $B \approx T^n$ (T^n は n 次元実トーラスを表す) となるような底空間 B 上における 2 つの自明な特殊ラグランジュトーラスファイバー束 $\pi: X \rightarrow B, \check{\pi}: \check{X} \rightarrow B$ として実現することができる。

また、以下のような意味で、SYZ 構成 (予想) は予想 1.1 とも深く関係している。例えば、 $(X, \check{X})$ が上述のような形で SYZ 構成を介して記述されていると仮定してみよう。一般的に、 $b \in B$ 上におけるファイバー $\pi^{-1}(b), \check{\pi}^{-1}(b)$ は互いに双対な関係にあるトーラスであるから、これらの上で Poincaré 直線束と呼ばれる直線束を定義することができる。このような状況下において、 $\check{\pi}: \check{X} \rightarrow B$ のアフラインラグランジュ多重切断とその上のユニタリ局所系の組を対象とするような、深谷圏 $Fuk(\check{X})$ の充満部分圏 $\mathcal{A}_{\check{X}}$ をとった場合、 $\pi: X \rightarrow B$ と $\check{\pi}: \check{X} \rightarrow B$ のファイバーに沿った Fourier-Mukai 変換 (の類似物) を考えることによって X 上で定義されたある種の正則ベクトル束を構成することができ、さらに、これらの正則ベクトル束は自然に DG 圏 $\mathcal{B}_X$ を成す。特に、これらの $\mathcal{A}_{\check{X}}, \mathcal{B}_X$ がそれぞれ $Tr(Fuk(\check{X})), D^b(Coh(X))$ を生成すること、及び A_∞ 圏としての圏同値 $\mathcal{A}_{\check{X}} \cong \mathcal{B}_X$ が存在することが示されれば自動的に予想 1.1 の主張が従うということは前節において述べた通りである。一般的に、上記のような Fourier-Mukai 変換 (の類似物) を SYZ 変換 ([13], [2]) と呼ぶ。このような見方はより一般のミラー対に対しても有効であるため、そのような意味では、SYZ 構成により得られたミラー対に対するホモロジー的ミラー対称性は、それらのファイバーに沿った SYZ 変換によって実現されると言っても過言ではない。

2 問題意識

まず、本稿では、第 1 章において述べたことを考慮して、シンプレクティック幾何学側においては深谷圏 $Fuk(\check{X})$ の充満部分圏として $\check{\pi}: \check{X} \rightarrow B$ のアフラインラグランジュ多重切断とその上のユニタリ局所系の組を対象とするようなものを考えることとし、その充満部分圏を $Fuk_{aff}(\check{X})$ と書く。このとき、第 1.2 節において説明した SYZ 変換を用いることにより、 $Fuk_{aff}(\check{X})$ の各対象は X 上におけるある正則ベクトル束へと変換されるが、特に、そのような正則ベクトル束は単純な射影的平坦束 (定数曲率接続を持つ正則ベクトル束の一種) となることが知られている。しかしながら、一般的にはそのような正則ベクトル束の変換関数の定義の仕方は一意的ではないので、ここでは、SYZ 変換によって得られる単純な射影的平坦束を、とりうる変換関数の自由度を全て考慮して考えることとする。このようにして得られる正則ベクトル束は自然に DG 圏 DG_X を成し、また、この DG_X は $D^b(Coh(X))$ を生成するということが予想されている。よって、変換関数の定義の仕方を一つ固定した場合、SYZ 変換により、単射

$$\iota: \text{Ob}(Fuk_{aff}(\check{X})) \rightarrow \text{Ob}(DG_X)$$

が定まり、さらに、[5] において、この ι が $Fuk_{aff}(\check{X})$ の対象の同型類全体の成す集合 $\text{Ob}^{isom}(Fuk_{aff}(\check{X}))$ と DG_X の対象の同型類全体の成す集合 $\text{Ob}^{isom}(DG_X)$ との間の単射

$$\iota^{isom}: \text{Ob}^{isom}(Fuk_{aff}(\check{X})) \rightarrow \text{Ob}^{isom}(DG_X)$$

