

# 境界付き 3 次元多様体の Dijkgraaf-Witten 不変量

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻  
木村直記 (Naoki KIMURA)

## 概要

Dijkgraaf-Witten 不変量は向き付けられた閉 3 次元多様体の位相不変量であり、有限群とその 3-コサイクルを与えるごとに定まる不変量である。Dijkgraaf-Witten 不変量は閉 3 次元多様体の 4 面体分割を用いて組合せ的に構成できる。本講演では、Dijkgraaf-Witten 不変量を境界付き 3 次元多様体に対して一般化し、カスプ付き 3 次元双曲多様体に対する計算例を紹介する。

## 1 導入

3 次元多様体の位相不変量である Dijkgraaf-Witten 不変量は、1990 年に 2 人の物理学者 Dijkgraaf と Witten [3] によって導入された。向き付けられた閉 3 次元多様体  $M$  の Dijkgraaf-Witten 不変量は、有限群  $G$  と  $G$  の  $U(1)$  値 3-コサイクル  $\alpha$  を与えるごとに決まる位相不変量で、次のように定義される：

$$Z(M) = \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in \text{Hom}(\pi_1(M), G)} \langle \gamma^*[\alpha], [M] \rangle \in \mathbb{C}.$$

この定義より、Dijkgraaf-Witten 不変量  $Z(M)$  はホモトピー不変量である。

Dijkgraaf と Witten はこの不変量  $Z(M)$  を  $M$  の 4 面体分割を用いて組合せ的に構成できることを述べた。基本類  $[M]$  は 4 面体分割  $K$  における 4 面体の和で表せること、及び  $M$  のループは  $K$  の辺の和で表せ、 $\gamma \in \text{Hom}(\pi_1(M), G)$  は  $K$  の向きの付いた辺の集合から  $G$  への写像 ( $K$  の coloring と呼ぶ) によって表せることがそのアイデアの根拠である。

$$Z(K) = \frac{1}{|G|^a} \sum_{\varphi \in \text{Col}(K)} \prod_{4 \text{ 面体}} \alpha(g, h, k)^{\pm 1}.$$

ここで、 $a$  は  $K$  の頂点の個数、 $g, h, k \in G$  は 4 面体の辺の color である。

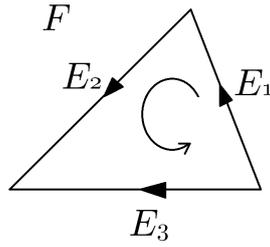
Wakui [6] により、この  $Z(K)$  が 4 面体分割  $K$  の選び方に依らず、 $M$  の位相不変量となることが示された。

## 2 Dijkgraaf-Witten 不変量の組合せ的な定義

Dijkgraaf-Witten 不変量を定義する際に必要となる概念を以下で説明する。

$G$  を群とする。

$$\alpha : G \times G \times G \rightarrow U(1)$$



$$\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 1, \epsilon_3 = -1.$$

図1 辺の符号.

が次の条件を満たすとき,  $\alpha$  を  $G$  の  $U(1)$  値 3-コサイクルという.

$$\alpha(h, k, l)\alpha(g, hk, l)\alpha(g, h, k) = \alpha(gh, k, l)\alpha(g, h, kl) \quad (\forall g, h, k, l \in G).$$

この条件をコサイクル条件と呼ぶ.

本稿では, 4 面体分割を, 4 面体の集合と face-pairing map(4 面体たちの面を 2 つずつ組にして, 面の貼り合わせを指定する写像) の組と定義し, 単体的複体を成していないような分割も 4 面体分割と呼ぶ. 例えば,  $S^3$  は 2 個の  $B^3$  を境界で貼り合わせることで得られるが, 2 個の  $B^3$  を 4 面体と見たとき, その共通部分は 4 つの面であるから, この分割は単体的複体になっていないが, これも  $S^3$  の 4 面体分割と呼ぶ. 単体的複体を成す 4 面体分割を本稿では単体的 4 面体分割と呼ぶことにする.

向き付けられた閉 3 次元多様体  $M$  の 4 面体分割  $K$  を 1 つ固定する.

$$\varphi : \{K \text{ の向きの付いた辺} \} \rightarrow G$$

が次の条件を満たすとき  $\varphi$  を  $K$  の coloring という.  $K$  の任意の向きの付いた面  $F$  とその 3 辺  $E_1, E_2, E_3$  に対して

$$\varphi(E_3)^{\epsilon_3} \varphi(E_2)^{\epsilon_2} \varphi(E_1)^{\epsilon_1} = 1 \in G$$

ここで, 向きの付いた辺  $E_i$  の符号  $\epsilon_i$  は次で定める (図 1).

$$\epsilon_i = \begin{cases} 1 & E_i \text{ の向きと } \partial F \text{ の向きが一致するとき} \\ -1 & E_i \text{ の向きと } \partial F \text{ の向きが逆のとき.} \end{cases}$$

$K$  の coloring  $\varphi$  が  $\gamma \in \text{Hom}(\pi_1(M), G)$  に由来するため, この条件を要請する.  $K$  の coloring 全体の集合を  $\text{Col}(K)$  と書く.

