

制限 3 体問題のいくつかの周期解

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻

梶原唯加 (Yuika KAJIHARA) *

概要

制限 3 体問題は、月と地球の間を動く人工衛星や太陽と木星の間を動く小惑星の振る舞いを記述するモデルとして数学的にも、工学的にも注目度の高い問題のひとつである。本研究では、特に平面円制限 3 体問題における周期解の存在と、それがどのような軌道に対して実現されるのかを変分法を用いたアプローチによって示す。

1 Introduction

はじめに、ここではある程度の解析力学の基礎的な知識は仮定する。しかしながら、あまり高度な専門知識などなくても読んでいただけるよう、様々な分野の方に研究の全体的な流れが伝わるように書いたつもりである。Remark に書かれている内容は基本的には「本筋とは少し逸れるが、関連のある内容」についてコメントしている。読み飛ばしてもらっても特に問題はないし、目を通していただければそれはそれでたいへん嬉しい。

さて、まずは用語の定義からはじめよう。2 次元、あるいは 3 次元空間の中を N 個の質点が互いに万有引力を受けながら運動しているところを想像しよう。そのふるまいを調べる問題を N 体問題という。3 体問題は「解けない」(つまり、非可積分である)ということはポアンカレによる著名な結果である。ただし、ポアンカレが示したのは実は、一般の 3 体問題ではなく、制限 3 体問題における非可積分性である。制限 3 体問題とは 3 体問題において、1 質点の質量が 0 とみなせるほど小さい場合において、質点がどのように振る舞うかを調べる問題である。

Remark 1. ポアンカレによる制限 3 体問題の非可積分性は、「パラメータ μ に解析的に依存する第一積分が存在しない」という意味での非可積分である。つまりこれは、ある特定のパラメータ μ に対しては可積分になる可能性を含んでいる。

制限 3 体問題はより正確には次のように定式化される。

定義 1 (制限 3 体問題, The restricted three-body problem). $\mathbf{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ または $\mathbf{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ であり、 $\mathbf{x}$ は C^2 級とする。このとき、次の微分方程式で与えられる問題を制限 3 体問題と呼ぶ。

$$\ddot{\mathbf{x}} = \nabla V(\mathbf{x}), \quad (1)$$

* kajihara.yuika.75e@st.kyoto-u.ac.jp

ただし,

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{m_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} - \frac{m_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|}.$$

とし, $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ は相互作用を受けあいながら 2 体問題の解の振る舞いをする.

Remark 2. 制限 3 体問題は 2 中心問題のある種の拡張とも捉えることができる. 2 中心問題とは一般には n 中心問題と呼ばれる問題の一つで, n 個の固定された質点の間を運動するある一つの質点の振る舞いを調べる $n+1$ 体問題をさす. より正確には,

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}_i|}$$

というポテンシャルに対する微分方程式である. 2 中心問題に対する $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ に回転の影響を与えるとして制限 3 体問題に帰着される.

ここで, 質量の大きな 2 質点は 2 体問題の解のふるまいをするが, 2 体問題は変数変換によってケプラー問題に帰着される. ここでケプラー問題とは

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{k}{|\mathbf{x}|}$$

で定式化される. 定数 k の値が 1. 正, 2. 零, 3. 負の場合において, 解の形状がそれぞれ異なり, 順に 1. 楕円型, 2. 直線型, 3. 放物型となる. したがって, 制限 3 体問題も 2 体問題の解にどのようなものを選ぶかによって, 大きく 3 つに分類されることになる.

本講演では特に, 2 体問題の解の中でも, 2 体が円運動をしている場合 (楕円型の一つ) を考える. これは円制限 3 体問題と呼ばれる. この場合, 微分方程式は次のようになる.

$$\ddot{\mathbf{x}} = \nabla V(\mathbf{x}), \quad (2)$$

ただし,

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{m_1}{|\mathbf{x} + a\mu e^{it}|^3} - \frac{m_2}{|\mathbf{x} - a(1-\mu)e^{it}|^3}.$$

である. 特に, μ が小さい値をとる場合, 地球と月の間を周回する衛星の軌道モデルや, 太陽と木星の間を運動するモデルとして用いられている.

