

Monge-Ampère 方程式の一般化について

広島大学大学院 理学研究科 数学専攻

川又将大 (Masahiro KAWAMATA) *

1 導入

本講演の内容は広島大学の澁谷一博氏との共同研究に基づく。

Monge-Ampère 方程式は古くから知られている 2 独立変数 1 未知関数 2 階偏微分方程式のクラスであり、波動方程式や熱方程式などの数理物理学的に重要な方程式を数多く含んでいる。この方程式のクラスは、接触変換と呼ばれる幾何学的な変換で保存されるということが知られており、さらに方程式自体は未知関数の導関数を成分とする行列の小行列式の和で書けるという性質を持っている。このような性質を持つ他の方程式として、森本徹氏が [1] において定義した、独立変数の個数が一般化された Monge-Ampère 方程式が挙げられる。これは、外微分式系と呼ばれる É. Cartan, É. Goursat の時代から研究されてきた概念を用いて、Monge-Ampère 方程式を Monge-Ampère system という形で幾何学的に定式化し、それに対応する方程式として得られたものである。しかし、これら以外に接触変換で不変な方程式はあまり知られておらず、このような方程式を見つけることは重要な問題である。

今回、講演者らは Monge-Ampère system を一般化し、接触変換で不変であるような方程式の新しいクラスを求めた。さらに、一般化された方程式の解と system の積分多様体の間の対応を明示的に与えた。

本講演に登場する多様体、微分形式などはすべて C^∞ 級であることに注意する。

2 外微分式系、積分多様体

多様体 M 上の微分形式全体の集合、および M 上の i 次微分形式全体の集合をそれぞれ $\Omega^*(M)$, $\Omega^i(M)$ によって表す。また、 $\Omega^*(M)$ には通常の和とウェッジ積で非可換環の構造が入ることに注意しておく。

定義 2.1. $\Omega^*(M)$ の部分集合 $\mathcal{I}$ が以下の 2 つの条件を満たすとき、 M 上の**外微分式系**であるという：

- (1) $\mathcal{I}$ は $\Omega^*(M)$ の斉次イデアルである。つまり $\mathcal{I}$ は $\Omega^*(M)$ のイデアルであって

$$\mathcal{I} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (\mathcal{I} \cap \Omega^i(M))$$

と表示できる。

* email: masahiro-kawamata@hiroshima-u.ac.jp, URL: <https://sites.google.com/site/masahirokawamata3152/>

(2) $\mathcal{I}$ は M 上の外微分 d で閉じている. つまり $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$ が成り立つ.

定義 2.2. $\omega_i \in \Omega^{k_i}(M)$ ($1 \leq i \leq r$) とするとき,

$$\begin{aligned}\{\omega_1, \dots, \omega_r\}_{\text{alg}} &:= \left\{ \sum_{i=1}^r \varpi_i \wedge \omega_i \mid \varpi_i \in \Omega^*(M) \right\}, \\ \{\omega_1, \dots, \omega_r\}_{\text{diff}} &:= \{\omega_i, d\omega_i \mid 1 \leq i \leq r\}_{\text{alg}},\end{aligned}$$

と定める. 特に $\{\omega_1, \dots, \omega_r\}_{\text{diff}}$ を $\omega_1, \dots, \omega_r$ **で生成された外微分式系** とよぶ.

以下, 外微分式系の例をいくつか述べる.

例 2.3.

- (1) $M = \mathbb{R}^3 = \{(x, z, p)\}$ とし $\mathcal{I} := \{dp \wedge dx\}_{\text{alg}}$ とする. $\mathcal{I}$ が M 上の外微分式系になることを示す: 任意に $\omega \in \mathcal{I}$ をとると, 定義から $\omega = \eta \wedge (dp \wedge dx)$ なる $\eta \in \Omega^*(M)$ がある. このとき

$$d\omega = d\eta \wedge dp \wedge dx \in \mathcal{I}$$

となるため $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$ である. さらに, 上記 η を $\eta = \sum_{i=0}^3 \eta_i$ ($\eta_i \in \Omega^i(M)$) と書いておくと

$$\begin{aligned}\eta \wedge (dp \wedge dx) &= \sum_{i=0}^3 \eta_i \wedge (dp \wedge dx) \\ &= \eta_0(dp \wedge dx) + \eta_1 \wedge (dp \wedge dx) \in (\mathcal{I} \cap \Omega^1(M)) \oplus (\mathcal{I} \cap \Omega^2(M))\end{aligned}$$

が分かる. これより $\mathcal{I} = (\mathcal{I} \cap \Omega^1(M)) \oplus (\mathcal{I} \cap \Omega^2(M))$ であることが分かるから, $\mathcal{I}$ は外微分式系になる.