を誘導するということが証明されている。しかしながら、この ι^{isom} の全射性についてはこれまでに議論されてこなかった。以上のことを踏まえ、筆者は [9] において、 ι と逆向きの自然な写像

$$\text{Ob}(DG_X) \rightarrow \text{Ob}(Fuk_{aff}(\check{X}))$$

を具体的に構成し、上記の ι^{isom} が実際には全単射になっていることを証明した。本稿では、この結果について説明する。

3 主結果

まず始めに、複素幾何学側とシンプレクティック幾何学側における圏の対象について説明し、その後、主定理を述べる。以下、 $r \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij}) \in M(n; \mathbb{Z})$, $p, q \in \mathbb{R}^n$, $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{r}}$ ($i = \sqrt{-1}$) とし、与えられた2つの整数 m, n に対する最大公約数を $\gcd(m, n) (> 0)$ と書く。また、虚部が正定値となるような n 次複素行列 $T \in M(n; \mathbb{C})$ を用いて定義される n 次元複素トーラス $\mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n)$ を $T_{J=T}^{2n}$ と書くことにする：

$$T_{J=T}^{2n} := \mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n).$$

ただし、本稿においては、対応するミラーパートナーの定義の仕方に関する都合上、 T は正則行列であると仮定する³。また、この複素トーラスの局所座標を $z = x + Ty$ と書く。ここで、

$$z := (z_1, \dots, z_n)^t, \quad x := (x_1, \dots, x_n)^t, \quad y := (y_1, \dots, y_n)^t$$

である。この $T_{J=T}^{2n}$ のミラーパートナーを定義するために、 $2n$ 次元実トーラス T^{2n} を1つとり、その局所座標を $(\tilde{x}, \tilde{y})$ と書くことにする。ここで、

$$\tilde{x} := (x^1, \dots, x^n)^t, \quad \tilde{y} := (y^1, \dots, y^n)^t$$

である。この T^{2n} 上における複素化されたシンプレクティック形式を

$$d\tilde{x}^t(-T^{-1})^t d\tilde{y}$$

と定義し、本稿では、この複素化されたシンプレクティックトーラスを複素トーラス $T_{J=T}^{2n}$ のミラーパートナーとして取り扱う：

$$\check{T}_{J=T}^{2n} := (T^{2n}, d\tilde{x}^t(-T^{-1})^t d\tilde{y}).$$

3.1 複素幾何学側

複素幾何学側において考えるべき対象は、以下のようにして定義される正則ベクトル束 $E_{(r,A,r',\mathcal{U},p,q)} \rightarrow T_{J=T}^{2n}$ であるが³、ここでは、まず $E_{(r,A,r',\mathcal{U},p,q)}$ を複素ベクトル束として定義し、その後、それが正則ベクトル束になるための条件について述べる。

まず、単因子論より、任意の $A \in M(n; \mathbb{Z})$ に対して

$$AAB = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \tilde{a}_s & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

を満たすような $A, B \in GL(n; \mathbb{Z})$ が存在することに注意する。ここで、 $\tilde{a}_i \in \mathbb{N}$ ($i = 1, \dots, s$, $1 \leq s \leq n$) かつ $\tilde{a}_i | \tilde{a}_{i+1}$ ($i = 1, \dots, s-1$) である。このとき、 $r'_i \in \mathbb{N}$, $a'_i \in \mathbb{Z}$ ($i = 1, \dots, s$) を、関係式

$$\frac{\tilde{a}_i}{r} = \frac{a'_i}{r'_i}, \quad \gcd(r'_i, a'_i) = 1$$

³ T が正則行列でない場合の $T_{J=T}^{2n}$ のミラーパートナーの定義の仕方に関しては [8] において詳しく議論される予定である。

により定義し、さらに、

$$r' := r'_1 \cdots r'_s \in \mathbb{N}$$

とおく. この $r' \in \mathbb{N}$ は与えられた $(r, A) \in \mathbb{N} \times M(n; \mathbb{Z})$ を用いて一意的に定義されるものであり、実際には $E_{(r, A, r', \mathcal{U}, p, q)}$ の階数を表す.

以下, $E_{(r, A, r', \mathcal{U}, p, q)}$ の変換関数について説明するが, これの厳密な定義を述べると表記が非常に煩雑になるため, ここでは次のような大雑把な説明を与えるにとどめる. $s(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ を局所的に定義された $E_{(r, A, r', \mathcal{U}, p, q)}$ の滑らかな切断とする. このとき, $x_j \mapsto x_j + 2\pi$, $y_k \mapsto y_k + 2\pi$ ($j, k = 1, \dots, n$) とした場合の変換関数をそれぞれ

$$\begin{aligned} s(x_1, \dots, x_j + 2\pi, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &= e^{\frac{i}{r} a_j y} V_j \cdot s(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), \\ s(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k + 2\pi, \dots, y_n) &= U_k \cdot s(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k, \dots, y_n) \end{aligned}$$