さらに, 平面上での動きに限って考えるものとする. 回転座標系を導入し, $C = R^2$ と同一視することで, 次の式に書き換えることができる:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x + 2\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} &= y - 2\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \end{aligned} \quad (\text{R3BP}_\mu)$$

ここで,

$$U(\mathbf{x}; \mu) = \frac{1-\mu}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x-(1-\mu))^2 + y^2}}.$$

とする．(R3BP $_{\mu}$) は X 軸上に 3 つ， Y 軸上に 2 つ，計 5 つの平衡点を持っており，これらはラグランジュ点と呼ばれている．特に X 軸上のラグランジュ点は次の方程式の 3 つの解に対応している．

$$x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3} - \frac{\mu(x+\mu-1)}{|x+\mu-1|^3} = 0 \quad (3)$$

本研究の目的は，制限 3 体問題の非自明な周期解を見つけることである．そこで，制限 3 体問題を変分問題に書き直すことで，変分法を用いたアプローチを試みる．

2 変分問題としての定式化

制限 3 体問題を変分問題として考えよう．次の汎関数を考える．

$$\mathcal{A}_T(\mathbf{x}; \mu) = \int_0^T \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + x\dot{y} - y\dot{x} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U(\mathbf{x}; \mu) dt \quad (4)$$

この汎関数の臨界点は，(R3BP $_{\mu}$) の（弱）解になっている．（解析力学に馴染みのない方は，そういうものだと思って読み進めてもらって問題はない．）汎関数の臨界点と言っても，その存在を示すのは容易なことではない．ここでは特に，臨界点の中でも最小点（minimizer と呼ばれることも多い）に注目して議論する．つまり

$$\mathbf{x}^*(T; \mu) = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \mathcal{A}_T(\mathbf{x}; \mu)$$

を考える．このような，最小点に着目した議論は制限 3 体問題に限らず，一般の N 体問題における周期解の存在を示す際にも用いられる．その際に，どのような関数空間 Ω のもとで最小化するかが重要になる．

本講演では 6 種類の関数空間のもとでの最小点について着目して議論を進める．集合 $X^o, X^{\pm}, Y$ をそれぞれ $X^o := \{(x, 0) \mid -\mu \leq x \leq 1-\mu\}$, $X^- := \{(x, 0) \mid x < -\mu\}$, $X^+ := \{(x, 0) \mid 1-\mu < x\}$, $Y = \{(0, y) \mid -\infty < y < \infty\}$ で与え， $\Omega_1, \dots, \Omega_6$ を次で定義する．

$$\Omega_i = \{\mathbf{x} \in H^1([0, T], \mathcal{D}) \mid \mathbf{x}(0) \in A_i, \mathbf{x}(T) \in B_i\} \quad (i = 1, \dots, 6),$$

ここで $(A_1, B_1) = (X^o, Y)$, $(A_2, B_2) = (X^+, Y)$, $(A_3, B_3) = (X^o, X^o)$, $(A_4, B_4) = (X^o, X^+)$, $(A_5, B_5) = (X^+, X^+)$, $(A_6, B_6) = (X^+, X^-)$ とする．

上の関数空間のもとでは，ほとんどすべての T で (4) が最小点をもつことが Tonelli の定理によって示せる．ここでは，詳細は割愛するが，Tonelli の定理は 100 年近く前に証明された，強力な最小点の存在定理である．興味を持たれた方は [3] を参照してほしい．

Remark 3. 汎関数の臨界点の存在定理として，峠の定理と呼ばれるものがある．与えられた関数空間に対して， $c = \inf \max \mathcal{A}(\mathbf{x})$ を与えるような $\mathbf{x}$ を考えると，これが臨界値として得られる．ここで，どのような関数空間の元で， $\inf$ と $\max$ をとるのかについては説明が冗長になるので割愛させてほしい．その名の通り，山の峠に対応する点が無限次元空間においても臨界点として得られるというイメージが伝われば，と思う．峠の定理については [1] を参照していただきたい．これは著者である Rabinowitz が発表した数々の強力な結果についての解説が凝縮された素晴らしい本だが，たいへん読みにくい．そのため，初学者にはおすすめしない．（なぜなら私はこの本を初学者の身で読みはじめ，今現在進行形でかなり苦勞しながら読んでいる最中だからである．）

