

The role of forward self-similar solutions in the Cauchy problem for semi-linear heat equations with exponential nonlinearity

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科

鄭 大樹 (Daesu Jeong)

1 導入

自然界の様々な現象は非線形偏微分方程式で記述することにより、数学的な取り扱いが可能になる。多くの自然現象を扱うためには様々な非線形現象を考察する必要があるが、これは方程式の非線形項を取り替えることに対応している。このため、様々な非線形項において方程式を考察することが求められる。

半線形熱方程式 $u_t - \Delta u = f(u) \cdots (H)$, べき型 $f(u) = u^p$, 指数型 $f(u) = e^u$

(H) は時間発展する方程式の基礎であり、熱伝導や拡散、生物増殖などの自然現象を記述する。(H) は初期条件を与えると解が定まるが、時間無限大まで存在する (大域解) か否かが現象の理解や数値解析の観点から重要である。大域解ではない時、有限時刻で解のノルム (熱量, 最大値, エネルギーなど) が無限大に発散する現象が起こる。この現象は解の爆発と呼ばれ、固体燃料の発火現象などを表している。

自己相似解 (表 1) はスケール変換不変な解のことで、べき型 (H) の場合、自己相似解は爆発の臨界状況を表したセパレータ (爆発解と大域解を隔てる解) となることが示されており、重要な特殊解である (内藤 [9])。例えば、線形熱方程式 ($f(u) = 0$ の場合) の基本解 (熱核, Gauss 核) は自己相似解であり、線形熱方程式の解は時間無限大で基本解に漸近的に収束する。

指数型 (H) はべき型 (H) と構造が類似していることが藤田 [3] 示唆されている。本稿では主に指数型 (H) について取り扱う。

指数増大な非線形項を持つ $\mathbb{R}^N$ 上の半線形熱方程式の初期値問題:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = e^u & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{on } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1.1)$$

を考える。ここで $N \geq 1$ とし、ここで t は時間変数、 Δ は空間変数 $x \in \mathbb{R}^N$ についてのラプラス作

表 1: 半線形熱方程式の自己相似解

べき型	$u(x, t) = \lambda^{2/(p-1)} u(\lambda x, \lambda^2 t)$
指数型	$u(x, t) = \log \lambda^2 + u(\lambda x, \lambda^2 t)$

用素である. u_0 は $\mathbb{R}^N$ 上の連続実数値関数とする. u_0 に対して特に断らない限り次を仮定する: ある $\varepsilon \in (0, 2)$ と $C > 0$ が存在して

$$-Ce^{|x|^{2-\varepsilon}} \leq u_0(x) \leq C \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \quad (1.2)$$

Tello [12] によれば, この仮定は方程式 (1.1) の解が爆発解とならないための必要条件である. よって, (1.2) のもとで (1.1) に対する解の爆発問題を考える. ある $T = T[u_0] > 0$ が存在して, (1.1) の解 $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0, T))$ が一意的に存在するものとする. さらに, 任意の $T' < T$ に対して $\mathbb{R}^N \times [0, T']$ 上で有界であり,

$$\lim_{t \rightarrow T} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x, t) = +\infty,$$

を満たすとする. $T < \infty$ のとき解 u は有限時間で爆発するといい, T を爆発時刻という. ここで重要な問題の 1 つは, (1.1) の解が大域解となるか爆発解となるかである. [1] において, 初期値 u_0 が下に有界ならば, 比較原理により解 u は有限時刻で爆発することが知られている. したがって, u_0 は $|x| \rightarrow \infty$ のとき $-\infty$ であることが必要である. 本稿では, 大域解と爆発解を隔てる解について考察していく.

2 べき乗型半線形熱方程式について

方程式 (1.1) を考察する前に, これまでに多くの研究の蓄積が存在するべき乗の非線形項を持つ半線形熱方程式の初期値問題:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^p & \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{on } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (2.1)$$

の正值解について述べておこう. ここで t は時間変数, Δ は空間変数 $x \in \mathbb{R}^N$ についてのラプラス作用素であり, 指数 p は $p > 1$ を満たすとする. u_0 は恒等的に 0 でない有界な連続関数とする. 1966 年 藤田 [2] は正值解に対する先駆的な研究を行い, 時間大域解に対する臨界指数である藤田指数 $p_F = 1 + 2/N$ を発見した. つまり, $1 < p \leq p_F$ ならばすべての正值解は爆発し, $p > p_F$ ならば, 無限遠で指数減衰する小さい初期値に対して大域解が存在する事を示した. Weissler [14, 15] は多項式減衰する初期値に対して, 大域解の存在を示した. Lee と Ni [6] は $|x| \rightarrow \infty$ における減衰レートのボーダーが $|x|^{-2/(p-1)}$ であることを示した.