と定める. ただし, $a_j := (a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{Z}^n$, $V_j, U_k \in U(r')$ であり, これらの $V_j, U_k \in U(r')$ としてはコサイクル条件

$$V_j V_k = V_k V_j, U_j U_k = U_k U_j, \zeta^{-a_{kj}} U_k V_j = V_j U_k$$

を満たすようなもののみを考えなければならない. これらのことを考慮し, 集合 $\mathcal{U}$ を,

$$\mathcal{U} := \left\{ V_j, U_k \in U(r') \mid V_j V_k = V_k V_j, U_j U_k = U_k U_j, \zeta^{-a_{kj}} U_k V_j = V_j U_k, j, k = 1, \dots, n \right\}$$

と定義する. 一般的に, 与えられた任意の $(r, A) \in \mathbb{N} \times M(n; \mathbb{Z})$ に対して $E_{(r, A, r', \mathcal{U}, p, q)}$ が単純となるような $\mathcal{U} \neq \emptyset$ を必ずとることができるということが知られており ([9], Proposition 3.2), 本稿においても, $E_{(r, A, r', \mathcal{U}, p, q)}$ としては単純なもののみを取り扱う. ただし, そのような $\mathcal{U}$ の定義の仕方は一意的ではない.

さらに, $E_{(r, A, r', \mathcal{U}, p, q)}$ 上における接続を以下のようにして定める:

$$d - \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \left(\left(\frac{1}{r} x^t A^t + \frac{1}{r} p^t \right) + \frac{1}{r} q^t T \right) dy \cdot I_{r'}.$$

ここで, d は外微分作用素, $I_{r'}$ は r' 次単位行列を表す. また, 上記の接続形式の部分は単位行列に 1-形式がかけられている形になっているが, これは $E_{(r, A, r', \mathcal{U}, p, q)}$ が射影的平坦束になっているということを示唆している (射影的平坦束の定義等についてはここでは述べないが, 詳細については例えば [10], [7] を見よ).

これで複素ベクトル束 $E_{(r, A, r', \mathcal{U}, p, q)}$ を定義することができたわけであるが, この $E_{(r, A, r', \mathcal{U}, p, q)}$ が正則ベクトル束になるための条件は以下のような形で述べることができる.

命題 3.1. 与えられた 4 つ組 $(r, A, p, q) \in \mathbb{N} \times M(n; \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を用いて定義される複素ベクトル束 $E_{(r, A, r', \mathcal{U}, p, q)} \rightarrow T_{J=T}^{2n}$ が正則ベクトル束となるための必要十分条件は, $AT = (AT)^t$ が成り立つことである.

また, 詳細は省略するが, これらの正則ベクトル $E_{(r, A, r', \mathcal{U}, p, q)}$ は自然に DG 圏 $DG_{T_{J=T}^{2n}}$ を成す. 特に, この $DG_{T_{J=T}^{2n}}$ は $D^b(\text{Coh}(T_{J=T}^{2n}))$ を生成するということが期待されている.

3.2 シンプレクティック幾何学側

本節では, $E_{(r,A,r',\mathcal{U},p,q)} \rightarrow T_{J=T}^{2n}$ と対応するミラー双対な対象について説明する. まず, $\check{T}_{J=T}^{2n}$ 内の n 次元部分多様体 $L_{(r,A,p)}$ を

$$L_{(r,A,p)} := \left\{ \begin{pmatrix} \check{x} \\ \check{y} \end{pmatrix} \in \check{T}_{J=T}^{2n} \mid \check{y} = \frac{1}{r}A\check{x} + \frac{1}{r}p \right\}$$

で定める. さらに, この $L_{(r,A,p)}$ 上における自明な複素直線束 $\mathcal{L}_{(r,A,p,q)} \rightarrow L_{(r,A,p)}$ であって, 平坦接続

$$\nabla_{\mathcal{L}_{(r,A,p,q)}} := d - \frac{i}{2\pi} \frac{1}{r} q^t d\check{x}$$

をもつようなものを考える. これら $L_{(r,A,p)}$ と $\mathcal{L}_{(r,A,p,q)}$ の組 $(L_{(r,A,p)}, \mathcal{L}_{(r,A,p,q)})$ を深谷圏の対象として取り扱うためには, $L_{(r,A,p)}$ が $\check{T}_{J=T}^{2n}$ 内におけるラグランジュ部分多様体となり, かつ $\mathcal{L}_{(r,A,p,q)}$ に対しても条件

$$d\check{x}^t B d\check{y}|_{L_{(r,A,p)}} = \Omega_{\mathcal{L}_{(r,A,p,q)}} = 0$$

を課す必要がある. ここで, $\Omega_{\mathcal{L}_{(r,A,p,q)}}$ は平坦接続 $\nabla_{\mathcal{L}_{(r,A,p,q)}}$ から定まる曲率形式を表す. これらのことを考慮して局所的な計算を行うことにより, 次の命題を得ることができる (命題 3.1 と比較してみよ).