さて、最小点の存在がわかったとしよう．次に問題になるのは、この最小点が自明解になってしまっていないか？ということである．例えば制限 3 体問題では平衡点が自明解としてあげられる．等質量の N 体問題だと、互いに追跡しあいながら円運動をする解が自明解に対応する．

また、一般に特異性のないポテンシャル系においては、対応する汎関数の弱解は正則解（つまり十分滑らかな解）になることが知られている．しかし、制限 3 体問題を含め、 N 体問題はもとのポテンシャル系の微分方程式に特異点（つまり、制限 3 体問題の場合は質点 $\boldsymbol{x}$ の座標が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$ または $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2$ になる状態）が存在するため、弱解を得られたからといって、直ちに正則解が得られるわけではない．このような特異点をもつ解をここでは「衝突解」と呼ぶことにする．最小点が衝突解でないことを示すことが、ひとつの難所になる．

Remark 4. 「衝突解」はもちろん衝突した瞬間はそこでポテンシャルの値が発散していて、それに伴って汎関数の値も大きくなるのだから、最小点でない方が当然なのではないか？と感じる人がいるかもしれない．しかし、ケプラー問題において周期境界条件で考えると、実は衝突解が最小点の集合に含まれることがわかる．最も単純かつ、 N 体問題の中で唯一「完全に」解が解析できるモデルであるケプラー問題（2 体問題）ですら、衝突解を最小点として持つのである．

最小点が自明解や衝突解といった、今求めている非自明な正則解とは異なる可能性を除去したら、最後は得られた最小点の「つなぎ合わせ」を行うことで周期解を構成する．「つなぎ合わせ」とはどのようなことかは後で説明するとして．

以上から、証明の流れをまとめると次のようになる：

1. 特定の境界条件のもとでの最小点の存在
2. 最小点 $\neq$ 自明解
3. 最小点 $\neq$ 衝突解
4. 得られた最小点と対称性から導かれる解から周期解が構成

重要なのは、周期解が得られるように、うまく境界条件を選ぶことである．結果を先に述べると、次の表に示す 6 つの境界条件に対する最小点から、下図の実線で示すような軌道が得られる．

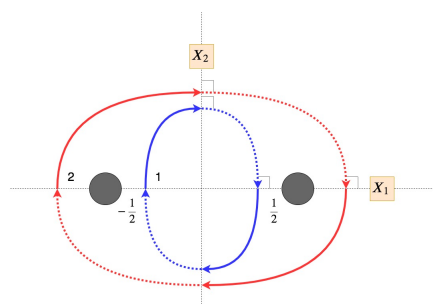


図 1 Type 3 - 6

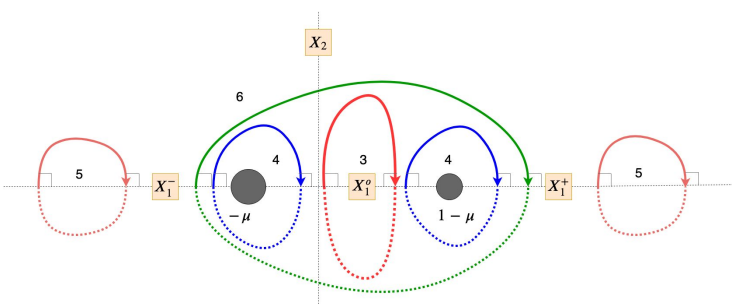


図 2 Type 3 - 6

この軌道を X 軸に対して折り返し、時間を反転させたものもまた解になっていることがわかる．重要なのは、最小点が境界条件（ X 軸または Y 軸）に対して直交していることである．この直交条件から、最小点として得られた軌道と X 軸に対して折り返しによって得られる軌道が滑らかに繋が

ることができる．（つまり，解の「つなぎ合わせ」ができた．）また， $\mu = 1/2$ の場合に限り， Y 軸に対する対称性も持つため， Y 軸に対する折り返しも可能になる．

以上の操作によって，正則な周期解の存在を構成する．今回設定した 6 つの境界条件から得られる結果を表 1 にまとめる．表の見方を説明しよう．例えば，Case3 の場合，任意の μ に対して，「 T の範囲」に書かれた条件を満たす任意の T に対して， $2T$ -周期解が存在するということである．