$K$  の各辺に対する向きの決め方であって,  $K$  の各面  $F$  に対して,  $F$  の 3 辺の向きが巡回的にならないようなもの (図 2 左図) を  $K$  の局所順序 (または branching) という.  $K$  の 4 面体  $\sigma$  の頂点  $v$  に対して,  $v$  から出て行く向きの  $\sigma$  の辺の本数が  $i$  本であるとき,  $v$  を type  $i$  の頂点と呼ぶことにする.  $K$  の局所順序を 1 つ決めると,  $K$  の各 4 面体  $\sigma$  は type 0, type 1, type 2, type 3 の頂点を 1 つずつ持つ (図 2 右図).  $\sigma$  の type  $i$  の頂点を  $v_i$  とすると,  $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$  と  $\sigma$  の 4 頂点に順序が定まる. この順序により,  $\sigma$  に向きが定まる. このように,  $K$  の局所順序を 1 つ決めると,  $K$  の各 4 面体  $\sigma$  に向きが定まる.  $\sigma$  の符号  $\epsilon_\sigma$  を次のように定める:

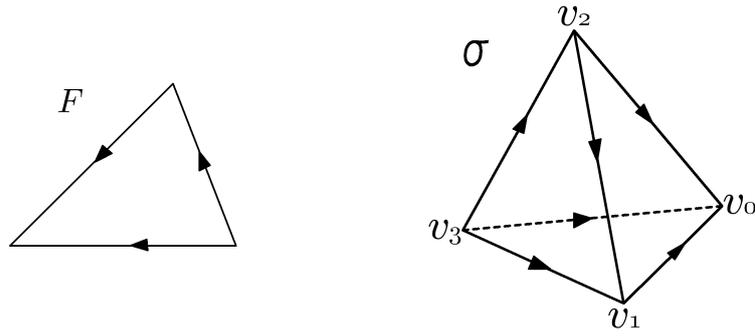


図 2 局所順序.

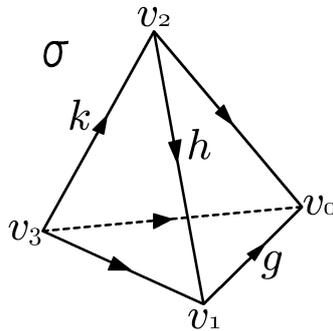


図 3 Colored tetrahedron.

$$\epsilon_\sigma = \begin{cases} 1 & \text{局所順序による } \sigma \text{ の向きが } M \text{ の向きと一致するとき} \\ -1 & \text{局所順序による } \sigma \text{ の向きが } M \text{ の向きと逆のとき.} \end{cases}$$

$K$  の局所順序及び coloring  $\varphi$  を決める. このとき,  $K$  の 4 面体  $\sigma$  の各辺には coloring  $\varphi$  により,  $G$  の元 (その辺の color と呼ぶ) が振られている. これを colored tetrahedron と呼び,  $(\sigma, \varphi)$  と書く (図 3).  $(\sigma, \varphi)$  に対して,  $G$  の  $U(1)$  値 3-コサイクル  $\alpha$  を用いて, 次のような  $U(1)$  の元を対応させる:

$$W(\sigma, \varphi) = \alpha(g, h, k)^{\epsilon_\sigma}.$$

ここで,  $g = \varphi(\langle v_0 v_1 \rangle)$ ,  $h = \varphi(\langle v_1 v_2 \rangle)$ ,  $k = \varphi(\langle v_2 v_3 \rangle)$  である. この  $W(\sigma, \varphi)$  を colored tetrahedron  $(\sigma, \varphi)$  の symbol と呼ぶ.

**定義 2.1.**  $M$  を向き付けられた閉 3 次元多様体,  $G$  を有限群,  $\alpha$  を  $G$  の  $U(1)$  値 3-コサイクルとする.  $K$  を  $M$  の局所順序付き 4 面体分割とする.  $K$  の頂点の個数を  $a$  とし,  $K$  の 4 面体を  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  とする. このとき, Dijkgraaf-Witten 不変量  $Z(K)$  を次で定義する:

$$Z(K) = \frac{1}{|G|^a} \sum_{\varphi \in \text{Col}(K)} \prod_{i=1}^n W(\sigma_i, \varphi).$$

Wakui [6] は次を示した.