- (2) M を (1) と同様にとり $\mathcal{I} = \{\eta \wedge (dz + dx \wedge dp) \mid \eta \in \Omega^*(M)\}$ とする. $\mathcal{I}$ は M 上の外微分式系でないことを示す: 任意に $\omega \in \mathcal{I}$ をとると $\omega = \eta \wedge (dz + dx \wedge dp)$ となる $\eta \in \Omega^*(M)$ がある. $\eta = \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$ ($\eta_i \in \Omega^i(M)$) として代入すると

$$\omega = \eta_0 dz + \eta_0 dx \wedge dp + \eta_1 \wedge dz + \eta_1 \wedge dx \wedge dp + \eta_2 \wedge dz$$

を得る. $\mathcal{I} \cap \Omega^0(M) = \{0\}$ は明らかである. また $\omega \in \mathcal{I} \cap \Omega^1(M)$ とすると $\omega \in \Omega^1(M)$ であるため, $\eta_0 = \eta_1 = \eta_2 = 0$ である必要があり $\omega = 0$, つまり $\mathcal{I} \cap \Omega^1(M) = \{0\}$ が分かる. 同様の議論で $\mathcal{I} \cap \Omega^2(M) = \{0\}$ が分かる. 一方 $dz \wedge dx \wedge dp = dz \wedge (dz + dx \wedge dp) \in \mathcal{I}^{(3)}$ より $\mathcal{I} \cap \Omega^3(M) \neq \{0\}$ であるが, 明らかに $\mathcal{I} \neq \mathcal{I} \cap \Omega^3(M)$ であるため, $\mathcal{I}$ は外微分式系でない.

定義 2.4. M を多様体とし, $\mathcal{J}$ を $\Omega^*(M)$ のイデアルとする. このとき $\omega, \eta \in \Omega^*(M)$ に対し, ω と η が $\mathcal{J}$ を法として合同であるとは, $\omega - \eta \in \mathcal{J}$ が成り立つことである. このとき $\omega \equiv \eta \pmod{\mathcal{J}}$ と書く.

次に偏微分方程式を考えるために必要な jet 空間を定義する.

定義 2.5.

$$J^k(n, m) := \{(x_i, z^\alpha, p_I^\alpha) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq |I| \leq k\}$$

を **k -jet 空間** とよぶ. ここで $I = (i_1, \dots, i_r)$ ($i_j \in \{1, \dots, n\}$) は多重指数であり, $|I|$ はその長さである. さらに,

$$\omega^\alpha := dz^\alpha - \sum_{i=1}^n p_i^\alpha dx_i, \quad \omega_I^\alpha := dp_I^\alpha - \sum_{i=1}^n p_{Ii}^\alpha dx_i \quad (1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq |I| \leq k-1),$$

として, $\mathcal{C}^k := \{\omega^\alpha, \omega_I^\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq |I| \leq k, \omega_{\sigma(I)}^\alpha = \omega_I^\alpha (\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k)\}_{\text{diff}}$ とする. このとき外微分式系 $\mathcal{C}^k$ を $J^k(n, m)$ 上の **canonical system** とよぶ.

注意 2.6. 定義 2.5 において, p_I^α に関しては偏導関数は偏微分する順序に依らないことに対応して

$$p_I^\alpha = p_{I'}^\alpha \iff \exists \sigma \in \mathfrak{S}_r (\sigma(I) = I')$$

としている. これによつて $q = n + m + m \sum_{l=1}^k n H_l$ とおくと, 多様体として $J^k(n, m) \simeq \mathbb{R}^q$ である.