	境界条件	μ の範囲	周期	T の範囲
1	$X^o \rightarrow Y$	$\mu = 1/2$	$4T$	$2T > T_{L_1}(1/2)$
2	$X^+ \rightarrow Y$	$\mu = 1/2$	$4T$	$T > 0$ and $T \neq (n - \frac{1}{2})\pi$ ($n \in \mathbf{N}$)
3	$X^o \rightarrow X^o$	$\forall \mu \in (0, 1)$	$2T$	$T > T_{L_1}(\mu)$
4	$X^o \rightarrow X^+$	$\forall \mu \in (0, 1)$	$2T$	$T > 0$
5	$X^+ \rightarrow X^+$	$\forall \mu \in (0, 1)$	$2T$	$T > T_{L_2}(\mu)$ and $T \neq 2n\pi$ ($n \in \mathbf{N}$)
6	$X^+ \rightarrow X^-$	$\forall \mu \in (0, 1)$	$2T$	$T > 0$ and $T \neq (2n - 1)\pi$ ($n \in \mathbf{N}$)

表 1

ここで T_{L_1}, T_{L_2} はある関数で，ここでは詳細な定義は述べないことにする．また，表の Case2, 5, 6 にある， $T \neq m\pi$ の形で与えられた条件は，各々の境界条件において最小点の存在を保証するための要請である．「最小点が存在しない」という状況を具体的に見るには，例えば次のような汎関数

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 + U(\mathbf{x}, t) \right) dt \quad (5)$$

を考えるとよい．今ポテンシャル U が常に正値とすれば，明らかに $\mathcal{A}(\mathbf{x}) > 0$ である．しかし，関数列 $\mathbf{x}_n = (n, 0)$ をとると， $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}(\mathbf{x}_n) = 0$ となる．したがって $\inf$ を達成する最小点が存在しないことがわかる．制限 3 体問題も静止座標系でみると (4) と同じ形の汎関数が与えられることがわかる．それに伴い，上で見た同様の考察から，境界条件によっては最小点を持たない場合が現れる．

Remark 5. 2 章で述べた周期解構成の流れは，制限 3 体問題に限らず，一般の N 体問題においても広く適応されている証明手法と同様である．[4] では，等質量の N 体問題において，かなりたくさんの種類の周期解の存在を一挙に示している．このように， N 体問題の周期解の存在証明に関する結果の多くは等質量を仮定している．また既存の理論上はこの仮定を外して考えることは難しい．なぜなら，この種の周期解の構成には特定の群作用のもとでの不変性が要請される．その要請を満たすためには，等質量を仮定せざるを得ないからである．

3 自明解，衝突解に関する証明の流れ

ここでは，2 章で述べた証明の流れの 2, 3 番目のステップに対応する，「最小点 $\neq$ 自明解」であること．および「最小点 $\neq$ 衝突解」であることをどのようにして示すのかを説明する．

これらはざっくり言ってしまうえば細かい不等式評価を頑張らなければいけないところで，あまりその各々について詳細な計算式を記しても「様々な分野の人に対して自身の研究分野を伝える」という

研究集会の趣旨に反しているように思う。そのため、できるだけ手短に、必要となる道具立てについて軽く説明するに留めるとする。

3.1 自明解の作用積分に関する評価

自明解が最小点でないための十分条件を求める方法としては、第二変分を考察することが挙げられる。第二変分は次で与えられる：

$$\mathcal{A}''(x, y; \mu)(\delta_1, \delta_2) = \int_0^T \dot{\delta}_1^2 + \dot{\delta}_2^2 + \left(1 + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) \delta_1^2 + \left(1 + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) \delta_2^2 + 2(\delta_1 \dot{\delta}_2 - \delta_2 \dot{\delta}_1) dt$$

ここで、 (δ_1, δ_2) は境界上で 0 をとる関数とする。

つまり、各点における第二変分は (δ_1, δ_2) を選ぶごとに決まる。このとき、ある (δ_1, δ_2) に対して $\mathcal{A}''(x, y; \mu)(\delta_1, \delta_2) < 0$ であるとは、ある実数 ϵ が存在して、 $\mathcal{A}(x + \epsilon\delta_1, y + \epsilon\delta_2) < \mathcal{A}(x, y)$ であることを意味する。つまり、このとき (x, y) は最小点でないことがわかる。

