

Association scheme 上の difference set

広島大学大学院 理学研究科 数学専攻

梶浦大起 (Hiroki Kajiura)*

1 導入と本稿で用いる記号

本稿の目的は、difference set や association scheme を知らない読者向けに次のことを解説する。

#1 Association scheme の定義や、difference set の定義や背景を簡単に紹介する (2 節, 3 節)。

#2 Association scheme 上において、difference set を一般化したものを定義する (4 節)。

#3 筆者の新しい結果として、ある Association scheme のクラスについて、Association scheme 上の difference set と block design の関係を示す (4 節)。

特に、#3 はのちに述べる difference set の非常に重要な性質の一般化となっている。また、様々な箇所で簡単な例をいくつか紹介した。

本稿では、特に断りが無い限り以下のような記号を用いる：

G : 有限群 (e を単位元とする), 特に断りがなければ X に推移的に作用しているものとしても扱う,

X : 有限集合,

$\mathcal{I}$: 基点 i_0 付有限集合,

$R: X \times X \longrightarrow \mathcal{I}$,

$\mathfrak{X} := (X, \mathcal{I}, R)$: association scheme,

$X^{(k)} := \{B \subset X \mid \#B = k\}$,

$Y \subset X, GY := \{g \cdot Y \mid g \in G\}$,

$\Lambda_T(\mathcal{B}) := \{B \in \mathcal{B} \mid T \subset B\}$,

$L_i(Y) := \{(x, y) \in Y \times Y \mid R(x, y) = i\}$,

k_i : $i \in \mathcal{I}$ の分岐指数,

2 古典的 difference set に関する予備知識

本稿では、これまで一般的によく知られていた difference set を古典的 difference set と呼ぶことにする。本節では、古典的 difference set に対して定義や基本的な例、重要な性質について述べる。最初に古典的 difference set の定義について述べる。

定義 1 (古典的 difference set). G の空でない真部分集合 Y が difference set である $:\iff \exists l \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall a \in G \setminus \{e\}, l = \#\{(x, y) \in Y \times Y \mid x^{-1}y = a\}$ となること。

* Email: hikajiura@hiroshima-u.ac.jp

例 2. $G := \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ として, $Y := \{0, 1, 3\} \subset G$ とすると Y は difference set である。 (例了)

(古典的な) difference set は, 古くは Bose がアーベル群を用いて「対称釣合型不完備配置」(以下対称 BIBD, 後に定義を述べる) を構成するためのテクニックとして示したもの (詳しくは [2] などを参照) が知られており, Bruck が「有限群 G が推移的に作用する l -平面^{*1}は G の (古典的な) difference set から構成できる」という主張によって一般化を行った ([5] を参照)。本節の残りでは, λ -平面と言う用語を用いず直接的に (古典的な) difference set と block design の関係を述べる。

まず最初に block design の定義を述べる。

定義 3 (t -design). 空でない $\mathcal{B} \subset X^{(k)}$ が t -design である

$:\iff \exists \lambda \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall T \subset X^{(t)}, \# \Lambda_T(\mathcal{B}) = \lambda$ となること。

例 4. $X := \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ とする。このとき, 以下の部分集合族は 2-design

$$\mathcal{B} := \{\{0, 1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{0, 4, 5\}, \{1, 5, 6\}, \{0, 2, 6\}\}.$$

(例了)

特に, $\mathcal{B}$ が非自明 (i.e., k が 1 でも $\#X - 1$ でもない場合) かつ $t = 2$ の場合を釣合型不完備配置 (以下, BIBD), 更に $\#\mathcal{B} = \#X$ の場合を対称^{*2}な design と呼ぶ。

そして, (古典的な) difference set と BIBD の間には次のような有名な関係が知られている [5]:

事実 5. 有限群 G の部分集合 D に対して次は同値である:

#1 D が (古典的な) difference set である,

#2 $\mathcal{B} := \{Dg \subset G \mid g \in G\}$ が対称 BIBD である。ただし, $Dg := \{dg \in G \mid d \in D\}$ とする。

この結果は, 対称 BIBD を構成するためには, difference set を構成すれば良いと言うことがわかる非常に重要な結果であり, ここから様々な difference set の構成法などが研究されている。

3 Association scheme に関する予備知識

本稿では, association scheme の定義を紹介し, かつその具体例をいくつか紹介する。association scheme の研究などにおいては association scheme に付随する Bose-Mesner 代数などが重要な対象となってくるが本稿では直接用いることはないので紹介しない。興味がある場合などは [1] などを参照すると良い。最初に association scheme の歴史的経緯を簡単に述べる。association scheme