例 2.7. $k = 1, m = 1$ のとき, 多様体として $J^1(n, 1) = \{(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)\} \simeq \mathbb{R}^{2n+1}$ である. またこのとき, $\mathcal{C}^1 = \{dz - \sum_{i=1}^n p_i dx_i\}_{\text{diff}}$ である. つまり $(J^1(n, 1), \mathcal{C}^1)$ は $(2n+1)$ 次元接触多様体である.

最後に偏微分方程式の解に対応する概念である積分多様体を定義する.

定義 2.8. $\mathcal{I}$ を M 上の外微分式系とする. M の部分多様体 $\iota: N \hookrightarrow M$ が任意の $\omega \in \mathcal{I}$ に対して $\iota^* \omega = 0$ を満たすとき, N を $\mathcal{I}$ の **積分多様体** とよぶ.

3 Monge-Ampère 方程式, Monge-Ampère system

本節では Monge-Ampère 方程式, および [1] において述べられている Monge-Ampère system の定義とそれらの間の対応を紹介する.

定義 3.1 ([1]). n 変数 2 階 1 未知関数の単独型偏微分方程式

$$\sum_{l=0}^n \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{n-l} \leq n}} F_{i_1 \dots i_l}^{j_1 \dots j_{n-l}} \Delta_{j_1 \dots j_{n-l}}^{i_1 \dots i_l}(z) = 0 \quad (F_{i_1 \dots i_l}^{j_1 \dots j_{n-l}} \text{ は } x_i, z, z_{x_i} \text{ の関数}),$$

$$\Delta_{j_1 \dots j_{n-l}}^{i_1 \dots i_l}(z) := \text{sgn} \left(\begin{array}{c} 1, 2, \dots, l, l+1, \dots, n \\ i_1, i_2, \dots, i_l, k_1, \dots, k_{n-l} \end{array} \right) \begin{vmatrix} z_{x_{j_1} x_{k_1}} & \cdots & z_{x_{j_1} x_{k_{n-l}}} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{x_{j_{n-l}} x_{k_1}} & \cdots & z_{x_{j_{n-l}} x_{k_{n-l}}} \end{vmatrix},$$

(ただし $\{1, \dots, n\} = \{i_1, \dots, i_l, k_1, \dots, k_{n-l}\}$ ($k_1 < \dots < k_{n-l}$)),

を **Monge-Ampère 方程式** (MA 方程式) という.

例 3.2. $n = 2$ のときは古典的によく知られた以下の方程式が得られる:

$$Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} + D + E(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) = 0,$$

$$(A, B, C, D, E \text{ は } x, y, z, z_x, z_y \text{ の関数}).$$

定義 3.3 ([1]). $J^1(n, 1)$ 上の外微分式系 $\mathcal{I}$ が $\Psi \in \Omega^n(J^k(n, m))$ を用いて $\mathcal{I} = \{\mathcal{C}^1, \Psi\}_{\text{diff}}$ と書かれるとき, $\mathcal{I}$ を $J^1(n, 1)$ 上の **Monge-Ampère system** (MAS) とよぶ.

次の定理は MA 方程式と MAS の間のある種の対応を述べたものである.

定理 3.4 ([1]). 任意の MA 方程式に対して MAS が存在し, MA 方程式の解と MAS の積分多様体は対応する. またこの逆も成り立つ. 即ち, 任意の MAS に対して MA 方程式が存在し, MA 方程式の解と MAS の積分多様体は対応する.

4 主結果

本節では, Monge-Ampère system, Monge-Ampère 方程式の一般化, およびそれらの間の対応を述べる.

定義 4.1. $J^k(n, m)$ 上の外微分式系 $\mathcal{I}$ が $\Psi \in \Omega^l(J^k(n, m))$ を用いて $\mathcal{I} = \{\mathcal{C}^k, \Psi\}_{\text{diff}}$ と書かれるとき, $\mathcal{I}$ を $J^k(n, m)$ 上の **generalized Monge-Ampère system** (GMAS) とよぶ.

注意 4.2.