以上の考察から、自明解（ここでは平衡点）が最小点と異なることを示すには、平衡点における第二変分を計算し、どのような T に対してそれが負の値になるような (δ_1, δ_2) が取れるかを調べればよい。平衡点 L_1, L_2 に対して、 (δ_1, δ_2) が取れるための T の十分条件が表 1 の中に現れている $T > T_{L_1}(\mu)$ および $T > T_{L_2}(\mu)$ である。

3.2 衝突解の作用積分評価の手法

衝突を持つ軌道の解析には Sundman の評価と呼ばれる次の定理が便利である。

定理 1 (Sundman の評価). 2 体問題において質点同士が衝突するとき、その衝突近傍の軌道は次の式で書き表すことができる：

$$x_{\text{col}}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{j/3}, \quad y_{\text{col}}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^{j/3}$$

ただし、衝突は原点で起こるものとする。

衝突解の作用積分評価には Sundman の評価を使う。制限 3 体問題は、見かけ上は一般の 2 体問題にはない力の影響が現れるが、衝突近傍ではそれらの影響は無視できて、結果的に Sundman の 2 体衝突に関する評価に帰着することができる。

衝突解は自明解と違って、解の時間大域的な振る舞いはわからない。しかし、Sundman の評価が適応可能な衝突近傍の振る舞いだけに着目し、その軌道に対して衝突近傍でのみ少し変形を加える。元の衝突軌道を $\mathbf{x}_{\text{col}}$ 、変形したあとの軌道を $\tilde{\mathbf{x}}$ としよう。このとき、

$$\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{x}}; \mu) < \mathcal{A}(\mathbf{x}_{\text{col}}; \mu)$$

が成り立つような $\tilde{\mathbf{x}}$ を構成できれば、衝突解が最小点でないことが証明されたことになる。

このような変形軌道 $\tilde{\mathbf{x}}$ の構成は、考える衝突が境界条件に対してどの角度で入ってくるかによって異なる。角度 π で衝突する軌道が存在する場合には、一般的な構成方法は存在せず、状況に応じて

うまい変形を見つけ出すしかない。今回考えている制限 3 体問題も、上記の π での衝突を含む問題であったが、幸いにも任意の μ で衝突解が最小点でないことを示すことができた。

Remark 6. *Sundman* による原論文はドイツ語であるが、[2] の中に、*Sundman* の結果に関する解説がある。原論文はケプラー問題における衝突に関する考察であるが、これは一般の n 体問題における 2 体衝突にも拡張できる。

4 得られた周期解に関する諸問題

ここでは、得られた周期解に対してさらなる考察を行う。先ほどまでの周期解の構成方法は、制限 3 体問題に限った話ではない。大きな流れは一般の N 体問題の場合に周期解を構成する場合と変わらない。しかし、周期解の形状について観察しようとする、制限 3 体問題特有の難しさが生じるのである。上記の手法によって得られた周期解に対して、次のような問題を考えることでその難しさが見えてくる。

1. 得られた軌道はどのような形をしているだろうか？
2. 得られた T -周期解は、最小周期 T を持つだろうか？

上の 2 つの問題については、筆者は何らかのはっきりとした答えを得ていない。そのため、まだ現在進行形の課題であることを留意していただいたうえで読み進めていただきたく思う。

まずは 1 の問題について、考えてみよう。

4.1 Q1: 得られた軌道の形はいかなるものか？

先に述べておくと、Q1 の問題に対しては筆者はまだ明示的な答えを得られていない。Q1 がどのような問題を指し示すのかについて、もう少し具体的に説明していこう。

回転座標系で考えた場合の制限 3 体問題のセッティングは一見 2 中心問題とよく似ているが、汎関数が通常の n 体問題と大きく異なる点として、最小点を考える際に「無駄な動き」が許容されることにある。

「無駄な動き」とはどういうことかをもう少し詳しく説明する。2 中心問題を考えたとき、下の左図のような軌道が最小点になることはありえない。この場合は軌道を上に引っ張って変形し、固定された質点から起動がより離れるようなものに取り替えたほうが良いからである。しかし、制限 3 体問題の場合はそういうわけにはいかない。あくまで直感的な議論にはなってしまうが、次の二つのことに着目してほしい。