大域解の中でも最も基本的なのが定常解である. すなわち $\mathbb{R}^N$ 上の楕円型方程式:

$$-\Delta u = u^p \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

の解を考える. ただし, $N \geq 3$, $p > N/(N-2)$ とする. このとき, 特異定常解 u_* が存在し次の形で表せる:

$$u_*(x) = l_* |x|^{-2/(p-1)}.$$

ただし

$$l_* = \left[\frac{2}{p-1} \left(N - 2 - \frac{2}{p-1} \right) \right]^{1/(p-1)}.$$

定常解の存在に関する臨界指数として、ソボレフ指数:

$$p_S = \begin{cases} \infty & (1 \leq N \leq 2), \\ 1 + \frac{4}{N-2} & (N \geq 3) \end{cases}$$

がある. $p \geq p_S$ のとき無限個の正值定常解が存在し, このとき初期値をパラメータとして持つ球対称な定常解の族を考えることができる. 球対称定常解の構造は Joseph-Lundgren の臨界指数:

$$p_{JL} = \begin{cases} \infty & (3 \leq N \leq 10) \\ 1 + 4 \frac{n-4+2\sqrt{n-1}}{(n-2)(n-10)} & (n \geq 11) \end{cases}$$

により構造が大きく変化する. $p_S \leq p < p_{JL}$ ならば球対称定常解のグラフは互いに交わり, $p_{JL} \leq p$ のときは球対称定常解のグラフは交わらない.

次に方程式 (2.1) の自己相似解について考える. 方程式 (2.1) の解は次のスケール変換に対して不変である:

$$u_\lambda(x, t) = \lambda^{2/(p-1)} u(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \forall \lambda > 0.$$

特に, スケール変換に不変な解:

$$u(x, t) = \lambda^{2/(p-1)} u(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \forall \lambda > 0$$

を自己相似解と呼ぶ. ここで $\lambda = t^{-1/2}$ として次の形の自己相似解を考察する:

$$u(x, t) = t^{-1/(p-1)} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

ただし, φ は

$$\Delta \varphi + \frac{1}{2} x \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{p-1} \varphi + \varphi^p = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

の解とする. 特に, φ を原点に関して球対称性を仮定すると $\varphi = \varphi(r), r = |x|$ となり, 次を満たす:

$$\varphi'' + \left(\frac{N-1}{r} + \frac{r}{2} \right) \varphi' + \frac{1}{p-1} \varphi + \varphi^p = 0 \quad \forall r > 0, \quad (2.2)$$

$$\varphi'(0) = 0 \quad (2.3)$$

を満たす. したがって, 自己相似解の考察を行うには (2.2) のような 2 階常微分方程式を考察すればよいことがわかる. この方程式 (2.2) に原点での値を合わせて考えた 2 階常微分方程式の初期値問題:

$$\begin{cases} \varphi'' + \left(\frac{N-1}{r} + \frac{r}{2} \right) \varphi' + \frac{1}{p-1} \varphi + \varphi^p = 0 & \forall r > 0, \\ \varphi(0) = \alpha > 0, \quad \varphi'(0) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

を考察する. (2.4) の解 $\varphi \in C^2[0, \infty)$ は一意的であることがわかるのでそれを φ_α とする. φ_α に次の条件を加える:

$$l(\alpha) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{2/(p-1)} \varphi_\alpha(r) \quad (2.5)$$

(2.5) の極限は存在し, α に関してリプシッツ連続であることが知られている. (2.1) の大域解が存在するためには $p > (N+2)/N$ であることが必要なので, $p > (N+2)/N$ のときを考えていく. $l > 0$ に対して,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{2/(p-1)} \varphi(r) = l \quad (2.6)$$

とする. 任意の $l > 0$ に対して

$$S_l = \{ \varphi \in C^2[0, \infty) : \varphi \text{ は (2.2), (2.3), (2.6) を満たす正值解} \} \quad (2.7)$$

S_l は次の性質をもつ.

定理 2.1. $l > 0$ に対して S_l を (2.7) で定めたものとし $S_l \neq \emptyset$ とする. このとき, S_l は最小解を持つ. すなわち, ある $\underline{\varphi} \in S_l$ が存在して 任意の $\varphi \in S_l$ に対して $\varphi \geq \underline{\varphi}$ が成り立つ.

ソボレフ指数とジョゼフ - ルンドグレンの指数の間, すなわち $(N+2)/(N-2) < p < p_{JL}$ においては次のような性質が成り立つ.