命題 3.2. 与えられた 4 つ組 $(r, A, p, q) \in \mathbb{N} \times M(n; \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を用いて定義される組 $(L_{(r,A,p)}, \mathcal{L}_{(r,A,p,q)})$ を $\check{T}_{J=T}^{2n}$ 上の深谷圏の対象として取り扱うための必要十分条件は, $AT = (AT)^t$ が成り立つことである.

以降, 関係式 $AT = (AT)^t$ を満たす組 $(L_{(r,A,p)}, \mathcal{L}_{(r,A,p,q)})$ を対象とするような, $\check{T}_{J=T}^{2n}$ 上の深谷圏 $Fuk(\check{T}_{J=T}^{2n})$ の充満部分圏を $Fuk_{aff}(\check{T}_{J=T}^{2n})$ と書くことにする.

ここで, SYZ 構成との関係について簡単に述べておく. まず, 複素化されたシンプレクティックトーラス $\check{T}_{J=T}^{2n}$ を自明な特殊ラグランジュトーラスファイバー束 $\check{\pi} : \check{T}_{J=T}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ と見なした場合, $\check{x}$ が底空間 $\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ の局所座標, $\check{y}$ が $\check{\pi} : \check{T}_{J=T}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ のファイバーの局所座標と対応していることに注意する. このとき, $\check{T}_{J=T}^{2n}$ 内のアフラインラグランジュ部分多様体 $L_{(r,A,p)}$ は $\check{\pi} : \check{T}_{J=T}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ のアフラインラグランジュ多重切断

$$s(\check{x}) = \frac{1}{r}A\check{x} + \frac{1}{r}p$$

と見なすことができ, さらに, $r' \in \mathbb{N}$ ($E_{(r,A,r',\mathcal{U},p,q)}$ の階数) は, 各点 $\check{x} \in \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ における $s(\check{x})$ の多重度 (すなわち, 各点 $\check{x} \in \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ に対して $s(\check{x})$ は r' 個の点から成る) と対応している.

3.3 主定理

第 2 章において述べた通り, 全単射 $\text{Ob}^{isom}(DG_{T_{J=T}^{2n}}) \rightarrow \text{Ob}^{isom}(Fuk_{aff}(\check{T}_{J=T}^{2n}))$ を誘導するような写像 $\text{Ob}(DG_{T_{J=T}^{2n}}) \rightarrow \text{Ob}(Fuk_{aff}(\check{T}_{J=T}^{2n}))$ の定義の仕方について説明することが本節の目的である.

まず, $Fuk_{aff}(\check{T}_{J=T}^{2n})$ の対象を定義する際に必要となるパラメータは r, A, p, q の 4 つであるが, 一方, $DG_{T_{J=T}^{2n}}$ の対象 $E_{(r,A,r',\mathcal{U},p,q)}$ を定義する際に必要となるパラメータは $r, A, p, q, \mathcal{U}$ の 5 つである (r' は r, A を与えれば一意的に定まるものであることに注意せよ). したがって, もし写像 $\text{Ob}(DG_{T_{J=T}^{2n}}) \rightarrow \text{Ob}(Fuk_{aff}(\check{T}_{J=T}^{2n}))$ を定義したければ, r, A, p, q に関する情報だけでなく, $\mathcal{U}$ に

関する情報もうまく変換しなければならない．例えば，写像 $\text{Ob}(DG_{T_{j=T}^{2n}}) \rightarrow \text{Ob}(Fuk_{aff}(\check{T}_{j=T}^{2n}))$ を安直に

$$E_{(r,A,r',\mathcal{U},p,q)} \mapsto (L_{(r,A,p)}, \mathcal{L}_{(r,A,p,q)})$$

と定義したとしてみよう．するとこのとき，一般的には与えられた $(r, A, p, q) \in \mathbb{N} \times M(n; \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ に対して $E_{(r,A,r',\mathcal{U},p,q)} \not\cong E_{(r,A,r',\mathcal{U}',p,q)}$ となるような互いに異なる $\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}'$ をとることができるので，明らかに写像 $E_{(r,A,r',\mathcal{U},p,q)} \mapsto (L_{(r,A,p)}, \mathcal{L}_{(r,A,p,q)})$ からは全単射 $\text{Ob}^{isom}(DG_{T_{j=T}^{2n}}) \rightarrow \text{Ob}^{isom}(Fuk_{aff}(\check{T}_{j=T}^{2n}))$ が誘導されない．