まず第一に、制限 3 体問題の汎関数 $x_1x_2 - \dot{x}_1\dot{x}_2$ は負の値を取りうる。この負の値は軌道が描く面積の -1 倍に対応する。したがって、境界条件を満たす軌道の中で、描く面積が大きくなるようにすれば、その方が作用積分が小さくなるかもしれない。

第二に、 $\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ の項は原点から質点が遠ざかるほど大きくなってしまふ。一般の n 体問題、 n 中心問題は質点同士が遠ざかるほど、ポテンシャル部分は小さくなっていくが、この場合は質点から離れたところを運動することが必ずしも汎関数を小さくするとは安直には言えない。

こうして、(繰り返し述べるようにあくまで直感的な議論にはなってしまうが) ある程度、近くを動き、なおかつ負の面積を稼いだ方が作用積分は小さくなると考えられる。例えば、下図の 1 で示したような軌道も最小点になり得るのである。

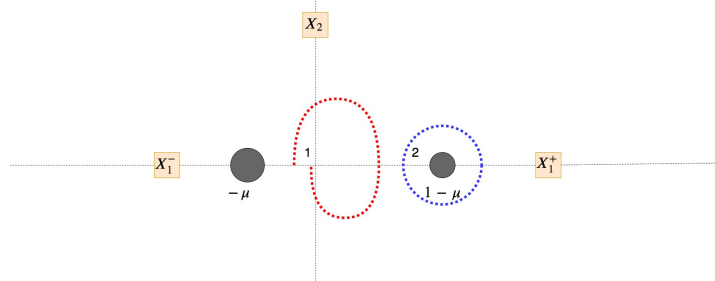


図 3 Type 3 - 6

このように変分法によって得られた制限 3 体問題の軌道をより具体的に考察するのは難しく、筆者は明示的な答えをまだ得られていない。

また、いまだに残っている問題として、異なる境界条件から得られるいつでも異なる周期解が得られるのか? という問題がある。どういうことかと、例えば上図の 2 で描かれた軌道を見てほしい。これは表 1 の境界条件 3 から得られる最小点だろうか? それとも、境界条件 4 から得られる最小点から構成された周期解だろうか?あるいはその両方を満たすものだろうか? このように異なる境界条件で考えても、結果的に得られた周期解に重複が生まれる可能性がある。

4.2 Q2:得られた周期解はどのような値を最小周期に持つか?

4.1 節の最後で、異なる境界条件から同じ周期解が得られる可能性を示唆した。では、同じ境界条件のもとで異なる T を選ぶごとに、異なる周期解が得られるだろうか?つまり、3 章で述べたアプローチによって T -周期解の解を構成したとき、 T が最小周期か否かについて考えよう。

実は、ひとたび、ある T_0 について、それを最小周期にもつような T_0 -周期解が得られれば、 T_0 以下の周期をもつ無限個の異なる周期解が得られることがわかる。なぜなら、例えば表 1 の境界条件 3 で考えると、 T を選ぶごとに $2T$ 周期の周期解が得られる。この周期解の最小周期を T_0 としよう。次に $T = T_0/4$ を選べば、構成される解の周期は $T_0/2$ であるから、先ほどの最小周期が T_0 の解とは異なる。これと同様の操作の繰り返しによって、ある最小周期 T_0 をとれば、それより小さい T の間に無限個の解を構成できることがわかる。

では逆に、 T を大きくしていくとどうなるか?これについてはいまだ考察中である。ただし、大まかな振る舞いは容易に想像がつく。なぜなら、 T が十分大きい場合に静止座標系で考えれば、最小点はできるだけ遠くにいき、質点から離れたところであまり動かずにいた方がよい。この状況を回転座標系に戻って考えると、回転座標系において固定されている 2 質点の周りをぐるぐると大回りを繰り返すような軌道が現れることが推測される。

5 おわりに

最後まで目を通していただき、ありがとうございます。何かあれば、冒頭の下部に記載したメールアドレスまでご一報いただければと思います。

参考文献

- [1] P. H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **65**. 1986.
- [2] Siegel, C. L.; Moser, J. K. Lectures on celestial mechanics. Translated from the German by C. I. Kalme. Reprint of the 1971 translation. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [3] L. Tonelli, The calculus of variations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **31** (1925), 163–172.
- [4] G. Yu, Simple choreographies of the planar Newtonian N-body problem. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **225** (2017), 901–935.