定理 2.2 (内藤 [9] Theorem 1.1.). $N \geq 3$, $p_F < p < p_{JL}$ とする. S_l は少なくとも 2 つの元を持つと仮定する. そのうちの最小解でないものの 1 つを φ_L とする. 自己相似解 u_l を次のように定める:

$$u_l(x, t) = t^{-1/(p-1)} \varphi_l\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right).$$

- (i) ある $t_0 > 0$ に対して $u_0(x) \geq u_l(x, t_0)$, $u_0(x) \not\equiv u_l(x, t_0)$ ($x \in \mathbb{R}^N$) であるとする. このとき, べき乗方程式 (2.1) の解 u は有限時間で爆発する.
- (ii) ある $t_0 > 0$ に対して $u_0(x) \leq u_l(x, t_0)$, $u_0(x) \not\equiv u_l(x, t_0)$ ($x \in \mathbb{R}^N$) であるとする. このとき, べき乗方程式 (2.1) の解 u は大域解となる.

この結果は, 自己相似解がある意味で爆発解と大域解を隔てていることを示している.

3 指数型半線形熱方程式について

以上を踏まえて, 方程式 (1.1) の考察にもどろう. 指数増大な非線形項を持つ $\mathbb{R}^N$ 上の半線形熱方程式を考える.

$$u_t - \Delta u = e^u \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \quad (3.1)$$

ここで $N > 2$ とする. (3.1) は次のスケール変換に対して不変である:

$$u_\lambda(x, t) = \log \lambda^2 + \varphi(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \forall \lambda > 0.$$

特に, スケール変換に不変な解:

$$u(x, t) = \log \lambda^2 + \varphi(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \forall \lambda > 0 \quad (3.2)$$

を前方自己相似解と呼ぶ. ここで半線形熱方程式の定常解は

$$-\Delta u = e^u \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

となる. この方程式の原点を特異点とする特異定常解 u_* は次の形で表せる:

$$u_*(x) = -2 \log |x| + \log(2N - 4)$$

ここで (3.2) において $\lambda = t^{-1/2}$ として次の形の自己相似解を考察する:

$$u(x, t) = -\log t + \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

ただし, φ は

$$\Delta\varphi + \frac{1}{2}x \cdot \nabla\varphi + e^\varphi + 1 = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \quad (3.3)$$

特に, φ を原点に関して球対称性を仮定すると $\varphi = \varphi(r)$, $r = |x|$ となり, 次を満たす:

$$\varphi'' + \left(\frac{N-1}{r} + \frac{r}{2}\right)\varphi' + e^\varphi + 1 = 0 \quad \forall r > 0. \quad (3.4)$$

$$\varphi'(0) = 0 \quad (3.5)$$

の解とする. 自己相似解の考察を行うには (3.4) のような 2 階常微分方程式を考察すればよいことがわかる. この方程式 (3.4) に原点での値を合わせて考えた 2 階常微分方程式の初期値問題:

$$\begin{cases} \varphi'' + \left(\frac{N-1}{r} + \frac{r}{2}\right)\varphi' + e^\varphi + 1 = 0 & \forall r > 0, \\ \varphi(0) = \alpha \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

を考察する. (3.6) の解 $\varphi \in C^2[0, \infty)$ は一意的であることがわかるので, φ_α とする. φ_α に次の条件を加える:

$$L(\alpha) = \lim_{r \rightarrow \infty} (2 \log r + \varphi_\alpha(r)). \quad (3.7)$$

(3.7) の極限は存在し, α に関して連続であることが知られている. φ に次の条件を与える:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (2 \log r + \varphi(r)) = L \quad (3.8)$$

任意の $L \in \mathbb{R}$ に対して

$$S_L = \{\varphi \in C^2[0, \infty) : \varphi \text{ は (3.4), (3.5), (3.8) を満たす.}\} \quad (3.9)$$

S_L は次の性質をもつ.

定理 3.1. $L \in \mathbb{R}$ に対して S_L を (3.9) で定めたものとし $S_L \neq \emptyset$ とする. このとき, S_L は最小解を持つ. すなわち, ある $\underline{\varphi} \in S_L$ が存在して 任意の $\varphi \in S_L$ に対して $\varphi \geq \underline{\varphi}$ が成り立つ.

べき乗の非線形項の方程式においては $(N+2)/(N-2) < p < p_{JL}$ において, 定理 3.2 のような性質があることがわかった. 指数増大な非線形項は, べき乗の非線形項 u^p を $p \rightarrow \infty$ とした場合に相当すると考えられる. このことを考慮すると指数増大な方程式における $3 \leq N \leq 9$ の場合は, べき乗の方程式に対する $(N+2)/(N-2) < p < p_{JL}$ の場合と同等と考えられる. したがって $3 \leq N \leq 9$ において次の性質が成り立つ.