- (1) $k = 1, m = 1, l = n$ としたとき, 定義から明らかに GMAS は MAS に一致する.
- (2) GMAS の定義では l の動く範囲は指定していないが, $\Psi \not\equiv 0 \pmod{\mathcal{C}^k}$ であれば $1 \leq l \leq n$ が成り立つ. つまり, 本質的に GMAS を考えたい場合は $1 \leq l \leq n$ とすればよいことがわかる.
- (3) $J^k(n, m)$ 上の GMAS 全体の集合は $J^k(n, m)$ 上の接触変換で閉じることが定義から直ちにわかる.

記号 4.3. 以下で使う記号を設定しておく:

- $S_k := \{(i_1, \dots, i_k) \mid 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$,
- $z_{Ij} := z_{x_{i_1} \dots x_{i_k} x_j}$ ($I = (i_1, \dots, i_k)$)

定義 4.4. 未知関数の導関数からなる行列 $M(n, m; k)$ を

$$M(n, m; k) := \begin{pmatrix} (z_{I1}^1)_{I \in S_k} & \cdots & (z_{I1}^m)_{I \in S_k} \\ \vdots & & \vdots \\ (z_{In}^1)_{I \in S_k} & \cdots & (z_{In}^m)_{I \in S_k} \end{pmatrix}$$

とおく. ここで $(z_{Ij}^\alpha)_{I \in S_k}$ は S_k に辞書式順序をいれて, その順序に関して z_{Ij}^α を左から昇順に並

べた ${}_nH_k$ 次元横ベクトルである. このとき, 以下の Step 1 から Step 4 を施して得られる偏微分方程式を **generalized Monge-Ampère 方程式 (GMA 方程式)** という:

Step 1 行列 $M(n, m; k)$ から l 行取り出し, 取り出した行の番号を $\nu_1, \dots, \nu_l$ ($\nu_1 < \dots < \nu_l$) とする.

Step 2 Step 1 で取り出した行列の l 次以下の全ての小行列式を考える. ここで, このような小行列式は一般に以下の形で書けることに注意する:

$$\begin{vmatrix} z_{I_1^{\alpha_1} j_1^{\alpha_1}}^{\alpha_1} & \cdots & z_{I_{\lambda_1}^{\alpha_1} j_1^{\alpha_1}}^{\alpha_1} & \cdots & z_{I_{\lambda_t}^{\alpha_t} j_1^{\alpha_1}}^{\alpha_t} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{I_1^{\alpha_1} j_{\lambda_t}^{\alpha_t}}^{\alpha_1} & \cdots & z_{I_{\lambda_1}^{\alpha_1} j_{\lambda_t}^{\alpha_t}}^{\alpha_1} & \cdots & z_{I_{\lambda_t}^{\alpha_t} j_{\lambda_t}^{\alpha_t}}^{\alpha_t} \end{vmatrix}, \quad \left(\sum_{r=1}^t \lambda_r = l - \lambda_0 \right). \quad (4.1)$$

また

$$\{i_1, \dots, i_{\lambda_0}\} := \{\nu_1, \dots, \nu_l\} \setminus \{j_1^{\alpha_1}, j_2^{\alpha_1}, \dots, j_{\lambda_t}^{\alpha_t}\} \quad (i_1 < \dots < i_{\lambda_0}).$$

とおく.

Step 3 Step 2 の (4.1) 式に $x_i, z^\alpha, p_I^\alpha$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq |I| \leq k$) を変数とする関数

$$\operatorname{sgn} \left(\begin{array}{c} i_1, \dots, i_{\lambda_0}, j_1^{\alpha_1}, j_2^{\alpha_1}, \dots, j_{\lambda_t}^{\alpha_t} \\ \nu_1, \dots, \nu_{\lambda_0}, \nu_{\lambda_0+1}, \nu_{\lambda_0+2}, \dots, \nu_l \end{array} \right) A_{i_1 \dots i_{\lambda_0}}^{I_1^{\alpha_1} I_2^{\alpha_1} \dots I_{\lambda_t}^{\alpha_t}}$$

をかける. この操作を Step 1 で選んだ行列の l 次以下の小行列式全てに対して行い, 得られたものを足し合わせ “=0” とする.

Step 4 Step 1 から Step 3 を $M(n, m; k)$ から l 行取り出す取り出し方全てに対して行い, それらを連立させる.