^{*1} l -平面の定義は有限集合 X の k 点部分集合族の部分集合であり, 2 つの異なる元 (これを線と呼ぶ) の選び方によらず交点の数が一定であることを満たす [5]。ここでは詳しくは述べないが, λ -平面は対称 BIBD となることが知られている。

^{*2} Fisher の不等式という古くから知られている有名な不等式によって, $t = 2$ の場合は $\#\mathcal{B} \geq \#X$ が知られている。よって, 対称な 2-design は Fisher の不等式の下界を達成する「良い」design であると言える。

は元々、BIBD（前節参照）などの一般化として「部分的釣合型不完備配置」（以下 PBIBD）を研究するために土台として [3] によってコンセプトが示され [4] によって association scheme と名付けられた*3。

これから association scheme の定義と基本的な例を述べる:

定義 6 (association scheme). $\mathfrak{X} := (X, \mathcal{I}, R)$ が association scheme である $:\iff$

- #1 $R^{-1}(i_0) = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\},$
- #2 $\forall i \in \mathcal{I}, \exists i^* \in \mathcal{I} \text{ s.t. } R^{-1}(i^*) = \{(y, x) \in X \times X \mid R(x, y) = i\},$
- #3 $\forall i, j, k \in \mathcal{I}, \exists p_{i,j}^k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \forall (x, y) \in R^{-1}(i), p_{i,j}^k = \#(S_i(x) \cap S_{j^*}(y)).$

ここで, $S_i(x) = \{z \in X \mid R(x, z) = i\}$ とする。また, $k_i := \#S_i(x)$ を i の分岐指数と呼ぶ（これは x のとり方によらない）。

例 7. 例 1 $X := G, \mathcal{I} := G, i_0 := e$ として R を次のように定めた association scheme は G から誘導される thin scheme $\mathfrak{T}_G$ と呼ぶ:

$$R(x, y) := x^{-1}y.$$

例 2 V を v 点集合とする。 $X := V^{(d)}, \mathcal{I} = \{0, \dots, d\}, i_0 := 0$ として R を次のように定めた association scheme は Johnson scheme $J(v, d)$ と呼ぶ:

$$R(x, y) := d - \#(x \cap y).$$

(例了)

特に, association scheme の重要なクラスとして, 有限群 G が X に推移的に作用している場合は広く知られている。本稿においても中心的に扱うので定義を紹介する:

定義 8 (Schurian scheme). G が X に推移的に作用としてるとする。このとき, $\mathcal{I} := G \backslash X \times X = \{G(x, y) \mid x, y \in X\}, i_0 := G(x, x)$ として R を次のように定めた association scheme を Schurian scheme と呼ぶ:

$$R(x, y) := G(x, y) = \{(g \cdot x, g \cdot y) \in X \times X \mid g \in G\}.$$

例 9. 例 1 thin scheme $\mathfrak{T}_G$ は, $X = G$ に G を次のように作用させる Schurian scheme と同型である:

$$g \cdot x := gx \quad (g \in G, x \in X).$$

例 2 Johnson scheme $J(v, d)$ は, $X = V^{(m)}$ に $G := \mathfrak{S}_V$ を次のように作用させる Schurian scheme と同型である:

$$g \cdot x := x^g = \{g(a) \mid a \in x\} \quad (g \in \mathfrak{S}_V, x \in X).$$

(例了)

*3 ここで定義されているものは, 現在では対称 association scheme と呼ばれる特殊な場合である。

4 Schurian scheme 上の difference set と block design

本節ではこれまで導入してきた概念を元に association scheme 上の difference set を定義し、block design との関係に関する定理を述べ証明する。証明の後に、具体例を書き紹介する。

定義 10 (Association scheme 上の difference set). 真部分集合 $Y \subset X$ が $\mathfrak{X}$ 上の difference set である

$$:\iff \exists l \in \mathbb{Q} \text{ s.t. } \forall i \in \mathcal{I} \setminus \{i_0\}, \#L_i/k_i = l \text{ となること。}$$

定理 11. 真部分集合 $Y \subset X$ について、以下は同値:

- #1 Y は $\mathfrak{X}$ 上の difference set である (i.e., $\forall i \in \mathcal{I} \setminus \{i_0\}, \#L_i(Y)/k_i$ が一定),
- #2 $GY := \{g \cdot Y \mid g \in G\}$ は BIBD である (i.e., $\forall T \in X^{(2)}, \#\Lambda_T(GY)$ が一定).