定理 2.2 (Wakui [6]).  $K$  が単体的 4 面体分割で,  $K$  の頂点集合に全順序が与えられているとする. このとき,  $Z(K)$  は  $K$  の選び方 (単体的 4 面体分割の選び方とその頂点集合上の全順序の選び方) に依らず,  $M$  の位相不変量となる.

Dijkgraaf-Witten 不変量は, 基本群が同型な 2 つのレンズ空間  $L(5, 1)$  と  $L(5, 2)$  を区別できる.

### 3 Dijkgraaf-Witten 不変量の境界付き 3 次元多様体への一般化

前節では閉 3 次元多様体  $M$  に対して,  $M$  の 4 面体分割を用いて Dijkgraaf-Witten 不変量  $Z(M)$  を定義した.  $M$  が境界を持つ場合にも, 4 面体分割を用いて Dijkgraaf-Witten 不変量を定義することができるが, 閉 3 次元多様体の場合と違って, 境界付き 3 次元多様体  $M$  の Dijkgraaf-Witten 不変量  $Z(M, \psi) \in \mathbb{C}$  は,  $\partial M$  の局所順序付き 3 角形分割  $L$  及び  $L$  の coloring  $\psi$  に依存する.

本研究では,  $\partial M$  の局所順序付き 3 角形分割及びその coloring に依らず,  $\partial M \neq \emptyset$  の場合も  $M$  だけで値が決まるように Dijkgraaf-Witten 不変量を一般化した.

Dijkgraaf-Witten 不変量の一般化のために, 一般化された理想 4 面体分割という概念を導入する. 理想 4 面体分割とは, 4 面体の集合を face-pairing map で貼り合わせた後に, 全ての頂点を取り除いたものである. 取り除かれた頂点を理想頂点と呼ぶ. 境界付き 3 次元多様体  $M$  の理想 4 面体分割  $K$  において,  $K$  の各理想頂点は  $\partial M$  の各連結成分に対応する. 3 次元多様体  $M$  の一般化された理想 4 面体分割を, 理想頂点と内部の頂点 (取り除かれない頂点) を両方持っている (片方だけでも良い) ような  $M$  の 4 面体分割であって, 各理想頂点は  $\partial M$  の各連結成分に対応するものと定義する. 理想頂点のみの一般化された理想 4 面体分割は理想 4 面体分割に他ならない. また, 閉 3 次元多様体の一般化された理想 4 面体分割は, 理想頂点がないことから, 前節で扱った通常の 4 面体分割となる.

境界付き 3 次元多様体  $M$  の一般化された理想 4 面体分割  $K$  に対しても,  $K$  の coloring や局所順序, colored tetrahedron の symbol などを前節と同様に定義できる. 次の定理が本講演の主結果である.

定理 3.1 (K. [4]).  $M$  を向き付けられたコンパクト 3 次元多様体 ( $\partial M \neq \emptyset$  でもよい),  $G$  を有限群,  $\alpha$  を  $G$  の  $U(1)$  値 3-コサイクルとする.  $K$  を  $M$  の局所順序付き一般化された理想 4 面体分割とする.  $K$  の内部の頂点の個数を  $a$  とし,  $K$  の 4 面体を  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  とする. 一般化された Dijkgraaf-Witten 不変量  $Z(K)$  を次で定義する:

$$Z(K) = \frac{1}{|G|^a} \sum_{\varphi \in \text{Col}(K)} \prod_{i=1}^n W(\sigma_i, \varphi).$$

このとき,  $Z(K)$  は  $K$  の選び方 (一般化された理想 4 面体分割の選び方とその局所順序の選び方) に依らず,  $M$  の位相不変量となる.

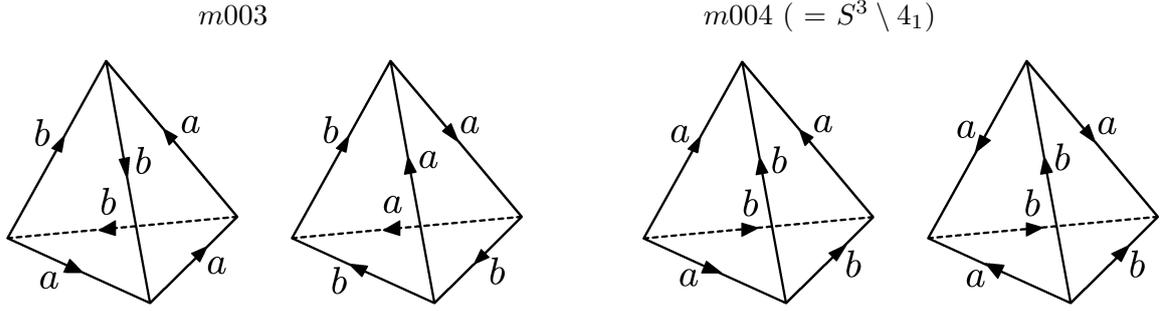


図4  $m003$  と  $m004$  の理想4面体分割.