定理 3.2. $3 \leq N \leq 9$ とする. S_L は少なくとも 2 つの元を持つと仮定する. そのうちの最小解でないものの 1 つを φ_L とする. 自己相似解 u_L を次のように定める:

$$u_L(x, t) = -\log t + \varphi_L\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right). \quad (3.10)$$

- (i) ある $t_0 > 0$ に対して $u_0(x) \geq u_L(x, t_0)$, $u_0(x) \neq u_L(x, t_0)$ ($x \in \mathbb{R}^N$) であるとする. このとき, (1.1) の解 u は有限時間で爆発する.
- (ii) ある $t_0 > 0$ に対して $u_0(x) \leq u_L(x, t_0)$, $u_0(x) \neq u_L(x, t_0)$ ($x \in \mathbb{R}^N$) であるとする. このとき, (1.1) の解 u は大域解となる.

この結果はべき乗の非線形項を持つ方程式 (2.1) に対する内藤 [[9] Theorem1.1] の結果の指数版に相当している.

4 近似方程式について

べき乗の非線形項を持つ半線形熱方程式には, 膨大な研究結果が知られている. そこで指数増大の非線形項を持つ場合にも, 非線形項をべき乗の方程式で近似することにより, これまでの結果の蓄積の多くが利用できるのではないかと考え, その可能性を探ってみることにした. このアイデアは指数関数の関係式:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

を元にして, べき乗を非線形項にもつ方程式:

$$u_t^{(n)} - \Delta u^{(n)} = \left(1 + \frac{u^{(n)}}{n}\right)^n \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \quad (4.1)$$

を考察することで実現することができる. ここで $N > 1$, $n > 1$ とする. 実際, 藤嶋 [1] では示されていない S_L の最小解の存在 (定理 3.1) をこの方法により示すことができる. さらに, 最小解の存在を示せたことにより自己相似解が大域解と爆発解を隔てる解であることを示すことができる (定理 3.2). まず, (4.1) は次のスケール変換に対して不変であることに注意する:

$$u_\lambda^{(n)}(x, t) = n(\lambda^{2/(n-1)} - 1) + \lambda^{2/(n-1)} u^{(n)}(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \forall \lambda > 0.$$

特に, スケール変換に不変な解:

$$u^{(n)}(x, t) = n(\lambda^{2/(n-1)} - 1) + \lambda^{2/(n-1)} u^{(n)}(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \forall \lambda > 0 \quad (4.2)$$

を前方自己相似解と呼ぶ. ここで (4.1) の定常解は

$$-\Delta u^{(n)} = \left(1 + \frac{u^{(n)}}{n}\right)^n \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

となる. この方程式の原点を特異点とする特異定常解 u_* は次の形で表せる:

$$u_*(x) = L^*(|x|^{-2/(n-1)} + n) - n$$

ここで

$$L^* = \left[\frac{2n^n}{n-1} \left(N - 2 - \frac{2}{n-1} \right) \right]^{1/(n-1)}.$$

ここで (4.2) において $\lambda = t^{-1}$ として次の形の自己相似解を考察する:

$$u^{(n)}(x, t) = n(t^{-2/(n-1)} - 1) + t^{-2/(n-1)} \varphi^{(n)}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

ただし, $\varphi^{(n)}$ は

$$\Delta \varphi^{(n)} + \frac{1}{2} x \cdot \nabla \varphi^{(n)} + \frac{1}{n-1} (\varphi^{(n)} + n) + \left(1 + \frac{\varphi^{(n)}}{n} \right)^n = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

特に, $\varphi^{(n)}$ を原点に関して球対称性を仮定すると $\varphi^{(n)} = \varphi^{(n)}(r)$, $r = |x|$ となり, 次を満たす:

$$\varphi^{(n)''} + \left(\frac{N-1}{r} + \frac{r}{2} \right) \varphi^{(n)'} + \frac{1}{n-1} (\varphi^{(n)} + n) + \left(1 + \frac{\varphi^{(n)}}{n} \right)^n = 0 \quad \forall r > 0. \quad (4.3)$$

$$\varphi^{(n)'}(0) = 0 \quad (4.4)$$

を満たす. 自己相似解の考察を行うには (4.3) のような 2 階常微分方程式を考察すればよいことがわかる. この方程式 (4.3) に原点での値を指定して考えた 2 階常微分方程式の初期値問題:

$$\begin{cases} \varphi^{(n)''} + \left(\frac{N-1}{r} + \frac{r}{2} \right) \varphi^{(n)'} + \frac{1}{n-1} (\varphi^{(n)} + n) + \left(1 + \frac{\varphi^{(n)}}{n} \right)^n = 0 & \forall r > 0, \\ \varphi^{(n)}(0) = \alpha \in \mathbb{R}, \quad \varphi^{(n)'}(0) = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