以下，上述のことを考慮し，本稿における主定理を証明抜きで述べる．ただし， $\xi, \theta \in \mathbb{R}^n$ は以下のようにして定まるものとする： $\mathcal{U}$ の元 $V_j, U_k \in U(r')$ ($j, k = 1, \dots, n$) に対し， $\xi_j, \theta_k \in \mathbb{R}^n$ を関係式

$$e^{i\xi_j} = \det V_j, \quad e^{i\theta_k} = \det U_k$$

によりそれぞれ定めることができる．このことを考慮し，

$$\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)^t, \quad \theta := (\theta_1, \dots, \theta_n)^t \in \mathbb{R}^n$$

とおく．

定理 3.3 ([9], Theorem 5.1)．写像 $\text{Ob}(DG_{T_{j=T}^{2n}}) \rightarrow \text{Ob}(Fuk_{aff}(\check{T}_{j=T}^{2n}))$ を

$$E_{(r,A,r',\mathcal{U},p,q)} \mapsto (L_{(r,A,p-\frac{r}{r'}\theta)}, \mathcal{L}_{(r,A,p-\frac{r}{r'}\theta, q+\frac{r}{r'}\xi)})$$

と定義すると，これは全単射 $\text{Ob}^{isom}(DG_{T_{j=T}^{2n}}) \rightarrow \text{Ob}^{isom}(Fuk_{aff}(\check{T}_{j=T}^{2n}))$ を誘導する．

参考文献

- [1] M. Abouzaid, I. Smith, Homological mirror symmetry for the four-torus, *Duke Mathematical Journal*, 152.3 (2010), 373-440.
- [2] D. Arinkin, A. Polishchuk, Fukaya category and Fourier transform, *AMS IP STUDIES IN ADVANCED MATHEMATICS*, 2001, 23 : 261-274.
- [3] A. Bondal and M. Kapranov, Enhanced triangulated categories, *Math. USSR Sbornik* 70:93-107, 1991.
- [4] K. Fukaya, Morse homotopy, A^∞ -category, and Floer homologies, In: *Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993)*. *Lecture Notes in Series*, vol. 18, pp. 1-102. Seoul Nat. Univ., Seoul (1993).
- [5] K. Fukaya, Mirror symmetry of abelian varieties and multi theta functions, *J. Algebr. Geom.* 11, 393-512 (2002).
- [6] H. Kajiura, On some deformations of fukaya categories. *Symplectic, Poisson, and Noncommutative Geometry*, 93-130, MSRI Publ. 62, Cambridge Univ. Press, New York, 2014.
- [7] K. Kobayashi, Geometric structure of exact triangles consisting of projectively flat bundles on higher dimensional complex tori, arXiv : mathDG/1705.04007.

- [8] K. Kobayashi, Remarks on the homological mirror symmetry for tori, In preparation.
- [9] K. Kobayashi, The bijectivity of mirror functors on tori, arXiv : mathDG/1905.00692.
- [10] S. Kobayashi, Differential Geometry of Complex Vector Bundles, Princeton University Press, 1987.
- [11] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), Birkhäuser, 1995, pages 120-139, arXiv : math.AG/9411018.
- [12] M. Kontsevich, Y. Soibelman, Homological mirror symmetry and torus fibrations. In Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), pages 203-263. World Sci.Publishing, River Edge, NJ, 2001. math.SG/0011041.
- [13] N. C. Leung, S.-T. Yau, E. Zaslow, From special Lagrangian to Hermitian-Yang-Mills via Fourier-Mukai transform, Adv. Theor. Math. Phys. 4:13191341, 2000.
- [14] A. Polishchuk, A_∞ -structures on an elliptic curve, Comm. Math. Phys. 247, 527 (2004), arXiv : math.AG/0001048.
- [15] A. Polishchuk, E. Zaslow, Categorical mirror symmetry : the elliptic curve, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 443-470 (1998), arXiv : math.AG/9801119.
- [16] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow, Mirror Symmetry is T-duality, Nucl. Phys. B, 479:243-259, 1996.