注意 4.5. 自然数 l ($1 \leq l \leq n$) を固定するとき, 行列 $M(n, m; k)$ から定まる GMA 方程式は, 一般には $(k+1)$ 階 n 変数 m 未知関数の偏微分方程式であり, 式の個数は ${}_nC_l$ である.

例 4.6.

(1) $n = 2, k = 1, m = 1, l = 2$ のとき

$$M(2, 1; 1) = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{yx} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix}$$

である. このとき, $l = 2$ であるため $M(2, 1; 1)$ から 2 行取り出し (つまり $M(2, 1; 1)$ そのもの), その中の 2 次以下の小行列式を全て考え, それらを注意 4.5 にある関数を掛けながら足し合わせればよい. よって今の場合の GMA 方程式は

$$Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} + D + E(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) = 0$$

(A, B, C, D, E は x, y, z, z_x, z_y の関数)

となる. つまり, この場合の GMA 方程式は古典的な MA 方程式のことである.

(2) $n = 2, k = 1, m = 1, l = 1$ のとき

$$M(2, 1; 1) = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{yx} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix}$$

である。このとき $l = 1$ であるため $M(2, 1; 1)$ から 1 行取り出し、その 1 次以下の小行列式を全て考え、それらを注意 4.5 にある関数を掛けながら足し合わせればよい。今、行の取り出し方は 2 通りあるため、GMA 方程式は

$$\begin{cases} Az_{xx} + Bz_{xy} + C = 0 \\ Az_{xy} + Bz_{yy} + D = 0 \end{cases} \quad (A, B, C, D \text{ は } x, y, z, z_x, z_y \text{ の関数})$$

となる。この方程式は 1 つの未知関数に対して方程式が 2 つあるという過剰決定系になっており、今までに知られている Monge-Ampère 方程式では捉えられない方程式の 1 つである。

(3) $n = 2, k = 2, m = 1, l = 2$ のとき

$$M(2, 1; 2) = \begin{pmatrix} z_{xxx} & z_{xyx} & z_{yyx} \\ z_{xxy} & z_{xyy} & z_{yyy} \end{pmatrix}$$

である。今の場合 $l = 2$ であるため、上記行列の 2 次以下の小行列式を全て考え、それらを注意 4.5 にある関数を掛けながら足し合わせればよい。よって、GMA 方程式は

$$\begin{aligned} & A - B_1 z_{xxx} - B_2 z_{xyx} - B_3 z_{yyx} - B_4 z_{xxy} - B_5 z_{xyy} - B_6 z_{yyy} \\ & + C_1 \begin{vmatrix} z_{xxx} & z_{xyx} \\ z_{xxy} & z_{xyy} \end{vmatrix} + C_2 \begin{vmatrix} z_{xxx} & z_{yyx} \\ z_{xxy} & z_{yyy} \end{vmatrix} + C_3 \begin{vmatrix} z_{xyx} & z_{yyx} \\ z_{xyy} & z_{yyy} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

(A, B_i, C_j は $x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$ の関数.)

となる。ここで、 $B_1 = -1, A = z_y + z z_x$, その他は 0 とすると、偏微分方程式

$$z_y + z z_x + z_{xxx} = 0$$

を得る。これは Korteweg-de Vries (KdV) 方程式である。

以下が本講演の主定理である。

定理 4.7. 任意の $(k+1)$ 階の HMA 方程式に対して、 k -jet 空間上で定義された HMAS が存在して、与えられた方程式の解と HMAS の積分多様体は対応する。またこの逆も成り立つ。

上記定理は、 $(k+1)$ 階の HMA 方程式は階数が 1 つ下がった k -jet 空間上の HMAS で捉えることができるということを主張している。これによって、 $(k+1)$ 階の HMA 方程式の範疇に入るような方程式は、外微分式系を用いると k 階の方程式として扱えるということがわかる。

参考文献

- [1] Morimoto T., Monge-Ampère equations viewed from contact geometry, in: Symplectic Singularities and Geometry of Gauge Fields, Banach Center Publ. 39 (Polish Acad. Sci., Warsaw, 1995), 105–120.