## 4 一般化された Dijkgraaf-Witten 不変量の計算例

一般化された Dijkgraaf-Witten 不変量の計算を行い, 双曲体積と Turaev-Viro 不変量が一致するが, 一般化された Dijkgraaf-Witten 不変量は異なるカスプつき双曲3次元多様体の組, 及び双曲体積とホモロジーが一致するが, 一般化された Dijkgraaf-Witten 不変量は異なるカスプつき双曲3次元多様体の組を得た. 以下の3次元多様体の名称は SnapPy [2] に従う.

(1)  $m003$  と  $m004 (= S^3 \setminus 4_1)$

$$\text{Vol}(m003) = \text{Vol}(m004) \approx 2.02988, \quad \text{TV}(m003) = \text{TV}(m004).$$

$$H_1(m003; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_5, \quad H_1(m004; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

$G = \mathbb{Z}_5$ ,  $H^3(\mathbb{Z}_5, U(1)) \cong \mathbb{Z}_5$  の生成元  $\alpha$  に対して

$$Z(m003) = \frac{1}{2} \left( 5 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right), \quad Z(m004) = 1.$$

(2)  $m006$  と  $m007$

$$\text{Vol}(m006) = \text{Vol}(m007) \approx 2.56897, \quad \text{TV}(m006) = \text{TV}(m007).$$

$$H_1(m006; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_5, \quad H_1(m007; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3.$$

$G = \mathbb{Z}_5$ ,  $H^3(\mathbb{Z}_5, U(1)) \cong \mathbb{Z}_5$  の生成元  $\alpha$  に対して

$$Z(m006) = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{i}{4} \left( \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \right), \quad Z(m007) = 1.$$

(3)  $m009$  と  $m010$

$$\text{Vol}(m009) = \text{Vol}(m010) \approx 2.66674, \quad \text{TV}(m009) = \text{TV}(m010).$$

$$H_1(m009; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, \quad H_1(m010; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_6.$$

$G = \mathbb{Z}_3$ ,  $H^3(\mathbb{Z}_3, U(1)) \cong \mathbb{Z}_3$  の生成元  $\alpha$  に対して

$$Z(m009) = 1, \quad Z(m010) = -\sqrt{3}i.$$

以上の3組はホモロジーで区別できるが, 次のカスプつき双曲3次元多様体の組は双曲体積とホモロジーが一致するが, 一般化された Dijkgraaf-Witten 不変量で区別できる.

(4)  $s_{778}$  と  $s_{788}$

$$\text{Vol}(s_{778}) = \text{Vol}(s_{788}) \approx 5.33349, \quad H_1(s_{778}; \mathbb{Z}) = H_1(s_{788}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}.$$

$$TV(s_{778}) = 6 - 2\sqrt{5}, \quad TV(s_{788}) = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

$G = \mathbb{Z}_{12}$ ,  $H^3(\mathbb{Z}_{12}, U(1)) \cong \mathbb{Z}_{12}$  の生成元  $\alpha$  に対して

$$Z(s_{778}) = -6, \quad Z(s_{788}) = 3 - 2\sqrt{3}.$$

## 参考文献

- [1] B.A.Burton, R.Budney, W.Pettersson, et al., *Regina: Software for low-dimensional topology*, <http://regina-normal.github.io/>, 1999-2016.
- [2] M.Culler, N.M.Dunfield, M.Goerner, and J.R.Weeks, *SnapPy, a computer program for studying the geometry and topology of 3-manifolds*, <http://snappy.computop.org/>.
- [3] R.Dijkgraaf and E.Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, *Comm. Math. Phys.* 129 (1990), no. 2, 393-429.
- [4] N.Kimura, *A generalization of the Dijkgraaf-Witten invariants for cusped 3-manifolds*, arXiv:1805.05130.
- [5] V.G.Turaev and O.Y.Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*, *Topology* 31 (1992), 865-902.
- [6] M.Wakui, *On Dijkgraaf-Witten invariant for 3-manifolds*, *Osaka J. Math.* 29 (1992), no. 4, 675-696.
- [7] M.Wakui, 再考「On Dijkgraaf-Witten invariants of 3-manifolds」, [http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~wakui/Dijkgraaf-Witten\\_revised.pdf](http://www2.itc.kansai-u.ac.jp/~wakui/Dijkgraaf-Witten_revised.pdf), 2011.