を考察する. まず, 指数増大の非線形項をもつ方程式 (3.6) の解 φ_α は, べき乗を非線形項にもつ方程式 (2.4) の解 $\varphi_\alpha^{(n)}$ で近似できることを示す.

定理 4.1. $N \geq 1$ とする. $\alpha \in \mathbb{R}$ とし, φ_α は (3.6) の解とする. ある $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して $n_0 + \alpha > 0$ とする. このとき, $\varphi_\alpha^{(n)} > -n$ ($n \geq n_0$) となる (4.5) を満たす関数列 $\{\varphi_\alpha^{(n)}\}_{n \geq n_0}$ が存在して, 次を満たす:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq r \leq r_0} |\varphi_\alpha^{(n)}(r) - \varphi_\alpha(r)| = 0 \quad \forall r_0 > 0 \quad (4.6)$$

次に $\varphi \in S_L$ を $\varphi^{(n)}$ で近似することを考える. この事実を示すのが次の定理である.

定理 4.2. $\varphi_\alpha \in S_L$ は $\varphi_\alpha(0) = \alpha$ を満たすと仮定する. 関数列 $\{\varphi_\alpha^{(n)}\}_{n \geq n_0}$ は定理 4.1 で定められたものとする. このとき, $L^{(n)}(\alpha) \in \mathbb{R}$ が存在し, 次を満たす:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [r^{\frac{2}{n-1}} \varphi_\alpha^{(n)} + n] = L^{(n)}(\alpha), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L^{(n)}(\alpha) = L.$$

定理 4.2 により S_L の最小解の存在を示すことができる.

- [1] Y. Fujishima, Global existence and blow-up of solutions for the heat equation with exponential nonlinearity. J. Differential Equations 264 (2018), no. 11, 6809-6842.

- [2] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. sci. Univ. Tokyo Sect. I, 13(1966), 109-124.
- [3] H. Fujita, On the nonlinear equations $\Delta u + e^u = 0$ and $\partial v / \partial t = \Delta v + e^v$, Bull. Amer. Math. Soc. 75(1969) 132-135.
- [4] C. Gui, W.-M. Ni and X. Wang, On the stability and instability of positive steady states of a semilinear heat equation in $\mathbb{R}^n$, Comm. Pure Appl. Math., 45 (1/992), 1153-118.
- [5] A. Haraux, F.B. Weissler, Non-uniqueness for a semilinear initial value problem, Indiana Univ. Math. J. 31 (1982) 167-189.
- [6] T.-Y. Lee, W-M. Ni, Global existence, large time behavior and life span of solutions of a semilinear parabolic Cauchy problem, Trans. Amer. Math. Soc. 333 (1992) 365-378.
- [7] Y. Naito, Non-uniqueness of solutions to the Cauchy problem for semi-linear heat equations with singular initial data. Math. Ann 329 (2004), 161-196.
- [8] Y. Naito, An ODE approach to the multiplicity of self-similar solutions for semi-linear heat equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 136 (2006) 807-835.
- [9] Y. Naito, The role of forward self-similar solutions in the Cauchy problem for semilinear heat equations. J. Differential Equations 253 (2012) 3029-3060.
- [10] P. Quittner, Threshold and strong threshold solutions of a semilinear parabolic equation, arXiv;1605.07388.
- [11] P. Quittner and Ph. Souplet, Superlinear parabolic problems, blow-up, global existence and steady states, Birkhauser Advanced Texts, Burkhauser, Basel, 2007.
- [12] J.I. Tello, Stability of steady states of the Cauchy problem for the exponential reaction-diffusion equation, J. Math. Anal. Appl. 324 (2006) 381-396.
- [13] X. Wang, On the Cauchy problem for reaction-diffusion equations. Trans. Am. Math. Soc. 337 (1993), 549-590.
- [14] F.B. Weissler, Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p , Indiana Univ. Math. J. 29 (1980) 79-102.
- [15] F.B. Weissler, Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation, Israel J. Math. 38 (1981) 29-40.
- [16] 柳田英二, 藤田型方程式の大域解の挙動, 『数学』 63 (2011), 85—102.