定理の証明は、 $\#\text{Stab}_G(a)$ が a の取り方に依らないことに注意すると、次の等式を示すことで完了する:

$$\forall i \in \mathcal{I}, \forall T \in X^{(2)}, \#\Lambda_T(GY) = \frac{\#L_i(Y)}{k_i} \frac{\#\text{Stab}_G(a)}{\#\text{Stab}_G(Y)}$$

以下では、簡単のために $a, b \in X$ を固定し、 $i := R(a, b)$ とする。この等式は次の性質から示せる:

- #1 $\#\Lambda_{\{a,b\}}(GY) = \#\{g \in G \mid (a, b) \in g^{-1} \cdot Y \times g^{-1} \cdot Y\} / \#\text{Stab}_G(Y)$,
- #2 $\#\{g \in G \mid (a, b) \in g \cdot Y \times g \cdot Y\} / \#(\text{Stab}_G(a) \cap \text{Stab}_G(b)) = \#L_i(Y)$,
- #3 $\#\text{Stab}_G(a) / \#(\text{Stab}_G(a) \cap \text{Stab}_G(b)) = \#S_i(a) = k_i$.

証明)

$\#Y = m$ とする。証明のために次の写像を定義する:

$$\phi_Y : G \ni g \mapsto g \cdot Y \in X^{(m)}, \quad \varphi_i : G \ni g \mapsto (g \cdot a, g \cdot b) \in R^{-1}(i) \subset X \times X.$$

このとき、群作用の一般論として次が成立する^{*4}:

$$\forall g \in G, \quad \begin{aligned} \phi_Y^{-1}(g \cdot Y) &= g \text{Stab}_G(Y), \\ \varphi_i^{-1}(g \cdot a, g \cdot b) &= g(\text{Stab}_G(a) \cap \text{Stab}_G(b)). \end{aligned}$$

また、Schurian scheme であることから $(z, w) \in R^{-1}(i)$ の取り方に依らずに

$$\#\varphi_i^{-1}(z, w) = \#(\text{Stab}_G(a) \cap \text{Stab}_G(b))$$

が成立することが言える。

- #1 $\phi_Y^{-1}(\Lambda_{\{a,b\}}(GY)) = \{g \in G \mid (a, b) \in g^{-1} \cdot Y \times g^{-1} \cdot Y\}$ より上記の議論と合わせて

$$\#\{g \in G \mid (a, b) \in g^{-1} \cdot Y \times g^{-1} \cdot Y\} / \#\text{Stab}_G(Y) = \#\Lambda_{\{a,b\}}(GY)$$

^{*4} $\subset$ は $g^{-1}h(a, b) = g^{-1}(ha, hb) = g^{-1}(ga, gb) = g^{-1}g(a, b) = (a, b)$ となることから言える

#2 $\varphi_i^{-1}(L_i(Y)) = \{g \in G \mid (a, b) \in g^{-1} \cdot Y \times g^{-1} \cdot Y\}$ より上記の議論と合わせて

$$\#\{g \in G \mid (a, b) \in g^{-1} \cdot Y \times g^{-1} \cdot Y\} / \#(\text{Stab}_G(a) \cap \text{Stab}_G(b)) = \#L_i(Y)$$

が成り立つことが言える。

#3 $\varphi_i^{-1}(\{(a, z) \in X \times X \mid z \in S_i(a)\}) = \text{Stab}_a(G)$ より上記の議論と合わせて

$$\# \text{Stab}_G(a) / \#(\text{Stab}_G(a) \cap \text{Stab}_G(b)) = \#\{(a, z) \in X \times X \mid z \in S_i(a)\} = \#S_i(a) = k_i$$

が成り立つことが言える。

(証明了)

参考文献

- [1] 坂内 英一, 坂内 悦子, 伊藤 達郎, 『代数的組合せ論入門』, 共立出版, 2016,
- [2] Bose, R.C., “On the construction of balanced incomplete block designs”, Annals of Eugenics, 1939,
- [3] Bose, R. C., Nair, K. R., “Partially balanced incomplete block designs”, Sankhyā, 1939,
- [4] Bose, R. C., Shimamoto, T., “Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes”, Journal of the American Statistical Association, 1952,
- [5] Bruck, R.H., “Difference sets in a finite group”, Transactions of the American Mathematical Society, 1955,